

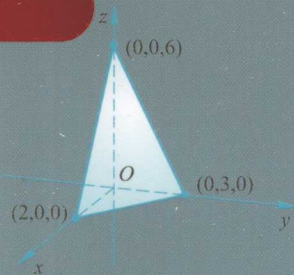
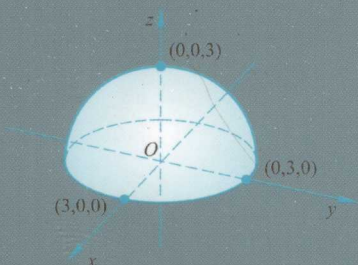


自主创新
方法先行

高等数学

(第二分册)

主 编 李寿贵 李德宜
副主编 刘云冰 肖自碧 张传洲 肖 俊



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

014037988

013-43
325
V2



自主创新
方法先行

高等数学

(第二分册)

主 编 李寿贵 李德宜
副主编 刘云冰 肖自碧 张传洲 肖 俊

Gaodeng Shuxue



北航

C1723674

013-43
325
V2



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”(项目编号:2009IM010400)子课题“科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践”的研究成果。

本书是根据编者多年的教学实践,按照新形势下教材改革的精神,结合最新《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成的。在教材编写的过程中,注意将科学思维、科学方法贯穿于知识传授与能力培养的始终,注意与中学数学教学相衔接,注重现代科学技术的灵活体现,注重理论与实践的有机结合,力求做到全书结构严谨、逻辑清晰、叙述详尽、通俗易懂、便于自学,力求做到有利于培养学生的创新精神和能力,有利于加强学生的数学素养,有利于提高学生的实践动手能力。

全书共分为三个分册。本书是第二分册,其主要内容为:无穷级数、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分。

本书适合普通高等院校理工类各专业的学生作为教材使用,也可作为其他各类高校师生和相关科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.第2分册/李寿贵,李德宜主编.--北京:高等教育出版社,2014.2

ISBN 978-7-04-030287-5

I. ①高… II. ①李… ②李… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 017203 号

策划编辑 贾翠萍

责任编辑 贾翠萍

封面设计 于 涛

版式设计 童 丹

插图绘制 尹文君

责任校对 刘 莉

责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 唐山市润丰印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 15.75
字 数 290 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
版 次 2014 年 2 月第 1 版
印 次 2014 年 2 月第 1 次印刷
定 价 23.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 30287-00

目 录

第六章 无穷级数	1
第一节 常数项级数	1
一、无穷级数的概念与性质(2) 二、正项级数的审敛法(5)	
三、交错级数及其审敛法(10) 四、绝对收敛与条件收敛(11)	
习题 6-1(13)	
第二节 幂级数	15
一、函数项级数的概念(15) 二、幂级数及其收敛性(16)	
三、幂级数的运算(20)	
习题 6-2(22)	
第三节 函数展开成幂级数及其应用	23
一、函数的幂级数展开(23) 二、函数展开成幂级数的应用(30)	
习题 6-3(33)	
第四节 傅里叶级数	34
一、问题的提出(35) 二、三角级数、三角函数系的正交性(36)	
三、函数展开成傅里叶级数(37)	
习题 6-4(42)	
第五节 周期函数的傅里叶级数	43
一、奇函数、偶函数的傅里叶级数(43)	
二、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数(46)	
习题 6-5(49)	
总习题六	51
第七章 空间解析几何与向量代数	55
第一节 向量及其线性运算	55
一、向量的概念(55) 二、空间直角坐标系(56)	
三、向量的坐标(57) 四、空间两点的距离(58)	
五、向量的线性运算(59) 六、向量的模、方向角、投影(61)	

习题 7-1(63)	
第二节 数量积 向量积 * 混合积	65
一、两向量的数量积(65) 二、两向量的向量积(67)	
* 三、向量的混合积(68)	
习题 7-2(69)	
第三节 曲面及其方程	71
一、曲面方程的概念(71) 二、柱面(72)	
三、旋转曲面(73) 四、二次曲面(74)	
习题 7-3(78)	
第四节 空间曲线及其方程	79
一、空间曲线的一般式方程(79) 二、空间曲线的参数方程(80)	
三、空间曲线在坐标面上的投影(81)	
习题 7-4(82)	
第五节 平面及其方程	83
一、平面的点法式方程(83) 二、平面的一般方程(84)	
三、两平面的夹角(85) 四、点到平面的距离(86)	
习题 7-5(87)	
第六节 直线及其方程	87
一、空间直线的一般方程(87)	
二、直线的参数方程和点向式方程(88)	
三、空间两直线的夹角及两直线的位置关系(89)	
四、直线与平面的夹角及空间直线与平面的位置关系(90)	
五、点到直线的距离(91)	
习题 7-6(91)	
总习题七	93
第八章 多元函数微分学及其应用	95
第一节 多元函数的概念、极限和连续性	95
一、多元函数的概念(95) 二、多元函数的极限(99)	
三、多元函数的连续性(102)	
习题 8-1(103)	
第二节 偏导数	105
一、偏导数的概念(105) 二、偏导数的求法(107)	
三、高阶偏导数(109)	

