九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书
清华版·《运筹学》教材编写组编

教你用更多的自信面对未来！

一书两用
同步辅导+考研复习

Operations Research

运筹学 第四版

同步辅导及习题全解

主　编　边文思　焦艳芳

习题超全解
名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

运筹学（第四版）同步辅导及习题全解

主　编　边文思　焦艳芳

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是与清华大学出版社，运筹学教材编写组编写的《运筹学（第四版）》一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。

本书按教材内容安排全书结构，各章均包括重难点分析、知识点归纳、课后习题全解三部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习《运筹学（第四版）》课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可作为教师备课命题的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学（第四版）同步辅导及习题全解 / 边文思，焦艳芳主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2014.8
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-2275-6

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①边… ②焦… Ⅲ. ①运筹学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第155636号

策划编辑：杨庆川　　责任编辑：宋俊娥　　封面设计：李　佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 运筹学（第四版）同步辅导及习题全解
作　　者	主　编　边文思　焦艳芳
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） 　　　　sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　　格	170mm×227mm　16开本　17.5印张　382千字
版　　次	2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷
印　　数	0001—6000册
定　　价	23.80元

前　言

运筹学教材编写组编写的《运筹学(第四版)》以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《运筹学(第四版)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑《运筹学(第四版)》这门课程的特点,我们在内容上做了以下安排:

1. 重难点分析。每章前面均对本章的知识要点进行了整理。综合众多参考资料,归纳了本章几乎所有的考点,便于读者学习与复习。

2. 知识点归纳。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

3. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。并对教材的课后习题给出了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,书中难免有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2014 年 6 月

目录
contents

第 1 章

运筹学概论

知识点归纳

1. 运筹学是一门应用科学，至今没有统一且确切的定义。运筹学具有多学科交叉的特点，如综合运用经济学、心理学、物理学中的一些方法。运筹学强调最优决策，在实际生活中往往用次优、满意等概念代替最优。

2. 运筹学的工作步骤

(1)提出和形成问题

(2)建立模型

(3)求解，主要用数学方法

(4)解的检验

(5)解的控制

(6)解的实施

3. 运筹学在解决问题时，按研究对象不同构造不同的模型。模型是研究者对客观现象经过思维抽象后用文字、图表、符号、关系式以及实体模样描述所认识到的客观对象。模型有三种基本形式：①形象模型；②模拟模型；③符号或数学模型。

4. 构造模型是一种创造性劳动，成功的模型是科学和艺术的结晶，构模的方法和思路有以下五种：

(1)直接分析法

(2)类比法

(3)数据分析法

(4)试验分析法

(5)想定(构想)法

5. 模型的一般数学形式可用下列表达式描述：

目标的评价准则 $U=f(x_i, y_i, \xi_k)$

约束条件 $g(x_i, y_i, \xi_k)\geqslant 0$

式中：x_i——可控变量；

y_j——已知参数；

ξ_k——随机因素。

目标的评价准则一般要求达到最佳(最大或最小)、适中、满意等。准则可是单一的、也可多个。当 g 为等式时，即为平衡条件。当模型中无随机因素时，称它为确定性模型，否则为随机模型。当可控变量只取离散值时，称为离散模型，否则为连续模型。也可按使用的数学工具分为代数方程模型、微分方程模型、概率统计模型、逻辑模型等。

第 2 章

线性规划与单纯形法

重难点分析

1. 线性规划数学模型可以用来表示各种经济管理实际问题。
2. 图解法可以解决少于 3 个变量的线性规划问题。
3. 理解线性规划问题的标准形式并掌握转化方法。
4. 充分理解线性规划问题各种解的概念。
5. 理解线性规划其几何意义的基本概念和相关定理。
6. 理解单纯形法解线性规划问题的原理，掌握其解法和步骤。
7. 运用含有人工变量的大 M 法和两阶段法解线性规划问题。

知识点归纳

1. 线性规划问题的标准形式

(1)一般形式

目标函数：
$$\max(\text{或} \min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{2-1}$$

