海天教育 HAITIAN EDUCATION | 理工社®

考研数学
武侠精典

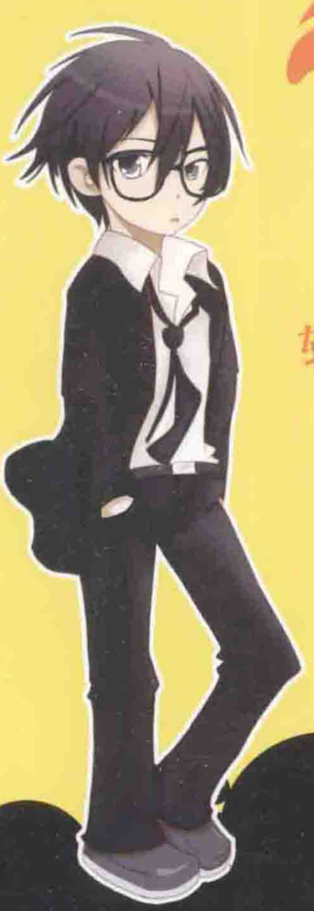
NEW

考研数学24堂课

24 basic Math courses

组 编：海天鲲鹏数学研究院
主 编：杨超 方浩 姜晓千

斩断自己的退路，
才能更好地赢得出路！



我是牛小天，帅得很纯粹！

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学24堂课

组　编　海天鲲鹏数学研究院
主　编　杨　超　　方　浩　　姜晓千

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学24堂课 / 杨超，方浩，姜晓千主编. —北京：北京理工大学出版社，2014.3
ISBN 978-7-5640-8930-6

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①杨… ②方… ③姜…Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
Ⅳ. ①O13
中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第038373号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
82562903（教材售后服务热线）
68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京旺鹏印刷有限公司
开　　本 / 710 毫米 × 1000 毫米　1/16
印　　张 / 34.5
字　　数 / 710千字
版　　次 / 2014年3月第1版　2014年3月第1次印刷
定　　价 / 56.80元

责任编辑 / 王俊洁
文案编辑 / 侯瑞娜
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

考研之路似卷茫
俱向往深思量
甚嚣尘上请君莫
彷徨
北风啸杀掠考場
身似铁心如鋼
雄关不惧成败自
含香

张宇 二零一四年春
与考研学子共勉

【注】有一考研学生将苏轼《江城子》的词句改写为：“考研成败两茫茫，不思量，自难忘，寒窗孤影，无处话凄凉。北风啸杀掠考场，纵使十年八年也不惧，身似铁，心如钢。”文采极好，但略显悲观，于是，我也改词一首，送给考研学子，希望同学们雄关不惧，因为成败自含香。

总　　序

2014 年 1 月 6 日上午 11:30，考研数学尘埃落定. 随后，我便穿梭于各大教育门户网站接受采访，第一时间给广大考生详细解析这份考研数学试卷——我所解析的，并不是一个一个具体的题目，而是 2014 年的卷子所反映出的命题特点，并指出 2015 年考研复习的方向. 下面我就如何做好考研复习与考生朋友们作如下交流.

第一，考研数学复习一定要把握命题的风格与趋势.

考研数学命题一直以来"**重基础、轻技巧**"，而我们广大考生往往在一些不正确的引导下，"以题型为核心，以技巧为灵魂"，导致基本概念的理解不透彻、基本定理的使用不正确、基本方法的使用不恰当，即使再认真努力，方向错了，结果也不会理想.

我主编的这套教材严格依据教育部考试中心《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称《考试大纲》)编写，与《考试大纲》无缝接轨，科学、严谨地进行内容设计，**对《考试大纲》的知识点进行了正确的诠释，不贪多、不过度、不烂笔，把握住"火候"**，这一点是很有讲究的.

第二，考研数学复习一定要贯彻数学思维的训练和数学思想方法的研习.