习题 8-2(111)	112
第三节 全微分	112
一、全微分的概念(112)	112
二、全微分在近似计算中的应用(115)	115
习题 8-3(116)	117
第四节 多元复合函数的求导法则	117
一、多元复合函数求导的链式法则(117)	117
二、全微分形式不变性(121)	121
习题 8-4(122)	124
第五节 隐函数的求导公式	124
一、一个方程的情形(124)	124
二、方程组的情形(126)	126
习题 8-5(128)	128
第六节 多元函数微分学的几何应用	128
一、空间曲线的切线与法平面(128)	128
二、曲面的切平面与法线(131)	131
习题 8-6(133)	134
第七节 方向导数与梯度	134
一、方向导数(134)	134
二、梯度(137)	137
三、方向导数和梯度向量的关系(138)	138
四、梯度的几何意义(140)	140
习题 8-7(141)	141
第八节 多元函数的极值和最值	141
一、多元函数的极值(142)	142
二、最大值和最小值问题(144)	144
三、多元函数的条件极值(146)	146
习题 8-8(149)	149
总习题八	149
第九章 重积分	153
第一节 二重积分的概念与性质	153
一、二重积分的概念(153)	153
二、二重积分的性质(155)	155
习题 9-1(156)	158
第二节 二重积分的计算法	158
一、利用直角坐标计算二重积分(158)	158
二、利用极坐标计算二重积分(160)	160
习题 9-2(165)	166
第三节 三重积分	166

一、三重积分的概念(166)	二、三重积分的计算(166)	
习题 9-3(173)		
第四节 重积分的应用		174
一、曲面的面积(174)	二、平面薄片的重心(176)	
三、平面薄片的转动惯量(177)	四、引力(178)	
习题 9-4(179)		
总习题九		180
第十章 曲线积分与曲面积分		183
第一节 对弧长的曲线积分		183
一、对弧长的曲线积分的概念与性质(183)		
二、对弧长的曲线积分的计算法(185)		
习题 10-1(188)		
第二节 对坐标的曲线积分		188
一、对坐标的曲线积分的定义和性质(188)		
二、对坐标的曲线积分的计算(190)		
三、两类曲线积分的关系(192)		
习题 10-2(193)		
第三节 格林公式		194
一、格林公式(194)		
二、平面上曲线积分与路径无关的条件(198)		
三、二元函数的全微分求积(200)		
习题 10-3(202)		
第四节 对面积的曲面积分		203
一、对面积曲面积分的概念和性质(203)		
二、对面积曲面积分的计算法(204)		
习题 10-4(207)		
第五节 对坐标的曲面积分		208
一、对坐标曲面积分的概念与性质(208)		
二、对坐标曲面积分的计算法(210)		
三、两类曲面积分间的关系(212)		
习题 10-5(215)		
第六节 高斯公式		216
一、高斯公式(216)	二、通量与散度(218)	

习题 10-6(220)	
第七节 斯托克斯公式	220
一、斯托克斯公式(220) 二、环流量与旋度(222)	
习题 10-7(224)	
总习题十	225
部分习题答案与提示	228
参考文献	243

第六章

无穷级数

无穷级数是高等数学中一个重要的概念,它对于研究函数的性质以及进行数值计算尤为重要.本章将主要解决如下三个问题:(1)研究常数项级数的敛散性,包括正项级数和交错级数,这是研究函数项级数的基础;(2)研究幂级数的收敛域与求和问题;(3)将一些复杂的函数展开成幂级数或三角级数,这么做的目的就是可以通过幂级数或三角级数这些简单函数来研究复杂函数的性质、求解微分方程以及进行数值计算等.