约束条件：
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i, & i = 1,2,\cdots,m \quad (2\text{-}2) \\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots n \quad (2\text{-}3) \end{cases}$$

其中 x_j 为决策变量，c_j 为价值系数，a_{ij} 为技术系数，b_i 为限额系数，式(2－3)也称为变量的非负约束条件。

(2) 标准形式

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, \qquad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

2. 数学模型化为标准型

(1) 若要求目标函数实现最小化，则

$$\min z = -\max z' (\text{令 } z' = -z)$$

使目标函数同标准型一致。

(2) 若约束方程为不等式,有两种情况:

若约束方程为"≤"不等式

$$\text{左端} + \text{松弛变量}(\geqslant 0) = \text{右端}$$

若约束方程为"≥"不等式

$$\text{左端} - \text{剩余变量}(\geqslant 0) = \text{右端}$$

(3) 若存在取值无约束的变量 $x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$,则在标准型中

$$x_k = x'_k - x''_k (\text{其中 } x_k = x', x''_k \geqslant 0)$$

3. 线性规划问题解的概念

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2-4}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \quad (2-5) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \quad (2-6) \end{cases}$$

(1) 可行解:满足约束条件(2－5)和(2－6)的解 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$。

(2) 最优解:使式(2－4)达到最大值的解。

(3) 基:设 A 为约束方程组(2－5)的 $m \times n$ 阶系数矩阵,设 $n > m$,其秩为 m,B 为矩阵 A 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵,则称 B 为线性规划问题的一个基。不失一般性,设

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$$

B 中每一个列向量 $P_j (j = 1,2,\cdots,m)$ 称为基向量,与基向量 P_j 对应的变量 x_j 称为基变量。除基变量以外的变量为非基变量。

(4) 基解:在约束方程组(2－5)中,令所有非基变量 $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$,此时方程组②有唯一解 $X_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$,将此解加上非基变量取0的值有 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 0 \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$,称 X 为线性规划问题的基本解。

(5) 基可行解:满足非负条件(2－6)的基解。

(6) 可行基:对应于基本可行解的基。

4. 图解法及线性规划问题的几何意义

(1) 图解法的步骤

图解法简单直观,求解线性规划问题时不需将数学模型化为标准型,可以直接在平面上作图,但此法只适用于二维问题,故有一定的局限性。

图解法的步骤:

① 建立平面直角坐标系;

② 图示约束条件,找出可行域;

③ 图示目标函数,即为一条直线;

④ 将目标函数直线沿其法线方向在可行域内向可行域边界平移,直至目标函数。

(2) 基本概念

① 凸集　设 k 为 n 维欧氏空间的一点集，若任意两点 $\boldsymbol{X}^{(1)} \in k$，$\boldsymbol{X}^{(2)} \in k$ 的连线上所有点 $\alpha\boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\alpha)\boldsymbol{X}^{(2)} \in K$，$(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$，则称 k 为凸集。

② 凸组合　设 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)} \cdots \boldsymbol{X}^{(k)}$ 是 n 维欧氏空间 E^k 的 k 个点，若存在 $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_k$，且 $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1, T = 1, 2, \cdots k$；$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$ 使 $\boldsymbol{X} = \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 \boldsymbol{X}^{(2)} + \cdots \mu_k \boldsymbol{X}^{(k)}$ 成立，则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{X}^{(k)}$ 的凸组合。

③ 顶点　设 k 为凸集，$\boldsymbol{X} \in k_i$ 若 $\boldsymbol{X}$ 不能用不同的两点 $\boldsymbol{X}^{(1)} \in k$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)} \in k$ 的线性组合表示为 $\boldsymbol{X} = \alpha\boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\alpha)\boldsymbol{X}^{(2)} (0 < \alpha < 1)$，则称 $\boldsymbol{X}$ 为 k 的一个顶点。

线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集，也可能为无界域，它们有有限个顶点，线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点，若线性规划有最优解，必可在某顶点上得到。