一般认为，数学题型很重要. 给出一种题型，掌握这种题型的解题步骤，然后去套这个步骤就可以了. 这种按部就班的学习习惯和方法，对于考试来说，我不否认它有一定的合理之处，但是我却不完全赞同.

要想真正掌握数学知识，达到较高的数学素养并形成较强的解题水平，**必须在复习的过程中重视每个概念、定理和结论背后的数学思维方法，甚至可以在老师的引导下去欣赏和体味这思维背后的方法论**. 这个过程，是学习数学不可或缺的，我坚持这一观点，并且在教学和编写教材中贯彻这一观点.

第三，考研数学复习一定要重视经典好题的分析与解答.

数学解题实践是整个数学学习过程的重中之重. **一定要有好的数学题目作为载体，才能够把知识理解和掌握好**，所以，复习过程中题目质量的高低直接决定了复习的效果.

本套教材的每一本书中，都精挑细选了考研数学的经典好题，它们的来源请看**《考研数学题源探析经典 1000 题》**的前言，我在那里做了详细说明.

第四，考研数学复习一定要加强运算能力的培养.

考研数学的考试时间是 3 个小时，要解决 23 个数学题目，一届又一届考生的考后感受就是——做不完. 做不完，除了个别没有思路的题目外，大多因为计算速度太慢，计算能力不强. 我一直提醒考生，**在复习的全过程中都不要"眼高手低"，要算就算到低**，运算能力是硬功夫，不是一朝一夕的事情，请考生切记.

本套丛书答疑地址在我的新浪微博：http://weibo.com/zhangyumaths. 或者联系诸位分册主编，详情请看各分册的主编前言.

阅读这套书需要在脑力上付出巨大的努力，加油吧，预祝同学们成功！

张宇

2014 年春 于北京

前　言

本书是长期在一线从事考研数学辅导的教师为广大备战考研学生量身定做的基础复习用书。

每一届学生从备战考研的时间来说，典型分为两种：一种是启动时间比较早，在大三上学期就确定考研目标，并着手准备；一种是大三下学期才开始准备。每年的十一月左右我们会开设数学导学班（部分城市会开基础班），于是就有一些问题让学生很困惑，比如：

(1)基础阶段是夯实数学基础的关键时期，可以借助本科课本来复习，但是却不明白考研大纲的要求；

(2)考生独立看书过程中会遇到很多不易理解的概念、性质、定理；

(3)数学离不开做题，但除了完成课本后的相关习题，还需要做哪些相应的习题；

……

在平时的教学过程中，我们一直在思考和探索：面对浩如烟海的习题，各种抽象的概念和定理，怎样在有限的时间里，让学生摆脱数学给人留下的枯燥和无聊的印象，给学生一种新的理念和思想，并让他们在这种理念下学会主动学习，感受到高等数学的乐趣，掌握考试内容的内涵和精髓，做到由此及彼，举一反三，不仅数学能学好，还可以提升自己的学习能力，这正是一个准研究生的基本素质。

为了实现这个目标，在多年的教学和总结的基础上，我们编写了这本《考研数学 24 堂课》。本书共 24 课，包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个板块。每课分为五部分：

第一部分为知识结构网络图，清晰呈现知识脉络；

第二部分为基本内容讲解，即对考纲要求的考点进行梳理；

第三部分为重点、难点、易错点讲解，考生在学习过程中，容易因对基本概念、定理理解得不深，逻辑推理不严密，没有理解公式的本质等原因而出现一些典型错误，我们将其归纳和整理，以此帮助学生澄清模糊概念，排除思维障碍。本部分的写作语言活泼生动，娓娓道来，例如求极限的三种常见的方法——等价无穷小替换、洛必达法则和泰勒公式，我们分别用三种交通工具——大巴车、普通火车和高铁来形容，让学生很容易理解他们的优势与劣势。

