普通高等教育“十二五”规划教材·财经类院校基础课系列教材

高等数学（经管类）

主编　吴玉梅　古　佳　康　敏

主审　王佐仁　雷向辰

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材·财经类院校基础课系列教材

高等数学

（经管类）

主　编　吴玉梅　古　佳　康　敏

主　审　王佐仁　雷向辰

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书根据经济管理类本科基础课程教学基本要求编写而成.内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程及差分方程初步等.

本书以经济与管理类学生易于接受的方式,系统地介绍了微分与积分的基本内容,重点介绍了高等数学的方法及其在经济、管理中的应用.精选了大量有实际背景的例题与习题,以培养学生的数学素养和运用数学工具解决实际问题的能力。

本书适合普通高等学校经济管理类专业学生使用,也可作为考研学生备考之书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经管类/吴玉梅,古佳,康敏主编.一北京:科学出版社,2014
普通高等教育"十二五"规划教材·财经类院校基础课系列教材
ISBN 978-7-03-040874-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①吴…②古…③康… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第119340号

责任编辑:任俊红 滕亚帆 / 责任校对:刘亚琦 朱光兰
责任印制:阎 磊 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014年6月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2014年6月第一次印刷 印张:27 1/4
字数:700 000

定价:52.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

编委会名单

主　编　吴玉梅　古　佳　康　敏

主　审　王佐仁　雷向辰

前　言

数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于非数学专业的大学生而言，大学数学教育，其意义不仅仅是学习一种专业的工具. 中外大量的教育实践充分显示，优秀的数学教育，是对人的理性思维品格和思辨能力的培育，是对人聪明智慧的启发，是人潜在的能动性与创造力的开发，其价值远非一般的专业技术教育所能相提并论.

进入 20 世纪以后，数学向更加抽象的方向发展，各个学科更加系统和结构化，数学的各个分支学科之间交叉渗透，彼此界限已经逐渐模糊. 时至今日，数学学科的所有分支都或多或少地联系在一起，形成了一个复杂的、相互关联的网络. 纯粹数学与应用数学一度存在的分歧在更高的层面上趋于缓和，并走向协调发展. 总而言之，数学学科逐渐成为一门综合学科，是一个包括上百个分支的学科，是一个相互交融渗透的庞大的学科体系，这充分显示了数学学科的统一性.

然而，随着我国高等教育自 1999 年开始迅速扩大招生规模，至 2009 年的短短 10 年间，我国高等教育实现了从英才教育到大众化教育的过渡. 教育规模的迅速扩张，给我国高等教育带来了一系列的变化和问题，如大众化教育阶段入学生源的多样化问题、学生规模扩大带来的大班和多班教学的问题、由于院校合并导致的"一校多区"及由此产生的教学管理不科学以及师生间缺乏交流等问题. 面对这些问题如何使得培养的人才更加适应社会的需要，为高等教育，特别是基础教育提出了许多新的课题.

当前普通高等学校大学数学课程的教育效果不尽如人意，教材建设仍停留在传统模式上，未能适应社会需求，传统的高等数学教材过分追求逻辑严密性与理论体系的完整性，重理论轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，不利于学生建立数学课程与后续专业课程之间的联系.

本书的编写者都是从事高等数学教学工作多年的教师，他们经常与学生接触，积累了丰富的经验，熟知学生在学习高等数学课程中的困难与要求，因而他们用由浅入深、通俗易懂的语言对这套教材进行了重新编写，用严密的数学语言描述，保留反映数学思想的本质内容，摒弃非本质的、仅仅为确保数学理论完整性和严密性的数学语言描述. 坚持数学思想优先于数学方法，数学方法优先于数学知识的原则. 以提升学生运用数学思想和数学方法解决实际问题的能力为核心，使读者在学习中真正领悟到高等教育的思想内涵与巨大价值.

全书以经济管理类学生易于接受的方式，科学、系统地介绍高等数学的基本内容，重点介绍了高等数学的方法及其在经济学与管理学中的应用. 本书强调概念和内容的直观引入及知识间的联系；强调数学思维和应用能力的培养；强调有关概念、方法与经济管理学科的联系，并适应现代经济、金融和管理学发展的需要.

