权威　实用　经典

2015
人大考研

2015年

考研数学
最新精选600题（经济类）

主编／黄先开　曹显兵

- 权威名家精选配套习题，复习全程使用
- 全书分三部分，精编精选典型习题，难度适中，数量适当
- 解答详细精准，循序渐进，提供多种解法

中国人民大学出版社

2015年

考研数学

最新精选600题

主编／黄先开　曹显兵

图书在版编目（CIP）数据

2015年考研数学最新精选600题：经济类/黄先开，曹显兵主编．—北京：中国人民大学出版社，2014.2

ISBN 978-7-300-18983-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①黄… ②曹… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第033693号

2015年考研数学最新精选600题（经济类）

主　编　黄先开　曹显兵

2015 Nian Kaoyan Shuxue Zuixin Jingxuan 600 Ti（Jingjilei）

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国1考网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京七色印务有限公司		
规　格	185 mm×260 mm　16开本	版　次	2014年3月第1版
印　张	20.25	印　次	2014年3月第1次印刷
字　数	464 000	定　价	38.00元

第一部分

PART ONE

微积分

原书缺页

4. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有(　　).

(A) $f(-x)>g(-x)$　　(B) $f'(x)<g'(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$　　(D) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3x^{-n}}{x^n+x^{-n}}\sin\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 有(　　).

(A) 两个第一类间断点

(B) 三个第一类间断点

(C) 两个第一类间断点和一个第二类间断点

(D) 一个第一类间断点和一个第二类间断点

三 解答题

1. 讨论函数 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界性.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，以 T 为周期，令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 求证：

(1) $F(x)=kx+\varphi(x)$，其中 k 为某常数，$\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x)$ 具有连续导数，且满足 $f(x)=x+\int_0^x tf'(x-t)\mathrm{d}t$. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^4}-1}$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}$.

6. 已知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$，求：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2\ln\cos x}\int_0^{x^2}e^t f(1+e^{x^2}-e^t)\mathrm{d}t.$$

7. 设 $f(x)=nx(1-x)^n\ (n=1,2,\cdots)$，$M_n$ 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值，求 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n$.

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right]$.

9. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导，且 $f(a)\neq 0$，$a\neq 0$，求极限

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{(x-a)f(a)}-\frac{1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}+\frac{1}{2x-a}\right].$$

10. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

11. 设 $1\leqslant x<+\infty$ 时，$0<f'(x)<\dfrac{1}{x^2}$，且 $f'(x)$ 连续，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在.

12. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，$g(x)$ 非负，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x$.

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $x\in(a,b)$，证明：$\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{s}\int_a^x[f(t+s)-f(t)]\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$.

14. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k^2+1}$(用定积分求极限).

15. 设 $f(x)$ 是满足$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$ 的连续函数,且当 $x\to0$ 时,$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是与 x^n 同阶的无穷小量,求正整数 n.

16. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数,且$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$.求$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

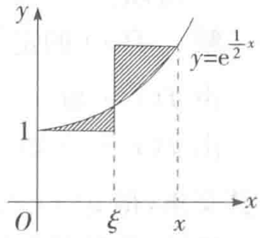

图 1—1—1

17. 如图1—1—1,对指数曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$,在原点 O 与点 $x(x>0)$ 之间找一点 $\xi=\theta x(0<\theta<1)$,使在这点左、右两边有阴影部分的面积相等,求$\lim\limits_{x\to0}\theta$.

18. 求极限$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$.

19. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,$f''(0)\neq0$,$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^\alpha-\sin x}=\beta(\beta\neq0)$,求 α、β(其中 $\beta\neq0$).

20. 设 $f(x)$ 在$(-a,a)$内连续,在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)\neq0$.

(1) 求证:对任给的 $0<x<a$,存在 $0<\theta<1$,使$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$.

(2) 求$\lim\limits_{x\to0^+}\theta$.

21. 设 $f(1)=0$,$f'(1)=a$,求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2f(\mathrm{e}^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2x)}}{\ln\cos x}$.

22. 设 $g(x)$ 是微分方程 $g'(x)+g(x)\sin x=\cos x$ 满足条件 $g(0)=0$ 的解,求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}$.

23. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-1}{x}=a$,已知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^1 g(x^2t)\mathrm{d}t-1}{x^2}, & x<0,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0,\\[2mm] \dfrac{a+b\cos x}{x^2}, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续,求 a,b.