第四部分为典型例题，详细讲解了每章内容中的典型习题、解题方法。第三章的中值定

理是高数的重点和难点，我们的例题也分基础阶段和强化阶段，学生可以根据自己的学习情况选择在不同的阶段使用。

第五部分是真题赏析，我们选择了 1987 年以来的真题，之所以选择这么多年份的真题，一是可以通过做题检查自己的学习效果，二是在做真题的过程中了解命题规律。

本书是张宇考研数学系列用书《高等数学 18 讲》《线性代数 10 讲》《概率论与数理统计 8 讲》的篇前篇，由杨超、方浩同志主笔完成。在本书的编写出版过程中参考了张宇、姜晓千、张新同志著作中的一些经典内容，由于篇幅所限，不在此列出，在此谨表衷心感谢。

编写时间匆忙，自身水平有限，书中不妥和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。同时欢迎广大考研学子和作者交流：

新浪微博：weibo. com/zhangyumaths（宇哥考研）

weibo. com/chaoyu666（杨超 Math）

weibo. com/u/1848595875（姜晓千）

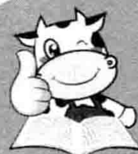
邮箱：haofang@pku. edu. cn（方浩）

作　者

2014 年春于北京

目　　录

考研数学
24堂课



第一部分　高等数学

第 1 课　函数、极限与连续

知识网络结构图

函数、极限与连续

- 形式
  - 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
  - ⇓ 归结原则
  - 函数极限 $\lim\limits_{x\to\square} f(x) = A$
  - ($x\to\square$ 有 6 种形式，$x\to\infty$，$+\infty$，$-\infty$，$x\to x_0$，x_0^+，x_0^-)
- 概念 ($\varepsilon-N$，$\varepsilon-\delta$ 语言)
- 性质
  - 唯一性
  - 局部有界性
  - 局部保号性
  - 四则运算
- 存在准则
  - 单调有界数列有极限
  - 夹逼准则
- ↓ 运用
- 二个重要极限
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
  - $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$
- 关系定理
  - 单侧极限与双侧极限
  - 函数极限与数列极限
  - 函数极限与无穷小
  - 无穷大与无穷小
- 无穷小
  - 概念
  - 性质
  - 阶的比较
- 连续
  - 定义
  - 间断点分类
    - 第Ⅰ类间断点
      - 可去
      - 跳跃
    - 第Ⅱ类间断点
      - 振荡
      - 无穷
  - 闭区间上连续函数的性质

基本内容

1. 极限概念

不少考生觉得极限概念很抽象，难以理解，这是因为极限的概念本身描述的是一个动态过程，而人的认识能力倾向于静态；其次，极限是一个无穷运算，而人的习惯倾向于具体、有穷的计算.

每个极限都由四句话组成，见表 1－1－1.

表 1－1－1

记号	对 ∀ 的	总 ∃ 着	当自变量满足	恒成立	则称
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<x_0-x<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	$f(x)$在 x_0 的左极限为 A
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<x-x_0<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	$f(x)$在 x_0 的右极限为 A
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$\lvert x\rvert>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to\infty$时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$x>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to+\infty$时，$f(x)$以 A 极限
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$x<-X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to-\infty$时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$	$\xi>0$	自然数 N	$n>N$	$\lvert x_n-A\rvert<\xi$	当 $n\to\infty$时，x_n 以 A 为极限

2. 基本性质

(1)唯一性

若$\lim\limits_{x\to\square} f(x)$存在，则极限唯一.

(2)局部有界性

若$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$，则存在 $\mathring{U}$，在 $\mathring{U}$ 内有界.

(3)不等式性质

若$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=B$.

①如果 $A>B$，则 $\exists\mathring{U}$，当 $x\in\mathring{U}$ 时，$f(x)>g(x)$；

②如果在 $\mathring{U}$ 中 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$.

(4)保号性

若$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A>0$，则 $\exists\mathring{U}$，当 $x\in\mathring{U}$，$f(x)>0$($A<0$ 有类似结论)或当 $x\in\mathring{U}$，$f(x)>0$，则 $A\geqslant 0$.