本书共 9 章，包括：第 1 章函数、极限与连续；第 2 章导数与微分；第 3 章微分中值定理与导数的应用；第 4 章不定积分；第 5 章定积分及其应用；第 6 章多元函数微积分学；第 7 章无穷级数；第 8 章微分方程；第 9 章差分方程初步. 本书适合于高等学校经济管理类各专业的读者，

书中标有 * 的内容读者可以选学.

全书由吴玉梅、古佳和康敏主编,王佐仁、雷向辰主审.参加本书编写的有葛键(第 1、2 章)、康敏(第 3、4 章)、吴玉梅(第 5、8、9 章)、古佳(第 6 章)、李琪(第 7 章).

由于编者的水平有限,加之时间仓促,书中若有不当之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

2013 年 9 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续 ………………………………………… 1

1.1　函数 ………………………………………… 1

1.2　初等函数 ………………………………………… 10

1.3　常用经济函数 ………………………………………… 17

1.4　数列的极限 ………………………………………… 24

1.5　函数的极限 ………………………………………… 29

1.6　无穷小与无穷大 ………………………………………… 35

1.7　极限运算法则 ………………………………………… 39

1.8　极限存在准则　两个重要极限 ………………………………………… 43

1.9　无穷小的比较 ………………………………………… 50

1.10　函数的连续性与间断点 ………………………………………… 52

1.11　连续函数的运算与性质 ………………………………………… 58

总习题一 ………………………………………… 63

第 2 章　导数与微分 ………………………………………… 66

2.1　导数概念 ………………………………………… 66

2.2　函数的求导法则 ………………………………………… 73

2.3　导数的应用 ………………………………………… 80

2.4　高阶导数 ………………………………………… 84

2.5　隐函数的导数 ………………………………………… 88

2.6　函数的微分 ………………………………………… 92

总习题二 ………………………………………… 101

第 3 章　微分中值定理与导数的应用 ………………………………………… 104

3.1　微分中值定理 ………………………………………… 104

3.2　洛必达法则 ………………………………………… 110

3.3　泰勒公式 ………………………………………… 115

3.4　函数的单调性与极值 ………………………………………… 121

3.5　函数的最值及应用 ………………………………………… 127

3.6　曲线的凹凸性与拐点 ………………………………………… 137

3.7　函数图形的描绘 ………………………………………… 141

总习题三 ………………………………………… 145

第 4 章　不定积分 ………………………………………… 148

4.1　不定积分的概念与性质 ………………………………………… 148

4.2　换元积分法 ………………………………………… 154

4.3　分部积分法 ………………………………………… 163

4.4　有理函数与可化为有理函数的积分 ………………………………………… 168

总习题四 ………………………………………… 175

第 5 章 定积分及其应用……177
5.1 定积分的概念……177
5.2 定积分的性质……185
5.3 微积分基本公式……189
5.4 定积分的换元积分法与分部积分法……195
5.5 广义积分……203
5.6 定积分的几何应用……209
5.7 定积分在经济分析中的应用……220
总习题五……226
第 6 章 多元函数微积分学……229
6.1 空间解析几何……229
6.2 多元函数的基本概念……235
6.3 偏导数……242
6.4 全微分及其应用……246
6.5 复合函数微分法……251
6.6 隐函数微分法……256
6.7 多元函数的极值及其求法……262
6.8 二重积分的概念与性质……269
6.9 二重积分的计算(一)……273
6.10 二重积分的计算(二)……279
总习题六……285
第 7 章 无穷级数……288
7.1 常数项级数的概念和性质……288
7.2 正项级数的判别法……296
7.3 一般常数项级数……304
7.4 幂级数……308
7.5 函数展开成幂级数……317
总习题七……327
第 8 章 微分方程……330
8.1 微分方程的基本概念……330
8.2 可分离变量的微分方程……334
8.3 一阶线性微分方程……342
8.4 可降阶的二阶微分方程……347
8.5 二阶线性微分方程解的结构……350
8.6 二阶常系数齐次线性微分方程……353
8.7 二阶常系数非齐次线性微分方程……356
8.8 数学建模——微分方程的应用举例……361
总习题八……367
第 9 章 差分方程初步……371
9.1 差分方程的基本概念……371
9.2 一阶常系数线性差分方程……375