24. 设 $f(x)=\begin{cases}(x+2)\arctan\dfrac{1}{x^2-4}, & x\neq\pm2\\ 0, & x=\pm2\end{cases}$,讨论函数 $f(x)$ 的连续性,若有间断点,指明其类型.

分析解答

一 填空题

1. 应填$[-1,\sqrt{2}]$.

解 $f(x)$的定义域为$[-1,1]\cup[-2,-1)\cup(1,2]$,即$[-2,2]$,

由$f(x^2)$知$0\leqslant x^2\leqslant 2$,即$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$,

由$f(x-1)$知$-2\leqslant x-1\leqslant 2$,即$-1\leqslant x\leqslant 3$,

求其交集,得$g(x)$的定义域为$[-1,\sqrt{2}]$.

评注:分段函数的定义域为各分段之并.

2. 应填1.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1-g(x), & g(x)\leqslant 0\\ 1+g^2(x), & g(x)>0\end{cases}$,

而$g(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant 0$, $g(x)>0\Leftrightarrow x<0$

所以
$$f[g(x)]=\begin{cases}1+x^4, & x<0\\ 1+x^3, & x\geqslant 0\end{cases},$$

由于
$$\lim_{x\to 0^-}f[g(x)]=\lim_{x\to 0^-}(1+x^4)=1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f[g(x)]=\lim_{x\to 0^+}(1+x^3)=1.$$

因此
$$\lim_{x\to 0}f[g(x)]=1.$$

评注:此题可不必求出$f[g(x)]$.
$$\lim_{x\to 0^-}f[g(x)]=\lim_{x\to 0^-}f(x^2)=\lim_{x\to 0^-}(1+x^4)=1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f[g(x)]=\lim_{x\to 0^+}f(-x^3)=\lim_{x\to 0^+}(1+x^3)=1.$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}f[g(x)]=1$.

3. 应填-2.

解 当$x\leqslant 0$时,$f(x)=x^2$,故$f(x)\geqslant 0$,得$x=-\sqrt{y}$;

当$x>0$时,$f(x)=-x^3$,故$f(x)<0$,得$x=-\sqrt[3]{y}$,

综上所得
$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ -\sqrt[3]{x}, & x<0,\end{cases}$$

故有
$$g(4)=-\sqrt{4}=-2.$$

评注:分段求出反函数,然后再综合起来.

4. 应填$\dfrac{9}{2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+xf(x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x} = \frac{9}{2}.$$

5. 应填$\frac{6}{7}$.

解　由等价无穷小量的定义及洛必塔法则,可得

$$\begin{aligned}1 &= \lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[x^2\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x (1-\cos t)f(t)\,dt\right]\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}\left[2x\int_0^x f(t)\,dt + (x^2+1-\cos x)f(x)\right]\\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} + \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-\cos x}{x^2}f(x)\\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}f(x) + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot f(0)\\ &= \frac{7}{6}f(0).\end{aligned}$$

所以,$f(0) = \frac{6}{7}$.

评注:含参数的变限积分,不能直接求导,必须经变量替换将参变量提至积分号外再求导.

二 选择题

1. 应选(B).

解　因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2} = +\infty$,　$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$,

而　$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{|x|}{x\ln(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{\ln(1-x)} = -\frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{|x|}{x\ln(1-x)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{\ln(1-x)} = 0$.

所以,只有函数 $\arctan\frac{|x|}{x\ln(1-x)}$ 在$(0,1)$内有界.故选(B).

评注:判断函数的有界性除了用定义及已知函数的有界性外,下列结论也是很有用的:设 $f(x)$ 在开区间(a,b)内连续,若$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 及$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在(a,b)内有界.

2. 应选(C).

解　由题设知

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}-6\right] = 0,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+1+11x^2+6x^3}{x} = 0,$$

因此 $a=-1$,故选(C).

3. 应选(D).

解　当 $x\to 0$ 时$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \sim x^2$,

$$3x^3-4x^4+5x^5=x^3(3-4x+5x^2)\sim 3x^3,$$

$$e^{x^2}-\cos x=e^{x^2}-1+1-\cos x\sim\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2,$$

$\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt$ 由 $\int_0^u\frac{\sin t^2}{t}dt$ 与 $u=1-\cos x$ 复合而成,当 $x\to 0$ 时,$\frac{\sin x^2}{x}\sim x$,$\int_0^x\frac{\sin t^2}{t}dt$ 与 x^2 同阶,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$. 所以,当 $x\to 0$ 时,$\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt$ 是 x 的 $2\times 2=4$ 阶无穷小. 故选(D).

