普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理数学基础

孙毅　王国铭　编著

微积分（下册）

（第2版）

清华大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划

经济管理数学基础

孙毅　王国铭　编著

微积分（下册）

（第2版）

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书分上、下册. 上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分和定积分及其应用. 下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程和差分方程.

与本书(上、下册) 配套的有习题课教程、电子教案, 教师用书. 该套教材吸取了现行教学改革中一些成功的举措, 总结了作者在教学科研方面的研究成果, 注重数学在经济管理领域中的应用, 选用大量有关的例题与习题; 具有结构严谨、逻辑清楚、循序渐进、结合实际等特点. 可作为高等学校经济、管理、金融及相关专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下册/孙毅, 王国铭编著. --2 版. --北京: 清华大学出版社, 2014
(经济管理数学基础)
ISBN 978-7-302-34625-8

I. ①微… II. ①孙… ②王… III. ①微积分-高等学校-教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 290839 号

责任编辑: 佟丽霞
封面设计: 傅瑞学
责任校对: 刘玉霞
责任印制: 李红英

出版发行: 清华大学出版社
网　址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　址: 北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　编**: 100084
社 总 机: 010-62770175　**邮　购**: 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者: 三河市君旺印装厂
装 订 者: 三河市新茂装订有限公司
经　销: 全国新华书店
开　本: 170mm×230mm　**印　张**: 17.25　**字　数**: 305 千字
版　次: 2006 年 2 月第 1 版　2014 年 5 月第 2版　**印　次**: 2014 年 5 月第1 次印刷
印　数: 1～3500
定　价: 29.00 元

产品编号: 053438-01

“经济管理数学基础”系列教材总序

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学. 在过去的一个世纪中，数学理论与应用得到了极大的发展，使得数学所研究的两个重要内容，即“数量关系”和“空间形式”具备了更丰富的内涵和更广泛的外延. 数学科学在发展其严谨的逻辑性的同时，作为一门工具，在几乎所有的学科中大展身手，产生了前所未有的推动力.

在经济活动和社会活动中，随时都会产生数量关系和相互作用. 数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系，这种数量关系概括地表述为一种数学结构，这种结构通常称为数学模型，建立这种数学结构的过程称为数学建模. 数学模型按类型可以分为三类：第一类为确定性模型，即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性，对象之间的联系是必然的. 微积分、线性代数等是建立确定性模型的基本数学工具. 第二类为随机性模型，即模型所反映的实际问题具有偶然性或随机性. 概率论、数理统计和随机过程是建立随机性模型的基本数学方法. 第三类为模糊性模型，即模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性. 模糊数学理论是建立模糊性模型的基本数学手段.

高等学校经济管理类专业本科生的公共数学基础课程一般包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程，它们都是必修的重要基础理论课. 通过学习，学生可以掌握这些课程的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机量方面的数学基础. 在学习过程中，通过数学知识与其经济应用的有机结合，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力，并逐步培养学生的探索精神和创新能力.

“经济管理数学基础”系列教材是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，包括《微积分》（上、下册）、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及与其配套的习题课教程. 为了方便一线教师教学，该系列教材又增加了与主教材配套的电子教案和教师用书（习题解答）. 该系列教材内容涵盖了教育部大学数学教学指导委员会制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，汲取了国内外同类教材的精华，特别是借鉴了近几年我国一批“面向21世纪课程”教材和国家“十五”规划教材的成果，同时也凝聚了作者们多年来在大学数学教

学方面积累的经验. 本系列教材编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性，注意体现时代的特点，本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一. 注重理论联系实际，通过实例展示数学方法在经济管理领域的成功应用. 把数学实验内容与习题课相结合，突出数学的应用和数学建模的思想方法. 借助电子和网络手段提供经济学、管理学的背景资源和应用资源，提高学生的数学人文素养，使数学思维延伸至一般思维. 总之，本系列教材体现了现代数学思想与方法，建立了后续数学方法的接口，考虑了专业需求和学生动手能力的培养，并使教材的系统性和文字简洁性相统一.