9.3　二阶常系数线性差分方程 …… 379
9.4　差分方程在经济学中的简单应用 …… 384
总习题九 …… 386
部分习题答案 …… 388
附录 …… 421
附录 1　预备知识 …… 421
附录 2　常用曲线 …… 424

第 1 章　函数、极限与连续

初等数学主要研究的是常量及其运算,而高等数学主要研究的是变量与变量之间的依赖关系.函数正是这种依赖关系的体现,是高等数学中最重要的基本概念.本章将在复习中学教材中有关函数内容的基础上,进一步研究函数的性质,分析初等函数的结构.

微积分是研究函数局部变化和整体变化性质的一门学科,极限理论是微积分的理论基础,极限方法和局部线性化是微积分的基本方法,微积分的重要概念都是通过极限来定义的.微积分主要研究连续函数,函数的连续性也是要用极限来定义的.

本章介绍函数与极限的概念、性质及运算法则,在此基础上建立函数连续的概念,讨论连续函数的性质.

1.1　函　　数

1.1.1　实数集

人类对数的认识是逐步发展的,先是自然数 1,2,3,….由于做加法逆运算的需要,人们又增添了零和负整数,从而将正整数扩充为一般**整数**.乘法的逆运算又导致了分数的产生,而分数又称为**有理数**,即任意一个有理数都可以表示成$\frac{p}{q}$(其中 p,q 为整数,且 $q\neq 0$).

古希腊人发现等腰直角三角形的腰和斜边没有公度,从而证明了$\sqrt{2}$不是有理数.这样,人类首次知道了无理数的存在,后来又发现了更多的无理数,如$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,…以及 π 与 e 等.有理数又可以表示成有限小数或无限循环小数.因此,可以认为**无理数**是无限不循环小数.有理数和无理数统称为**实数**.

笛卡儿引入了坐标的概念,把实数集合与一条直线上的点集合建立了一一对应的关系.把规定了原点、方向和单位长度的直线称为**数轴**.引入数轴概念后,数轴上的任何点都可以看作一个实数;反之,实数也可以看作数轴上的一个点.所以,常常把实数集合与数轴等同,把实数与数轴上的点等同,并把实数 a 称为点 a.

数轴上表示有理数的点称为**有理点**,表示无理数的点称为**无理点**.有理点具有稠密性,即数轴上任意两个有理点之间一定存在无穷多个有理点;同样,无理点也具有稠密性.

如无特别说明,本课程中提到的数均为实数,用到的集合主要是实数集.此外,为后面的叙述方便,重申几个特殊实数集的记号:自然数集记为 **N**,整数集记为 **Z**,有理数集记为 **Q**,实数集记为 **R**,这些数集间的关系为

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

1.1.2　实数的绝对值

实数的绝对值是数学里经常用到的概念.下面介绍实数绝对值的定义及其一些性质.

定义 1　设 x 为一个实数,则 x 的**绝对值**定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

x 的绝对值 $|x|$ 在数轴上表示点 x 与原点 O 的距离，若 y 为任意实数，则点 y 与点 x 间的距离可用数 $y-x$ 或 $x-y$ 的绝对值来表示

$$|y-x|=|x-y|=\begin{cases}x-y, & x\geqslant y\\ y-x, & x<y\end{cases}.$$

实数的绝对值有如下性质：

(1) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，才有 $|x|=0$；

(2) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|-x|=|x|$；

(3) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|=\sqrt{x^2}$；

(4) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$；

(5) 设实数 $a>0$，则 $|x|<a$ 的充分必要条件是 $-a<x<a$；

(6) 设实数 $a\geqslant 0$，则 $|x|\leqslant a$ 的充分必要条件是 $-a\leqslant x\leqslant a$；

(7) 设实数 $a>0$，则 $|x|>a$ 的充分必要条件是 $x<-a$ 或者 $x>a$；

(8) 设实数 $a\geqslant 0$，则 $|x|\geqslant a$ 的充分必要条件是 $x\leqslant -a$ 或者 $x\geqslant a$.