5. 单纯形法及其计算步骤

(1) 单纯形法是在高斯消去法的基础上，发展为求解变量数多于方程数并使目标函数值优化的方法。即从可行域中的某个基本可行解到另一个基本可行解，直到目标函数达到最优。

(2) 初始基可行解的确定

① 直接从系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中观察到存在一个初始可行基。

② 对所有约束条件是"$\leqslant$"形式的不等式，可利用化为标准型的方法，在每个约束条件左端加上一个松弛变量，这 m 个松弛变量就构成一个基变量，则对应的 m 个向量组成的单位矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就是线性规划问题的一个可行基。

③ 对所有约束条件是"$\geqslant$"形式的不等式以及等式约束情况，采用人造基的方法。即对不等式约束的左端减去一个非负的剩余变量后，再加上一个非负的人工变量；对于等式约束的左端再加上一个非负的人工变量。这些人工变量就成为基变量，则对应的列向量组成的单位矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就是线性规划问题的一个可行基。

(3) 最优性检验与解的判别

在得到初始基本可行解后，要检验一下是否为最优解。若是，则停止迭代，否则，则继续迭代，但每次迭代后都要检查一下当前解是否为最优解。有如下的判别准则：

① 最优解判别规则：若 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_m, 0, 0 \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本可行解，且对于一切 $j = m+1, m+2, \cdots, n$ 有 $\sigma_j \leqslant 0$，则 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为最优解，其中 σ_j 为检验数，$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{n} c_i a'_{ij}$。

② 无穷多最优解判别规则：若 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots b'_m, 0, 0 \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为一个基可行解，对于一切 $j = m+1, m+2, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k} = 0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

③ 无界解判别规则：若 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots b'_m, 0, 0 \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为一个基可行解，有一个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k} > 0$，并且对 $i = 1, 2, \cdots, m$，有 $a_{i,m+k} \leqslant 0$，那么该线性规划问题为无界解。

(4) 单纯形法的步骤及解法

① 找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯形表。

② 检验此基本可行解是否为最优解，即检验各非基变量 x_j 的检验数 σ_j，若所有 $\sigma_j \leqslant 0 (j = m+1, \cdots, n)$ 则已经得到最优解，计算停止；否则转下一步。

③ 在 $\sigma_j > 0 (j = m+1, \cdots, n)$ 中若有某个检验数 σ_k 对应的非基变量 x_k 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{rk})^{\mathrm{T}} \leqslant 0$，则此问题为无界解，停止计算；否则转下一步。

④ 根据 $\max(\sigma_j > 0) = \sigma_k$，确定非基变量 x_k 为换入变量；再根据 θ 法则：

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

确定基变量 x_l 为换出变量。

⑤ 实施旋转运算，即以 a_{lk} 为主元素进行旋转运算(亦即进行矩阵的行变换)，使 $\boldsymbol{P}_k$ 变换为第 l 行的元素为 1，其余的元素为 0；并将 $\boldsymbol{X}_B$ 列中的 x_l 换为 x_k，从而得新的单纯形表；重复 ② ～ ⑤，直到终止。

6. 人工变量法解线性规划问题

(1) 大 M 法

设线性规划问题的约束条件为 $\sum\limits_{j=1}^{n} P_j x_j = b$，分别给每个约束条件方程加人工变量 x_{n+1}，$\cdots x_{n+m}$，得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geqslant 0, x_{x+1}, \cdots, x_{n+m} \geqslant 0 \end{cases}$$

以 $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ 为基变量，并可得到一个 $m \times m$ 单位矩阵。令非变量 $x_1, \cdots x_n$ 为零，便可得到一个初始基可行解。

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = (0, 0, \cdots, 0_1, b_1, b_2, \cdots b_m)^T$$

要求人工变量对目标函数取值不受影响，假定人工变量在目标函数中的系数为 $-M$(M 为任意大的正数)，这样为使目标函数最大化必须把人工变量从基变量中换出。

(2) 两阶段法

第一阶段：不考虑是否存在基可行解；给原问题加入人工变量，构造仅含人工变量的目标函数并要求实现最小化。若目标函数为 0，则原问题存在基可行解，进行第二阶段。无解则停止计算。