在教材体系与内容编排上，认真考虑作为经济类、管理类和人文类各专业以及相关的人文社会科学专业不同学时的授课对象的需求，对数学要求较高的专业可讲授教材的全部内容，其他专业可以根据实际需要选择适当的章节讲授. “经济管理数学基础”系列教材中主教材在每节后面都配备了习题，有的主教材在每章后面还配备了总习题，其中（A）题是体现教学基本要求的习题，（B）题是对基本内容提升、扩展以及综合运用性质的习题. 书末给出了习题的参考答案，供读者参考. 该系列教材中的习题课教程旨在帮助学生全面、系统、深刻地理解、消化主教材的主要内容，使学生能够巩固、加深、提高和拓宽所学知识，并综合运用所学知识分析、处理和解决经济管理及相关领域中的某些数学应用的问题. 每章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还列出了常见错误类型分析，最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示.

自本教材问世以来，许多同行提出了许多宝贵的意见，结合我们在吉林大学的教学实践经验，以及近年来大学数学课程教学改革的成果，我们对本系列教材进行了修订、完善. 本次修订的指导思想是：①突出数学理论方法的系统性和连贯性；②加强经济管理的实际应用的引入和数学建模解决方法的讲述；③文字力图简洁明了，删繁就简；④增加了实际应用例题和习题.

在本系列教材的编写过程中，吉林大学教务处、吉林大学数学学院给予了大力支持，吉林大学公共数学教学与研究中心吴晓俐女士承担了本系列教材修订的编务工作. 清华大学出版社的领导和编辑们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心的指导和大力支持. 在此一并致谢.

“经济管理数学基础”系列教材编委会

2013 年 8 月

前　言

经济管理数学基础《微积分（下册）》自 2006 年 2 月出版以来，受到了同行专家和广大读者的广泛关注，对本教材提出了许多宝贵的意见，针对上述意见，结合我们在吉林大学的教学实践和教学改革以及大学数学教育发展的需要，我们对本教材进行了修订和完善.

根据本次修订的指导思想，立足于经济管理学科的需要，我们淡化了一些较繁琐的理论推导，增加了一些常用的数学公式，重点修订了行文体例和文字叙述，增加了实际应用例题和习题.

本书的第 1、2、3 章由王国铭修订，第 4、5、6 章由孙毅修订，全书由孙毅统稿. 在本教材的修订过程中，得到了吉林大学教务处、吉林大学数学学院和清华大学出版社的大力支持和帮助，吴晓俐女士承担了本教材修订的编务工作，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中的错误和不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2014 年 3 月

第 1 版前言

本书是依据经济类、管理类、人文类各专业对微积分课程的教学要求而编写的. 在本书的编写过程中，按循序渐进的原则，深入浅出. 从典型的自然科学与经济分析中的实际例子出发，从直观的几何现象出发，引出微积分的基本概念，如极限、导数及积分等. 再从理论上进行论证，得到一些有用的方法和结果，然后再利用它们解决更多的自然科学和经济分析中的实际问题. 这样从特殊到一般，再从一般到特殊，从具体到抽象，再从抽象到具体，将微积分和经济分析的有关内容有机地结合起来，为学生将来利用数学分析的方法讨论更深入的经济问题打下了良好的基础.

在教材体系结构及讲解方法上我们进行了必要的调整，适当淡化运算上的一些技巧，降低了一元函数的极限与连续的理论要求，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明. 在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解接受，并且使学生在知识、能力、素质方面有较大提高. 书中将数学素质的培养有机地融合于知识讲解中，突出数学思想的介绍，突出数学方法的应用. 本书拓广了经济应用实例的范围，让学生更多地见识应用数学知识、数学方法解决经济管理类问题的实例，增加他们的应用意识和能力.

本书内容包向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程和差分方程. 共分 6 章，第 1、2 章由赵建华编写，第 3 章由韩燕编写，第 4、5 章由孙毅编写，第 6 章由王国铭编写，全书由李辉来统稿. 青年教师孙鹏、朱本喜、杨柳、毛书欣及研究生姜政毅完成了本书的排版制图的全部工作. 清华大学韩云瑞教授审阅了全书.