它们的几何解释是直观的. 例如性质(5)，在数轴上 $|x|<a$ 表示所有与原点距离小于 a 的点 x 构成的点集，$-a<x<a$ 表示所有位于点 $-a$ 和 a 之间的点 x 构成的点集. 它们表示同一个点集. 性质(6)～性质(8)可做类似的解释.

由性质(5)可以推得不等式 $|x-A|<a$ 与 $A-a<x<A+a$ 是等价的，其中 A 为实数，a 为正实数.

关于实数四则运算的绝对值，有以下的结论.

设 x 与 y 为任意实数，恒有

(1) $|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$；

(2) $||x|-|y||\leqslant|x-y|$；

(3) $|xy|=|x||y|$；

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

下面仅就结论(1) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ 进行证明.

证明 由性质(4)，有

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,\quad -|y|\leqslant y\leqslant|y|,$$

从而有

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|.$$

根据性质(6)，由于 $|x|+|y|\geqslant 0$，得

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

1.1.3 区间与邻域

1. 区间

区间是高等数学中常用的实数集，分为**有限区间**和**无限区间**两类.

(1) 有限区间

设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间：

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\},\quad [a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},\quad (a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

（2）无限区间

引入记号$+\infty$（读作“正无穷大”）及$-\infty$（读作“负无穷大”），则可类似地表示无限区间. 例如，

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},\quad (-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

特别地，全体实数的集合 **R** 可以表示为无限区间$(-\infty,+\infty)$.

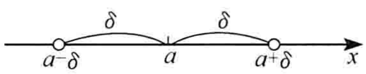
注　在本教程中，当不需要特别辨明区间是否包含端点、是有限还是无限时，常将其简称为“区间”，并常用 I 表示.

2. 邻域

定义 2　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集$\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$称为点 a 的 δ **邻域**，记为

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中，点 a 称作该**邻域的中心**，δ 称作该**邻域的半径**（图 1-1-1）.



$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$

图 1-1-1

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于$|x-a|<\delta$，所以

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

若把邻域$U(a,\delta)$的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的**去心的** δ 邻域，记为$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

更一般地，以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域，当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记为$U(a)$.

1.1.4　函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中，往往同时存在多个不断变化的量，即变量，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定规律的. 函数就是描述这种联系的一个法则. 本节先讨论两个变量的情形（多于两个变量的情形将在第 6 章中讨论）.

例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s.

假定开始下落的时刻为 $t=0$，则变量 s 和 t 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 为重力加速度.

定义 3　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为这个函数的**定义域**，也记为 D_f，即 $D_f=D$.

对 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0（记为 $f(x_0)$）与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 取遍 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

注　函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素. 两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

关于函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定.如果讨论的是纯数学问题,则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域,这种定义域又称为函数的**自然定义域**.

例如,函数

$$y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$$

的(自然)定义域即为区间$[-2,1)\cup(1,2]$.

1. 函数的图形

对函数 $y=f(x)(x\in D)$,若取自变量 x 为横坐标,因变量 y 为纵坐标,则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点(x,y).当 x 遍取定义域中的每一个数值时,平面上的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$的**图形**(图 1-1-2).

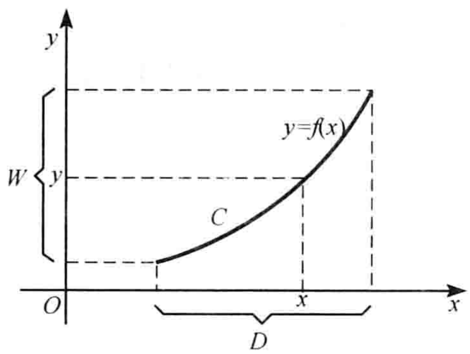


图 1-1-2

若自变量在定义域内任取一个数值,对应的函数值总是只有一个,这种函数称为**单值函数**,否则称为**多值函数**.