第二阶段：将第一阶段计算得到的最终表，除去人工变量。将目标函数的系数换成原问题的目标函数系数，作为第二阶段的初始表。

课后习题全解

2.1 用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解？

(1) $\max z = x_1 + 3x_2$

$$s.t. \begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leqslant 50 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\min z = x_1 + 1.5x_2$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geqslant 3 \\ x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(3) $\max z = 2x_1 + 2x_2$

$$s.t. \begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ -0.5x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(4) $\max z = x_1 + x_2$

$$s.t. \begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant -3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解题过程 (1) 将约束条件画进坐标系，则其中阴影部分即该问题的可行域。任取一条斜率为 $-\frac{1}{3}$

的直线，将其沿与其垂直方向移动，即可找到问题的最大值。则可知图 2-2 中 A 点(2,4)为最优点，且最优值为 $\max z = 2 + 3 \times 4 = 14$。

故该问题有唯一最优解。

(2) 将约束条件画进坐标系，则其中阴影部分即该问题的可行域。任取一条斜率为 $-\frac{2}{3}$ 的直线，将其沿与其垂直方向移动，即可找到问题的最小值。则可知图 2－2 中 B 点($\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$)为最优点，且最优值为 $\min z = \frac{3}{2} + 1.5 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$。

故该问题有唯一最优解。

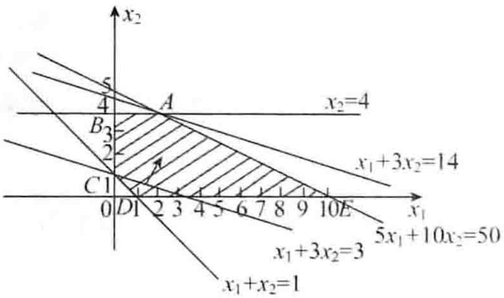

图 2-1

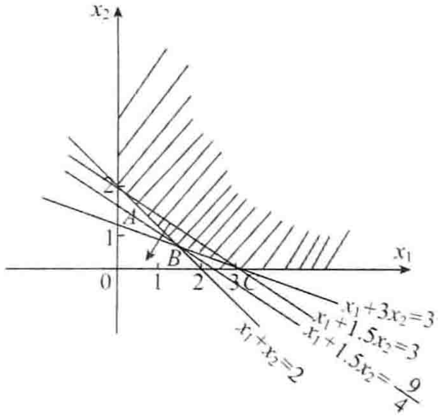

图 2-2

(3) 将约束条件画进坐标系，则其中阴影部分即该问题的可行域。任取一条斜率为 －1 的直线，将其沿与其垂直方向移动，则目标函数的值可以增加到无穷大，如图 2－3 所示。

故该问题有无界解。

(4) 将约束条件画进坐标系，则如图 2－4 所示，可行域为空集。

故该问题无可行解。

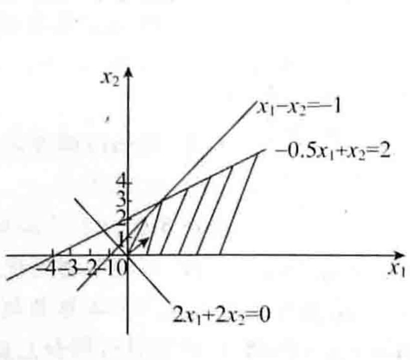

图 2-3

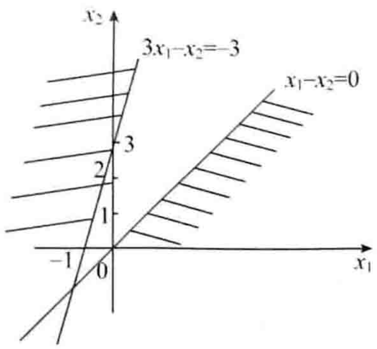

图 2-4

2.2 将下列线性规划问题变换成标准型，并列出初始单纯形表。

(1) $\min z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geqslant 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases}$$