由于水平有限，书中的错误和不妥之处恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

作　者

2005 年 10 月

清华大学出版社　教学资源支持

尊敬的老师：您好！

为了您更好地开展教学工作，提高教学质量，我们将通过两种方式为您提供与教材配套的教学资源。

方式一：请您登录清华大学出版社教师服务网：http://www.wqbook.com/teacher 清华大学教师服务网是隶属于清华大学出版社数字出版网“文泉书局”的频道之一，将为各位老师提供高效便捷的免费索取样书、电子课件、申报教材选题意向、清华社各学科教材展示、试读等服务。

方式二：请您完整填写如下教辅申请表，加盖公章后传真给我们，我们将会为您提供与教材配套的教学资源。

主教材名				
作者			ISBN	
申请教辅资料				
申请使用单位	（学校）　　（院系） (课程名称) （学期）采用本教材　　册			
主讲教师	姓名		电话	
	通信地址		邮编	
	e-mail		MSN/QQ	
声明	保证本材料只用于我校相关课程教学，不用本材料进行商业活动			
您对本书的意见		系/院主任：________（签字） （系 / 院办公室章） ____年____月____日		

编辑联系方式：　100084　北京市海淀区双清路学研大厦

清华大学出版社理工分社　　佟丽霞

电话：010-62770175-4156　　邮箱：tonglx@tup.tsinghua.edu.cn

目　　录

第 1 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何通过坐标法把空间上的点与有序数组对应起来, 把空间上的图形和方程对应起来, 从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何知识对学习多元函数微积分是不可缺少的.

本章内容包括：向量代数、平面和直线、曲面和曲线等.

1.1　向量及其运算

1.1.1　空间直角坐标系

在空间取定一点 O, 以 O 为原点作三条有相同的长度单位并且两两垂直的数轴, 依次记作 x 轴、y 轴和 z 轴, 统称为**坐标轴**. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, z 轴则在铅直线上. 它们的正方向符合右手规则, 即以右手握住 z 轴, 当四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时, 竖起的拇指的指向为 z 轴的正向 (图 1.1). 这样就建立了空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ **直角坐标系**, 点 O 称为该坐标系的**原点**.

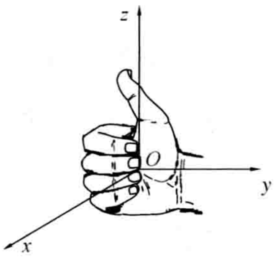

图　1.1

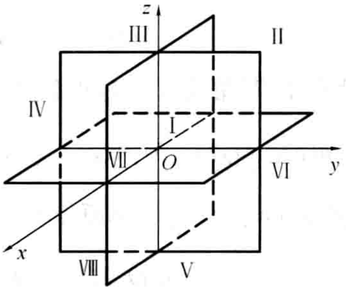

图　1.2

三条坐标轴中的每两条可以确定一个平面, 称为**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 Oxy 平面, 另外两个坐标面称为 Oyz 面和 Ozx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分, 称为八个卦限. 如图 1.2 所示, 在 Oxy 面上方并且在 Oyz 面前方、Ozx 面右方的那个卦限称为第 I 卦限, 在 Oxy 面上方按逆时针方向依次为 I 、II 、III、IV卦限, 在 Oxy 面下方与 I 、II 、III、IV卦限相对的依次是V 、VI、VII、VIII卦限 (图 1.2).

设 M 是空间一点, 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴, y 轴和 z 轴并与这三个坐标轴分别交于点 P, Q 和 R(图 1.3). 设点 P, Q 和 R 在三个坐标轴上的坐标分别为 x, y 和 z, 这样, 空间的一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 x, y, z. 反过来, 对给定的有序数组 x, y, z, 在三个坐标轴上分别取坐标为 x, y, z 的点 P, Q, R, 再过点 P, Q, R 作平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴, 这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x, y, z 所惟一确定的点. 这样, 空间的点 M 与有序数组 x, y, z 之间就建立了一一对应的关系, 称 x, y, z 为点 M 的**坐标**, 依次称 x, y, z 为点 M 的**横坐标**, **纵坐标**和**竖坐标**, 并把点 M 记作 $M(x,y,z)$.