例如,方程 $x^2+y^2=r^2$ 在闭区间$[-r,r]$上确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数.对每一个 $x\in(-r,r)$,都有两个 y 值$(\pm\sqrt{r^2-x^2})$与之对应,因而 y 是多值函数.

注 若无特别声明,本教程中的函数均指单值函数.

2. 函数的常用表示法

函数的表示法通常有三种:**表格法**、**图像法**和**公式法**.

(1) **表格法**.将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法;

(2) **图像法**.在坐标系中用图形来表示函数关系的方法;

(3) **公式法(解析法)**.将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法.

根据函数的解析表达式的形式不同,函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种:

(1) **显函数**.函数 y 由 x 的解析表达式直接表示.例如,$y=x^4+1$;

(2) **隐函数**.函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定.例如,$\ln y=\cos(x^2+y)$;

(3) **分段函数**.函数在其定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式.

以下是几个分段函数的例子.

例 1 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,图形如图 1-1-3 所示.

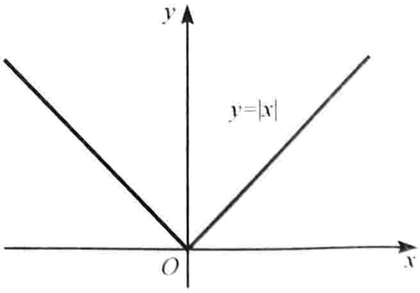


图 1-1-3

例 2　符号函数

$$y = \operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-1-4所示.

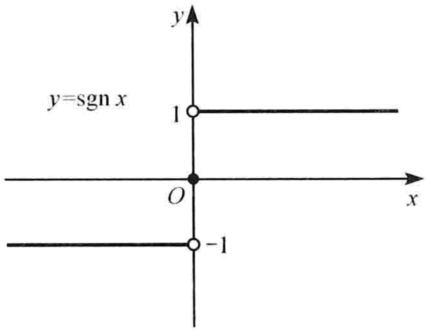


图 1-1-4

对于任意实数 x，有下列关系成立：

$$x = \operatorname{sgn}x \cdot |x|.$$

例 3　取整函数$[x]$，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

例如，$\left[\dfrac{4}{5}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\pi]=3$，$[-2]=-2$，$[-3.14]=-4$.

取整函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$，图形如图 1-1-5 所示.

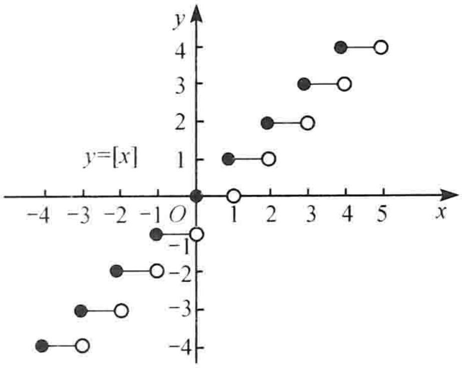


图 1-1-5

1.1.5　具有某种特性的函数

1. 有界函数

定义 4　设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在一个正数 M，使得对一切 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$在 X 上**有界**，或称 $f(x)$是 X 上的**有界函数**. 每一个具有上述性质的正数 M，都是该**函数的界**.

若具有上述性质的正数 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**，或称 $f(x)$ 为 X 上的**无界函数**.

定义 5　设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在一个数 A(或 B)，使得对一切 $x\in X$，恒有

$$f(x)\leqslant A \quad (\text{或 } f(x)\geqslant B)$$

成立，则称函数 $f(x)$在 X 上**有上界**(**或有下界**)，也称 $f(x)$是 X 上的**有上界**(**或有下界**)**函数**. 每一个具有上述性质的数 A(或 B)，都是该**函数的上界**(**或下界**).

若具有上述性质的数 A(或 B)不存在，则称 $f(x)$在 X 上**无上界**(**或无下界**)，或称 $f(x)$为 X 上的**无上界**(**或无下界**)**函数**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为对任何实数 x，恒有$|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上无界，在$[1,+\infty)$上有界. 函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内无界，但 $y=x^2$ 在$[-1,1]$上是有界函数.

容易证明，函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

例 4　证明函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$上是有界的.