第一节 常数项级数

我们先用一些笔墨讲一个著名的故事——阿基里斯(Achilles)悖论(来源于古希腊数学家芝诺(Zeno)提出的一系列关于运动的不可分性的哲学悖论).芝诺提出让乌龟在阿基里斯前面 1 000 m 处,并且假定阿基里斯的速度是乌龟的 10 倍.当比赛开始后,若阿基里斯跑了 1 000 m,设所用的时间为 t ,此时乌龟便领先他 100 m;当阿基里斯跑完下一个 100 m 时,他所用的时间为 $\frac{t}{10}$,乌龟仍然前于他 10 m;当阿基里斯跑完下一个 10 m 时,他所用的时间为 $\frac{t}{100}$,乌龟仍然前于他 1 m.这样下去,阿基里斯永远也追不上乌龟.

事实上,根据中学所学过的无穷等比递缩数列求和的知识,我们可以很容易列出下面的式子.在整个追赶的过程中,阿基里斯走过的路程为

$$s = 1\,000 + 100 + 10 + 1 + 0.1 + 0.01 + \cdots,$$

所耗费的时间为

$$T = t(1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots).$$

利用无穷等比数列的求和公式可以算得

$$s = \frac{10\,000}{9}, T = \frac{10}{9}t.$$

而这个问题之所以让人们产生疑惑,是因为大家被 $1\,000 + 100 + 10 + 1 + 0.1 + 0.01 + \cdots$ 以及 $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$ 这种无穷求和的“假象”所迷惑了.这

种无穷求和有时候是一个有限的数,但是有些时候,结果是不存在的.

称由数列 $\{x_n\}$ 构成的表达式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

为无穷级数,简称级数.这个关于级数的定义只是形式上的一个定义,下面将具体研究这无穷多个量相加的含义.

一、无穷级数的概念与性质

1. 部分和与无穷级数

对数列 $\{u_n\}$ 定义部分和 $s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, s_3 = u_1 + u_2 + u_3$,一般地, $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$ 称为前 n 项部分和,这样得到部分和数列 $\{s_n\}$,数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 可能存在,也可能不存在,如果存在,就称这个极限值为无穷级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

的和.

下面利用部分和数列建立级数收敛和发散的定义.

定义 1 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ 的前 n 项和为

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i,$$

称 s_n 为级数的前 n 项部分和.如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ 存在,则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,且 s 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和;如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在,则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当级数收敛时,其部分和 s_n 是级数和 s 的近似值,它们之间的差值

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$$

叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余项. $|r_n|$ 为用近似值 s_n 代替和 s 所产生的误差,显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

例 1 判定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ 的敛散性.

解 因为 $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 所以级数的前 n 项部分和

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$.

例 2 判定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 的敛散性.

解 由于级数的前 n 项部分和

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n [\sqrt{i+1} - \sqrt{i}] \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{1}, \end{aligned}$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) = +\infty$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 是发散的.

例 3 讨论等比级数(也称几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性.

解 由于 $u_n = aq^{n-1}$, 所以级数的前 n 项部分和为

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}.$$

(1) 当 $q \neq 1$ 时, $s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a-aq^n}{1-q}$;

当 $|q| < 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, 故等比级数收敛, 且收敛于 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-q^n}{1-q}$ 不存在, 故等比级数发散.

(2) 当 $q=1$ 时, 级数为 $a+a+a+\cdots+a+\cdots$, 而 $s_n = na \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 故等比级数发散.

(3) 当 $q=-1$ 时, 级数变为 $a-a+a-a+\cdots$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在, 故等比级数发散.

综上所述, 当 $|q| < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛且收敛于 $\frac{a}{1-q}$; 当 $|q| \geq 1$ 时, 级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散.

2. 收敛级数的基本性质

根据无穷级数收敛、发散的定义,可以得到收敛级数的几个基本性质.

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛,并且有 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n$; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,当 $k \neq 0$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也发散.

性质 2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s 与 σ ,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛,且收敛于 $s \pm \sigma$.

性质 3 在一个级数中任意去掉有限项、加上有限项或改变有限项的值,不会影响级数的敛散性.

性质 4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,对这个级数的项任意加括号后所得的级数仍然收敛,其和不变.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和为 s_n ,加括号之后的级数部分和数列记为 $\{A_n\}$,则有

$$A_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1} = s_{n_1},$$

$$A_2 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) = s_{n_2},$$

.....

$$A_k = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = s_{n_k},$$

显然 $k \leq n_k$, 数列 $\{A_n\}$ 是数列 $\{s_n\}$ 的一个子列. 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

即加括号后的级数收敛且其和不变.

性质 5 (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和为 s_n , 且 $s_n \rightarrow s (n \rightarrow \infty)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

推论 1 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 4 判定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7^n} + \frac{3}{4^n} \right)$ 的敛散性.

解 由例 3 知, 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ 均收敛. 又由性质 1 知, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$ 也收敛. 再由性质 2 知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7^n} + \frac{3}{4^n} \right)$ 收敛.

例 5 判定调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 记调和级数前 n 项部分和为 s_n , 则

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 1 + \frac{2}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2},$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2},$$

类似地, $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$, 由此可以得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n}$ 不存在, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在, 调和级数发散.

从这个例子可以看出级数的一般项收敛到零并不是级数收敛的充分条件.

二、正项级数的审敛法

常数项级数中, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 满足 $u_n \geq 0 (n=1, 2, \cdots)$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数. 正项级数是比较简单且重要的级数, 在研究一般级数时常常要用到正项级数的有关结果. 所以我们首先讨论有关正项级数的审敛法.

定理 1 (有界审敛法) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

证 因为 $u_n \geq 0$, 故 $s_n = s_{n-1} + u_n \geq s_{n-1}$, 即部分和数列 $\{s_n\}$ 单调递增. 由单调收敛准则知, 单调递增且有上界的数列一定存在极限, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 存在等价于数列 $\{s_n\}$ 有界, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于数列 $\{s_n\}$ 有界.

定理 2(比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数, 且 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$, 则

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

证 (1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于 σ , 因 $u_n \leq v_n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 s_n 满足

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq \sigma,$$

由定理 1 可知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 反证法, 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则由(1)中结论知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 这与条件相矛盾, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

例 6 判定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性.

解 因为 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$,

故令 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, v_n = \frac{1}{n+1}$,

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 故由定理 2 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

由收敛级数的性质 1 和上面的定理 2, 我们得到下面的推论.

推论 2 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 且存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $u_n \leq kv_n (k > 0)$ 成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 且当 $n > N$ 时, 有 $u_n \geq kv_n (k > 0)$ 成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

考虑到不等式的放缩有些时候并不是很容易操作, 下面介绍比较审敛法的极限形式, 应用上更加方便.

定理 3(比较审敛法的极限形式) 设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $l=0$ 时, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 时, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散.

下面介绍正项级数中一类重要且常用的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的敛散性, 这个级数称为 p 级数, 其中常数 $p > 0$.

当 $p \leq 1$ 时, 因为 $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由定理 2 知 p 级数发散.

当 $p > 1$ 时, 设 $n-1 \leq x \leq n$, 则 $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{x^p}$, 所以有 $\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx$,

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的前 n 项和 $s_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^p} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx < 1 + \frac{1}{p-1}$, 故原级数收敛.

利用 p 级数的敛散性, 可以判定下面级数的敛散性.

例 7 判定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由定理 3 知级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛.

例 8 判定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由定理 3 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

收敛.

例 9 判定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n - 1}{n^4 + n^2}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n - 1}{n^4 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n - 1}{n^2 + 1} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由定理 3

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n - 1}{n^4 + n^2}$ 收敛.

比较审敛法的关键是找到一个恰当的级数与之相比, 从而判定敛散性. 如何找到相比较的对象是读者需要在练习中总结的.

定理 4 (比值审敛法, 或称达朗贝尔 (d'Alembert) 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

证 (1) 证明的思路是将级数与一个收敛的无穷等比级数比较.

由于 $\rho < 1$, 可以找到一个正数 ε , 使得 $\rho + \varepsilon = r < 1$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 对于正数 ε , $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \varepsilon$, 即

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + \rho = r,$$

所以

$$u_{n+1} < ru_n,$$

因此, 我们得到下面的式子

$$\begin{aligned} u_{N+2} &< ru_{N+1}, \\ u_{N+3} &< ru_{N+2} < r^2 u_{N+1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

因此有

$$u_{N+k+1} < ru_{N+k} < r^k u_{N+1}.$$

这样, 得到了一个新的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r^k u_{N+1} = u_{N+1} \sum_{k=1}^{\infty} r^k$, 由于 $0 < r < 1$, 所以无穷等比

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r^k u_{N+1}$ 收敛, 由定理 2, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{N+k+1}$ 收敛, 再根据收敛级数的性质 3,

增加了 $u_1, u_2, \dots, u_{N+1}$ 项的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$ 时, 证明级数发散的关键是证明级数的通项 u_n 不趋于零.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, 一定存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 即 $u_{n+1} > u_n$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 举例说明, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 都满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho = 1$, 但前者发散, 后者收敛. 故敛散性不定.

定理 5 (根值审敛法, 或称柯西判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

例 10 判定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ 的敛散性.

解 记 $u_n = \frac{n^3}{3^n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3},$$

由比值审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ 收敛.

例 11 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 的敛散性.

解 记 $u_n = \frac{n^n}{n!}$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1,$$