3. 存在准则

(1)单调有界准则

①若数列 x_n 单增且有上界(即 $x_{n+1}\geqslant x_n$，并对 ∀ n，都有 $x_n\leqslant M$)，则$\{x_n\}$收敛.

②若数列 x_n 单减且有下界(即 $x_{n+1}\leqslant x_n$,并对 $\forall n$,都有 $x_n\geqslant M$),则 x_n 收敛.

【注】以递推形式出现的数列极限问题经常用此定理证明.

(2)夹逼准则

$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\lim\limits_{x\to\square} h(x)=A$,又 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$.

(3)极限与单侧极限关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

(4)数列与子数列极限的关系

数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$收敛.

经常这样使用:$\lim\limits_{x\to\infty} x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}=a$.

(5)海涅定理(归结原则)

设$f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在$\Leftrightarrow$对任何以 x_0 为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$,$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 存在.

【注】该定理常用来否定函数极限存在,若能找出 $x_n\to x_0$,$y_n\to y_0$,$f(x_n)=A$,$f(y_n)=B$,但 $A\neq B$.

例如,证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

【证明】取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\pi^2\sin n\pi=0$,

取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\pi^2\to\infty$,故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

4. 二个重要极限及推广

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,推广为:$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$.

(2)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,

推广为:$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$.

5. 极限的运算

(1)极限的四则运算

设$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=B$,则

$\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\square} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\square} g(x)=A\pm B$,

$$\lim_{x\to\square}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to\square}f(x)\cdot\lim_{x\to\square}g(x)=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\square}f(x)}{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

(2)复合运算(连续函数)

$\lim\limits_{x\to\square}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to\square}g(x))$,其中$f(x)$为连续函数.

(3)幂指函数的极限

如果$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A(A>0)$,$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$,且$A$,$B$均为有限常数,则

$$\lim_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\left[\lim_{x\to\square}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=A^B.$$

【证明】 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}[g(x)\ln f(x)]}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to\square}\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln\left[\lim\limits_{x\to\square}f(x)\right]}=e^{B\ln A}=A^B.$$

【注】当A,B不是有限常数,或A不大于0,上述命题不成立.

切记,幂指函数求极限时,$x\to\square$是同一变化过程,不能分开来求极限.例如,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$.

很多同学容易犯这样的错误:因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=e^2$,故原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-e^2}{x^2}=0$,正确做法见后面例题.

6. 函数、极限、无穷小关系定理

$$\lim_{x\to\square}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

【注】该定理在计算有关极限题时作用很大,尤其是遇到有关抽象函数时,使用该定理,可以把抽象函数具体化.

例如,$\lim\limits_{x\to\infty}x_ny_n=0$,则下列说法正确的是(　　).

A. 若x_n发散,则y_n必发散　　B. 若x_n无界,则y_n必有界

C. 若x_n有界,则y_n必为无穷小　　D. 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小,则y_n必为无穷小.

【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,由上述定理可得$x_ny_n=0+\alpha(n)$,其中$\alpha(n)$为当$n\to\infty$时的无穷小量.故$y_n=\dfrac{1}{x_n}\alpha(n)$,即$y_n$为无穷小量,故选D.

7. 无穷小量、无穷大量及其阶(见表 1-1-2 和表 1-1-3)

表 1-1-2

无穷小量	$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$	关系	$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$
无穷大量	$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\infty$		$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{g(x)}=0$

表 1-1-3

比值		定义	记号
$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$=0$	$f(x)$是比 $g(x)$高阶无穷小	$f(x)=o[g(x)]$
	$=A\neq0$	$f(x)$是 $g(x)$的同阶无穷小	$f(x)=o[g(x)]$
	$=1$	$f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小	$f(x)\sim g(x)$
$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=A\neq0$		$f(x)$是 $g(x)$的 k 阶无穷小	$f(x)=o[g^k(x)]$

(1)无穷小量的性质

①有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

②有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

③无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

(2)等价无穷小量的替换定理

设 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$,$\tilde{\alpha}(x)$,$\tilde{\beta}(x)$都是无穷小量,且 $\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x)$,$\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\tilde{\beta}(x)}f(x)$.