证明　因为$(1-|x|)^2\geqslant 0$，所以$|x^2+1|=|x|^2+1\geqslant 2|x|$，故对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有

$$|y| = \left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{2|x|}{2|1+x^2|}\leqslant\frac{1}{2},$$

从而函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的.

2. 单调函数

定义 6　设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

(1) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加函数**;

(2) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少函数**;

(3) $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**严格单调增加函数**;

(4) $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**严格单调减少函数**.

单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**,严格单调增加函数和严格单调减少函数统称为**严格单调函数**.

例如,函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内是严格单调减少的,在$(0,+\infty)$内是严格单调增加的,在$(-\infty,+\infty)$内是不单调的(图 1-1-6).

例 5　证明函数 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的函数.

证明　在$(-\infty,+\infty)$内任取两点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,则

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)\\&=(x_2-x_1)\left[\left(x_2^2+x_1x_2+\frac{1}{4}x_1^2\right)+\frac{3}{4}x_1^2\right]\\&=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right].\end{aligned}$$

因为 $x_2-x_1>0$,故 $f(x_2)-f(x_1)>0$,即

$$f(x_2)>f(x_1).$$

所以 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的.

函数 $f(x)=x^3$ 的图形如图 1-1-7 所示.

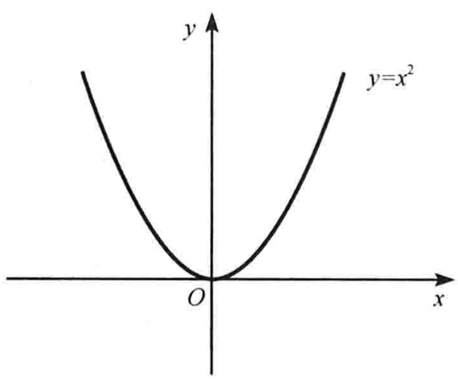


图 1-1-6

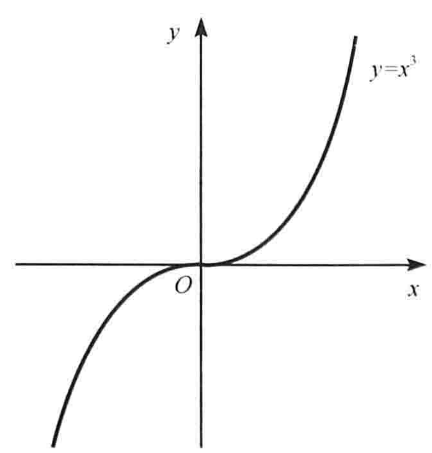


图 1-1-7

由定义易知,单调增加函数的图形沿 x 轴正向是逐渐上升的(图 1-1-8),单调减少函数的图形沿 x 轴正向是逐渐下降的(图 1-1-9).

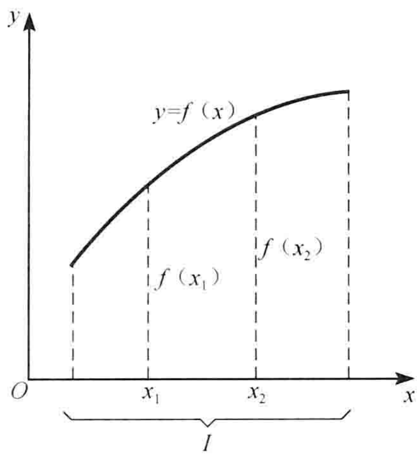


图 1-1-8

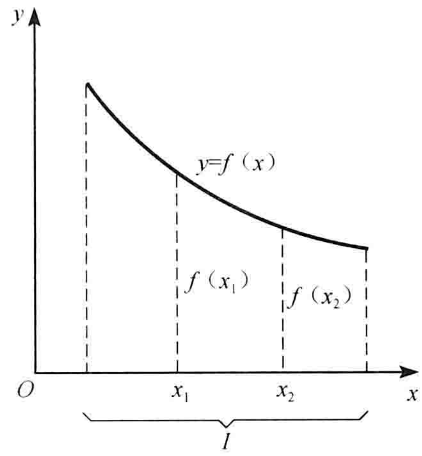


图 1-1-9

3. 奇偶函数

定义 7　设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称.若 $\forall x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$为**偶函数**;若 $\forall x\in D$,恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的(图 1-1-10).奇函数的图形关于原点是对称的(图 1-1-11).