4. 应选(C).

解 由 $f(x)$、$g(x)$ 可导知,$f(x)$、$g(x)$ 连续. 于是有:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

又 $f(x_0)<g(x_0)$,所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. 故选(C).

评注:本题也可用排除法. 取 $f(x)=x$,$g(x)=x+1$,则 $f(x)<g(x)$,$x\in(-\infty,+\infty)$. 但(A),(B),(D) 不成立,故选(C).

5. 应选(C).

解 注意到当 $|x|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$,当 $|x|>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$,易求得

$$f(x)=\begin{cases}-3\sin\frac{1}{x}, & 0<|x|<1,\\ \pm\frac{1}{2}\sin 1, & |x|=1,\\ 2\sin\frac{1}{x}, & |x|>1.\end{cases}$$

可见,$x=-1$ 和 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点,而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,故选(C).

评注:函数 $f(x)$ 的间断点 x_0 分为两类:$f(x)$ 在 x_0 的左、右极限存在的间断点称为第一类间断点,其中左、右极限相等的间断点称为可去间断点. $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

三 解答题

1. **分析** 因为 $f(x)$ 为偶函数,所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 要证 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界,只要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

解 由 $f(-x)=(-x)e^{-x^2}\int_0^{-x}e^{t^2}dt$ 及 $\int_0^{-x}e^{t^2}dt\xlongequal{t=-u}-\int_0^x e^{u^2}du=-\int_0^x e^{t^2}dt$ 可知:$f(-x)=f(x)$. 所以,$f(x)$ 是偶函数. 只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

又
$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\frac{1}{x}e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2e^{x^2}-\frac{1}{x^2}e^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

于是,对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$,存在 $A>0$,当 $x>A$ 时,有

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},$$

即当 $x>A$ 时,有 $0<f(x)<1$.

因为 $f(x)$ 在$[0,A]$上连续,因此,$f(x)$ 在$[0,A]$上有界,注意到在$[0,+\infty)$上 $f(x)\geqslant 0$. 故 $\exists M_1>0$,使得 $\forall x\in[0,A]$,有 $0\leqslant f(x)\leqslant M_1$. 取 $M=\max\{1,M_1\}$,则对 $\forall x\in[0,+\infty)$,有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 从而可知,对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$.

评注:(1) 要判断函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上的有界性,需考察 $f(x)$ 在间断点 x_0 及在无穷远点的极限. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 x_0 附近有界,若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有界,若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有界. 若 $f(x)$ 在(a,b)内连续,又$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 均存在,则 $f(x)$ 在(a,b)内有界.

在闭区间上连续函数一定有界,但在开区间上不连续的函数也可能有界. 例如:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 1, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,但 $f(x)$ 在$(-1,1)$内有界.

(2) 在本题的证明中取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$(或取其他一个确定的正数)是非常必要的. 如果用"$\forall\varepsilon>0,\exists A>0$,当 $x>A$ 时,有 $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$"来证明 $f(x)$ 在$[A,+\infty)$上有界就是错误的,因为此时的"界"不确定.

(3) 用变量替换可证明 $f(x)$ 与其原函数$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的奇偶性有着密切的联系:

若 $f(x)$ 连续,则

1) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇(偶)函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 为偶(奇)函数.

2) $\forall a\in\mathbf{R}$,$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

2. **分析** 只要确定常数 k,使得 $\varphi(x)=F(x)-kx$ 以 T 为周期.

解 (1) 由

$$\begin{aligned}\varphi(x+T)&=F(x+T)-k(x+T)\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-kx+\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-kT\\&=\varphi(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-kT\quad\left(\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

令 $k=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$,则 $\varphi(x)=F(x)-kx$ 是以 T 为周期的周期函数. 从而有 $F(x)=kx+\varphi(x)$.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不一定存在,所以不能用洛必塔法则求该极限.

但$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可写成:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$连续且以 T 为周期. 于是 $\varphi(x)$ 在$[0,T]$上有界,在$(-\infty,+\infty)$上有

界,所以,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.\quad \text{(无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量)}$$

评注:

(1) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则有如下结论:

1) $f(x)$ 的原函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的函数的充分必要条件是 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$.