(2) $\max s = z_k / p_k$

$$\begin{cases} z_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{ik} x_{ik} \\ \sum\limits_{k=1}^{m} (-x_{ik}) = -1, \quad i = 1, \cdots, n \\ x_{ik} \geqslant 0, \qquad i = 1, \cdots, n; k = 1, \cdots, m \end{cases}$$

解题过程 (1) 化为标准型为

$$\max z' = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5(x_5 - x_6) - Mx_9 - Mx_{10}$$

$$s.t.\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 - x_6 + x_{10} = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 + x_6 + x_7 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 - 2x_6 - x_8 + x_9 = 2 \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,3,5,6,7,8,9,10 \end{cases}$$

其中 M 为一任意大的正数，则初始单纯形表如表 2-1 所示。

表 2-1

c_j			3	-4	2	-5	5	0	0	$-M$	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
$-M$	x_{10}	2	-4	1	-2	1	-1	0	0	0	1	2
0	x_7	14	1	1	3	-1	1	1	0	0	0	14
$-M$	x_9	2	-2	[3]	-1	2	-2	0	-1	1	0	$\frac{2}{3}$
$-z'$		$4M$	$3-6M$	$4M-4$	$2-3M$	$3M-5$	$5-3M$	0	$-M$	0	0	

(2) 将原问题化为标准型，得

$$\max s = \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} x_{ik} - Mx_1 - Mx_2 - \cdots - Mx_n$$

$$\begin{cases} x_i + \sum\limits_{k=1}^{m} x_{ik} = 1, i = 1, 2 \cdots, n \\ x_{ik} \geqslant 0, x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。初始单纯形表见表 2-2。

表 2-2

c_j			$-M$	$-M$	$\cdots$	$-M$	$\frac{\alpha_{11}}{p_k}$	$\frac{\alpha_{12}}{p_k}$	$\cdots$	$\frac{\alpha_{1m}}{p_k}$	$\cdots$	$\frac{\alpha_{n1}}{p_k}$	$\frac{\alpha_{n2}}{p_k}$	$\cdots$	$\frac{\alpha_{nm}}{p_k}$	θ_i
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1m}	$\cdots$	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nm}	
$-M$	x_1	1	1	0	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	
$-M$	x_2	1	0	1	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
$-M$	x_n	1	0	0	$\cdots$	1	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	1	$\cdots$	1	
$-s$		nM	0	0	$\cdots$	0	$\frac{\alpha_{11}}{p_k}+M$	$\frac{\alpha_{12}}{p_k}+M$	$\cdots$	$\frac{\alpha_{1m}}{p_k}+M$	$\cdots$	$\frac{\alpha_{n1}}{p_k}+M$	$\frac{\alpha_{n2}}{p_k}+M$	$\cdots$	$\frac{\alpha_{nm}}{p_k}+M$	

2.3 在下面的线性规划问题中找出满足约束条件的所有基解，指出哪些是基可行解，并代入目标函数，确定哪一个是最优解。

(1) $\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-4x_4=8 \\ x_1-2x_2+6x_3-7x_4=-3 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

解题过程 (1) 在第二个约束条件两边同时乘以 -1，则第二个约束条件转化为：

$$-x_1+2x_2-6x_3+7x_4=3$$

从而，x_1 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，$x_2$ 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，$x_3$ 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}-1\\-6\end{bmatrix}$，$x_4$ 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_4=\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix}$。

① 因为 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 线性独立，故有

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=8+x_3+4x_4 \\ -x_1+2x_2=3+6x_3-7x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_3=x_4=0$，得 $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=(1,2,0,0)^{\mathrm{T}},z_1=2\times1+3\times2=8$$

② 因为 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_3$ 线性独立，故有

$$\begin{cases} 2x_1-x_3=8-3x_2+4x_4 \\ -x_1-6x_3=3-2x_2-7x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_4=0$，得 $\begin{cases} x_1=\dfrac{45}{13} \\ x_3=-\dfrac{14}{13} \end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(2)} = (\frac{45}{13}, 0, -\frac{14}{13}, 0)^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_3 = -\frac{14}{13} < 0$,所以该解是非可行解。