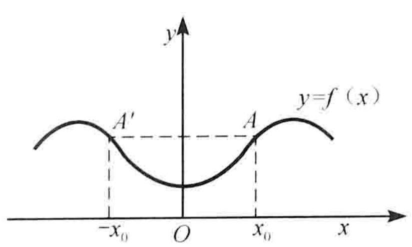


图 1-1-10

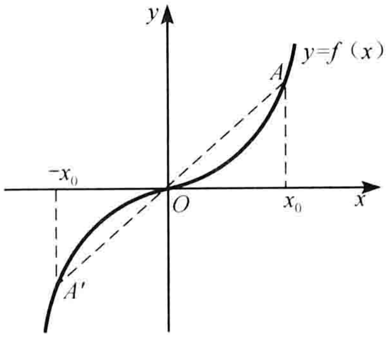


图 1-1-11

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\operatorname{sgn}x$ 是奇函数,函数 $y=\cos x$,$y=x^2$ 是偶函数,而函数 $y=\sin x+\cos x$既不是奇函数又不是偶函数.

例 6　判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

解　因为函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$是奇函数.

4. 周期函数

定义 8　设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在常数 $T>0$,使得对一切 $x\in D$,有$(x\pm T)\in$

D,且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常周期函数的周期是指其**最小正周期**. 但并非每个周期函数都有最小正周期.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $y=\tan x$,$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

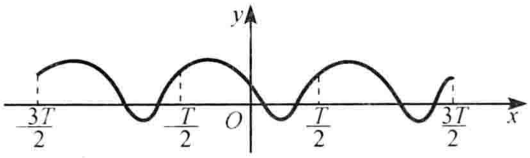


图 1-1-12

周期函数的图形特点是,如果把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍距离,则它将与周期函数的其他部分图形重合(图 1-1-12).

例 7　狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^C\end{cases},$$

它是一个周期函数,任何正有理数都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

例 8　如果函数 $f(x)$ 对其定义域上的一切 x,恒有

$$f(x)=f(2a-x),$$

则称 $f(x)$ 对称于 $x=a$. 证明:如果 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b(a<b)$,则 $f(x)$ 是以 $T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

证明　因为 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b$,则有

$$f(x)=f(2a-x), \tag{1.1.1}$$

$$f(x)=f(2b-x). \tag{1.1.2}$$

在式(1.1.2)中,把 x 换为 $2a-x$,得

$$f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]=f[x+2(b-a)].$$

由式(1.1.1)有

$$f(x)=f(2a-x)=f[x+2(b-a)],$$

故 $f(x)$ 是以 $T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

1.1.6　简单函数关系的建立

在应用数学方法解决实际问题的过程中,首先要将该问题量化,分析哪些是常量,哪些是变量,确定选取哪个作为自变量,哪个作为因变量,然后要把实际问题中变量之间的函数关系正确抽象出来,根据题意建立起它们之间的数学模型,最后应用有关的数学知识或其他相关知识分析、综合,以达到解决问题的目的. 其中,建立函数关系是解决实际问题的关键步骤.

下面举例说明如何根据实际问题所给的条件建立所需的函数关系.

例 9　某工厂生产某型号车床,年产量为 a 台,分若干批进行生产,每批生产准备费为 b 元. 设产品均匀投入市场,且上一批用完后立即生产下一批,即平均库存量为批量的一半. 设每年每台库存费为 c 元. 显然,生产批量大则库存费高;生产批量少则批数增多,因而生产准备费高. 为了选择最优批量,试求出一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数关系.

解　设批量为 x,库存费与生产准备费的和为 $f(x)$. 因年产量为 a,所以每年生产的批数为 $\frac{a}{x}$(设其为整数). 于是,生产准备费为 $b\cdot\frac{a}{x}$,因库存量为 $\frac{x}{2}$,故库存费为 $c\cdot\frac{x}{2}$. 由此可得