2) $\forall a\in\mathbf{R},\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

3) $\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 对"$\frac{0}{0}$"和"$\frac{\infty}{\infty}$"型极限,当 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大量时,可由洛必塔法则得知

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

但当 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为无穷大量时,不能断定 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

3. **分析** $f(x)$ 的表达式中含有参变量的积分,应经变量替换将参变量移至积分号外或积分限上再求极限.

$$\int_0^x tf'(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_0^x(x-u)f'(u)\mathrm{d}u$$

$$=x\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf'(u)\mathrm{d}u.$$

将参变量 x 提到积分号外后,已知条件可化为:

$$f(x)=x+x\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf'(u)\mathrm{d}u.$$

解 由已知条件 $f(x)=x+\int_0^x tf'(x-t)\mathrm{d}t$ 可化为

$$f(x)=x+x\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf'(u)\mathrm{d}u.$$

两边对 x 求导得:

$$f'(x)=1+\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u+xf'(x)-xf'(x)$$

$$=1+f(x)-f(0)$$

$$=1+f(x)\quad(f(0)=0).$$

得 $f(x)=\mathrm{e}^x-1$. 所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-1)=-1$.

评注:(1) 本题的关键是求出 $f(x)$ 的表达式. 当已知条件是由积分方程给出时,通过求导可得出 $f(x)$ 所满足的微分方程:

$$f'(x)-f(x)=1,\quad f(0)=0.$$

由通解公式可得通解为:

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}x}\left[\int 1\cdot\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=c\mathrm{e}^{x}-1.$$

由 $f(0)=0$,得 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-1$.

一般地,一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解为:

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right].$$

(2) 在计算含参变量的积分时,应通过变量替换将参变量提至积分号外或积分限上,再作计算.

4. **分析** 是"$\frac{0}{0}$"型,用洛必塔法则. 当 $x\to 0$ 时,$\sqrt{1+x^4}-1\sim\frac{1}{2}x^4$,$\ln(1+x)\sim x$,$\sin^2 x\sim x^2$.

解
$$原式=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^4}=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}=1.$$

5. **分析** 当 $x\to 0^+$ 时,$x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}\to 1$, $\arctan x\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1\to 0$.

解
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^x\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^3}$$
$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)+1\right]}{x^2}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

评注:洛必塔法则是求"$\frac{0}{0}$"和"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式的重要工具,为了避免复杂的计算,减少错误,在使用该工具之前,应尽可能综合运用四则运算、连续性、恒等变形、等价无穷小替换和变量代换等方法进行简化.

在本题中我们分离出极限为 1 的因子 x^x,使函数中"$\frac{0}{0}$"型未定式部分 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1}{x^3}$ 更为突出,并利用恒等变形简化了后面的计算. 否则,如果直接用洛必塔法则,就会很麻烦.

6. **分析** 由已知,$f(1)=0$,$f'(1)=1$,有 $\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u)}{u-1}=1$.

当 $x\to 0$ 时,$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$.

令 $1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t=u$,则 $\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t f(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t=\int_1^{\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u$.

解
$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u}{x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u}{x^4}$$

$$=-2\lim_{x\to0}\frac{f(e^{x^2})\cdot e^{x^2}\cdot 2x}{4x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{f(e^{x^2})}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=-f'(1)$$

$$=-1.$$

评注:在求极限时要注意重要条件的应用.例如:

(1)$f(x_0)=0,f'(x_0)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$ ($f(x)$ 在 x_0 连续).

(2)若 $f'(x_0)$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=x_0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)]-f[h(x)]}{x-x_0}=f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-h(x)}{x-x_0}.$$

7. **分析** 先求 $f(x)$ 在$[0,1]$上的最大值 M_n,再求极限.

解 $f'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}$.

令 $f'(x)=0$,得 $n^2x(1-x)^{n-1}=n(1-x)^n$,即 $nx=1-x$.得 $x=\dfrac{1}{n+1}$.

又 $f''\left(\dfrac{1}{n+1}\right)<0$,所以 $M_n=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$ 为 $f(x)$ 在$(0,1)$内的极大值.

比较 $f(0)=0,f(1)=0$ 和 M_n 可知,$f(x)$ 在$[0,1]$上的最大值为 $M_n=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\dfrac{1}{e}$.

评注:本题的极限是“1^∞”型未定式,其一般形式为 $\lim f(x)^{g(x)}$,其中 $\lim f(x)=1$,$\lim g(x)=\infty$.为求极限,也可先将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 化为指数型复合函数 $e^{g(x)\ln f(x)}$,利用等价无穷小量替换定理:

$$\ln f(x)=\ln[1+(f(x)-1)]\sim f(x)-1,$$

可得:

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}.$$

于是,将求幂指函数的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 转化为求积函数的极限 $\lim g(x)[f(x)-1]$.