【注】等价无穷小量代换用在乘、除法(整个式子,而不是部分式子),加、减法中不能用等价无穷小去替换.

(3)熟记几个常见的等价无穷小公式

当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\arctan x\sim x$,$e^x-1\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$a^x-1\sim x\ln a$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

【注】一定要把公式广义化,而且常见的变形要学会,例如,当 $x\to0$ 时,$f(x)\to0$,那么 $\ln(1+f(x))\sim f(x)$;当 $x\to0$ 时,$f(x)\to1$,$\ln f(x)=\ln(1+\boxed{f(x)-1})\sim\boxed{f(x)-1}$;一般来说,考题不会直接考.当 $x\to0$ 时,$e^x-1\sim x$,经常以"$e^{f(x)}-e^{g(x)}$"形式出现,具体见后面例题讲解.

(4)无穷小阶的运算规律

设 m,n 为正整数,则

①$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l)$,$l=\min\{m,n\}$,在极限的加减运算中,高阶无穷小被低阶无穷小所吸收,戏称“吸星大法”.

②$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$,$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$.

③$m\geqslant n$,$o(x^m)/x^n=o(x^{m-n})$(注:两个 $o(\quad)$不可以相除).

④$k\cdot o(x^m)=o(kx^m)=o(x^m)$,$k\neq 0$,为常数.

重点、难点、易错点讲解

1. 几个判别函数有界和无界的结论

(1)连续函数在闭区间上一定有界.

(2)函数在开区间(a,b)内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在,则函数在区间$(a,b)$内有界.

(3)有界变量与无穷大量之积为无界变界,但不一定是无穷大量.

(4)有界变量与无穷大量之和为无穷大量.

(5)两个正无穷大量之和与积均是无穷大量.

(6)函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界的充要条件是存在一个数列$\{x_n\}$,$x_n\in I$,使$\{f(x_n)\}$为无穷大数列.

考生自练:①$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在区间(　　)内有界

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

②当 $x\to 0$ 时,变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是(　　).

A. 无穷小　　B. 无穷大

C. 有界的,但不是无穷小　　D. 无界的,但不是无穷大

2. 求极限的常见错误

(1)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.

【解】原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+n)^2}=0+0+\cdots+0=0$.

(2)求极限$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

【解】$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\ \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(3)设 $x_n\geqslant 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

【证明】$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}\cdot\sqrt{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=a=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$,

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

(1)(2)(3)的解法为经典的错误，错误的原因在于没有正确理解极限的四则法则. 极限四则运算法则是针对有限项求和，而题(1)是无穷多项求和. (2)和(3)的错误在于使用法则前提是$f(x)$, $g(x)$的极限存在.

3. 在等价无穷小替换求极限时，要注意并不是任何两个无穷小量都可进行比较

例如，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}$时，常见错误为：

当$x\to 0$时，$\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\dfrac{1}{x}$，这个结论是不成立的. 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\sin\dfrac{1}{x}}$没有意义.

在$x=0$点的任意小的去心邻域，当$x_n=\dfrac{1}{n\pi}$时，分母$x^2\sin\dfrac{1}{x}$能取到零值. 正确解法应使用夹逼准则. 因为$\left|\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\right|\leqslant\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant x^2$，

故$0<\left|\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2}{x}\right|=|x|\to 0$，从而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}=0$.

4. 求极限$\lim\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}$时，要注意在自变量$x$的变化过程中$f(x)$是否趋于零. 若是，才有$\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

求极限：(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；　　(2)$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan x}$.

错误解法：(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$；(2)$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan x}=3$.

(1)中的自变量x趋向于无穷，这时，$\dfrac{\sin x}{x}$中的x趋向于无穷而不是零，故不能使用公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

(2)中的自变量x趋向于π，这时，$\sin 3x$不等价于$3x$，$\tan x$也不等价于x，故不能使用

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{\tan x}=1\times 3=3.$$

正确解法：