③ 因为 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_4$ 线性独立,故有

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_4 = 8 - 3x_2 + x_3 \\ -x_1 + 7x_4 = 3 - 2x_2 + 6x_3 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2 = x_3 = 0$,得$\begin{cases} x_1 = \frac{34}{5} \\ x_4 = \frac{7}{5} \end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(3)} = (\frac{34}{5}, 0, 0, \frac{7}{5})^{\mathrm{T}}, z_3 = 2 \times \frac{34}{5} + 7 \times \frac{7}{5} = \frac{117}{5}$$

④ 因为 $\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{P}_3$ 线性独立,故有

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 = 8 - 2x_1 + 4x_4 \\ 2x_2 - 6x_3 = 3 + x_1 - 7x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1 = x_4 = 0$,得$\begin{cases} x_2 = \frac{45}{16} \\ x_3 = \frac{7}{16} \end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(4)} = (0, \frac{45}{16}, \frac{7}{16}, 0)^{\mathrm{T}}, z_4 = 3 \times \frac{45}{16} + 4 \times \frac{7}{16} = \frac{163}{16}$$

⑤ 因为 $\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{P}_4$ 线性独立,故有

$$\begin{cases} 3x_2 - 4x_4 = 8 - 2x_1 + x_3 \\ 2x_2 + 7x_4 = 3 + x_1 + 6x_3 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1 = x_3 = 0$,得$\begin{cases} x_2 = \frac{68}{29} \\ x_4 = -\frac{7}{29} \end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(5)} = (0, \frac{68}{29}, 0, -\frac{7}{29})^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_4 = -\frac{7}{29} < 0$,所以该解是非可行解。

⑥ 因为 $\boldsymbol{P}_3$、$\boldsymbol{P}_4$ 线性独立,故有

$$\begin{cases} -x_3 - 4x_4 = 8 - 2x_1 - 3x_2 \\ -6x_3 + 7x_4 = 3 + x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_2=0$，得$\begin{cases} x_3=-\dfrac{68}{31} \\ x_4=-\dfrac{45}{31} \end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(6)}=(0,0,-\frac{68}{31},-\frac{45}{31})^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_3=-\dfrac{68}{31}<0, x_4=-\dfrac{45}{31}<0$，所以该解是非可行解。

比较 z_1, z_3, z_4 可知 $z_3=\dfrac{117}{5}$ 为最大值，故最优解为 $X^*=X^{(3)}=(\dfrac{34}{5},0,0,\dfrac{7}{5})^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值为 $z^*=\dfrac{117}{5}$。

(2) 易知，x_1 的系数列向量 $P_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$x_2$ 的系数列向量 $P_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$x_3$ 的系数列向量 $P_3=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$，$x_4$ 的系数列向量 $P_4=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$。

① 因为 P_1、P_2 线性独立，故有

$$\begin{cases} x_1+2x_2=7-3x_3-4x_4 \\ 2x_1+x_2=3-x_3-2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_3=x_4=0$，得$\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{3} \\ x_2=\dfrac{11}{3} \end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(1)}=(-\frac{1}{3},\frac{11}{3},0,0)^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_1=-\dfrac{1}{3}<0$，所以该解是非可行解。

② 因为 P_1、P_3 线性独立，故有

$$\begin{cases} x_1+3x_3=7-2x_2-4x_4 \\ 2x_1+x_3=3-x_2-2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_4=0$ 得$\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{5} \\ x_3=\dfrac{11}{5} \end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(2)}=(\frac{2}{5},0,\frac{11}{5},0)^{\mathrm{T}}, z_2=5\times\frac{2}{5}+3\times\frac{11}{5}=\frac{43}{5}。$$

③ 因为 P_1、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases} x_1+4x_4=7-2x_2-3x_3 \\ 2x_1+2x_4=3-x_2-x_3 \end{cases}$$