8. **分析** $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在,求极限时要考虑单侧极限.

解 $$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\lim_{x\to0^-}\frac{|\sin x|}{\ln(1+x)}$$

$$=2-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=2-1=1.$$

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{2}{e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{\dfrac{1}{e^{\frac{2}{x}}}+1}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0+1=1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right]=1.$

评注:若在求极限时,涉及$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$,$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 等时,一定要考虑单侧极限.

9. **分析** "$\infty-\infty$"型是分式,一般先通分.

解

$$\text{原式}=\frac{1}{a}+\frac{1}{f(a)}\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\,dt-(x-a)f(a)}{(x-a)\int_a^x f(t)\,dt}$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{f(a)}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\int_a^x f(t)\,dt+(x-a)f(x)}$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{f(a)}\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a}+f(x)}$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f'(a)}{f(a)+f(a)}$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{f'(a)}{2f^2(a)}.$$

评注:极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{\int_a^x f(t)\,dt+(x-a)f(x)}$ (用洛必塔法则)

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{f(x)+f(x)+(x-a)f'(x)}=\frac{f'(a)}{2f(a)}.$$

这种解法是错误的. 因为这里利用了$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)$. 而已知条件不能保证 $f'(x)$ 在点 a 连续.

关于"$\infty-\infty$"型未定式的极限,一般的处理方法为:是分式先通分;是根式先有理化;是整式先提出无穷大因子的最高次幂,分别将其化为"$\dfrac{0}{0}$"型,或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型,或"$\infty\cdot 0$"型再计算.

10. **分析** 该极限为"1^∞"型,转化为函数的极限,再用洛必塔法则等方法.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\tan\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(x\cdot\tan\frac{1}{x}\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln\frac{\tan t}{t}}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\frac{\tan t}{t}-1}{t^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\tan t-t}{t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1-\cos^2 t}{3t^2}}=e^{\frac{1}{3}}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}.$

评注:利用函数极限及洛必塔法则求数列极限的理论依据是:

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

11. **分析** 要证明$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$存在,只要证 $f(n)$ 单调有界,即证 $f(x)$ 单调有界. 由已知条件、定积分的性质和牛顿—莱布尼兹公式便可知 $f(x)$ 单调有界.

证 当$1\leqslant x<+\infty$时,由 $f'(x)>0$ 知,$f(x)$ 单调增加,由题设和定积分的性质,可得:

$$0<\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t<\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

由牛顿—莱布尼兹公式得:

$$0<f(x)-f(1)<-\frac{1}{x}+1$$

即 $f(1)<f(x)<f(1)+1$. 所以,数列$\{f(n)\}$ 单调有界. 由单调有界定理知,$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 存在.

评注:关于递推数列的极限,用先验证后求或先求后验证这些传统的方法无疑是正确的,但在单调性和有界性判断方面用传统的方法会遇到困难. 此时,应尽可能转化为函数单调性和有界性的判断. 这样就可综合运用函数的性质、重要公式和结论来解决极限问题.

12. **分析** 应用函数 $f(x)$ 的性质,将$\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 进行放缩,然后再由夹逼定理可得要求的极限.

解 由 $f(x)>0$ 在$[a,b]$上连续,可知存在 m,M,使得 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$. 于是有

$$\sqrt[n]{m}\leqslant\sqrt[n]{f(x)}\leqslant\sqrt[n]{M}.$$

又 $g(x)$ 非负,所以

$$\sqrt[n]{m}\,g(x)\leqslant g(x)\sqrt[n]{f(x)}\leqslant\sqrt[n]{M}\,g(x),$$

$$\sqrt[n]{m}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt[n]{M}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

13. **分析** 极限中含有含参变量的积分,应先经变量替换将参数提至积分号外再计算.

证 由 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,可知 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导,且 $F'(x)=f(x)$.

$$\int_a^x f(t+s)\mathrm{d}t\xlongequal{t+s=u}\int_{a+s}^{x+s} f(u)\mathrm{d}u=\int_a^{x+s} f(u)\mathrm{d}u-\int_a^{a+s} f(u)\mathrm{d}u=F(x+s)-F(a+s).$$

所以

$$\text{原式左边}=\lim_{s\to0}\frac{F(x+s)-F(a+s)-F(x)}{s}$$

$$=\lim_{s\to0}\left[\frac{F(x+s)-F(x)}{s}-\frac{F(a+s)-F(a)}{s}\right]$$