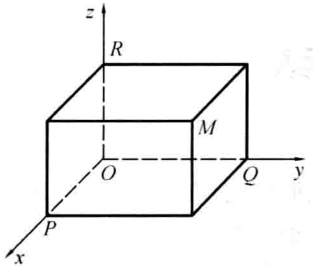

图 1.3

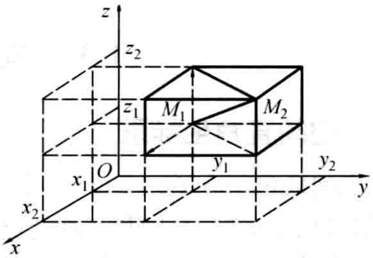

图 1.4

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点, 过 M_1, M_2 分别作垂直于三个坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 1.4), 各棱的长度分别为

$$|x_2-x_1|,\ |y_2-y_1|,\ |z_2-z_1|.$$

根据勾股定理, 对角线 M_1M_2 的长度, 即空间两点 M_1, M_2 的距离为

$$d(M_1,M_2)=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地, 点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d(O,M)=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1.1.1 *在 z 轴上求一点 M, 使该点与点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 的距离相等.*

解 因为所求的点在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0,0,z)$, 由题意有 $|MA|=|MB|$, 即

$$\sqrt{(-4)^2+1^2+(7-z)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}.$$

两边平方, 解得 $z=\dfrac{14}{9}$. 于是所求点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

1.1.2 向量的概念

在研究实际问题时, 我们通常遇到两种不同类型的量, 一类是只有大小的量, 例如时间、温度、质量、体积等, 这种量称为**数量**或标量; 另一类是既有大小又有方向的量, 例如力、速度、加速度等, 这种量称为**向量**或矢量.

向量通常用黑体字母来表示, 如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}$ 等, 也可以用上方加箭头的字母来表示, 如 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \vec{i}$ 等. 数学上往往用一个有方向的线段来表示向量, 如果线段的起点是 M_0, 终点是 M, 那么这个有向线段记为 $\overrightarrow{M_0M}$, 它表示一个向量, 线段的长度表示向量的大小, 线段的方向表示向量的方向. 为以后讨论问题的方便, 我们对向量和表示它的有向线段不加区分.

向量的大小叫作向量的**模**, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$. 模为零的向量叫作**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$, 规定零向量的方向是任意的. 模为 1 的向量叫作**单位向量**.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等, 方向相同, 则称这两个向量**相等**, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这说明, 如果两个向量的大小与方向是相同的, 那么不论它们的起点是否相同, 我们就认为它们是同一向量, 这样理解的向量称为**自由向量**, 本书所讨论的向量都是自由向量.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向或者反方向, 称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**, 记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的, 故可认为零向量与任何向量都平行.

在直角坐标系中, 以坐标原点 O 为起点, 以点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于点 O 的**向径**, 常用 $\boldsymbol{r}$ 表示, 即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 空间的每一点都对应着一个向径 $\overrightarrow{OM}$, 反过来, 每个向径 $\overrightarrow{OM}$ 都和它的终点 M 相对应.

1.1.3 向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 M, 作 $\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{b}$, 以 MA, MB 为邻边的平行四边形 $MACB$ 的对角线为 MC(图 1.5), 则向量 $\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

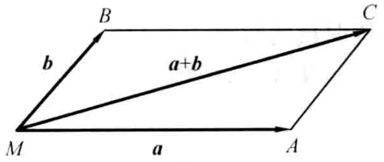

图 1.5

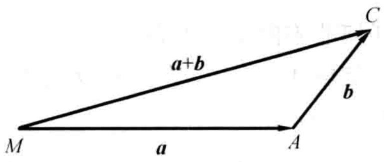

图 1.6

这个定义向量加法的规则称为向量加法的**平行四边形法则**. 这个法则没有对两个平行向量的加法加以定义, 为此我们再给出一个蕴含了平行四边形法则的加法定义: