

G A O D E N G S H U X U E



面向 21 世纪高职高专规划教材

高等数学 (第3版)

程红萍 钟忠奎 主编



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向 21 世纪国际国内市场的教材

高等数学

(第 3 版)

程红萍 钟忠奎 主 编



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书根据教育部制订的“高职高专数学教学基本要求”,在第2版的基础上,由多年来一直从事高职高专高等数学教学工作的一线教师执笔编写.全书系统讲解高职高专高等数学的基础知识和基本方法,内容包括函数与极限,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,向量代数与空间解析几何简介,多元函数微分学,二重积分与曲线积分,无穷级数.本书共分10章,每章又分若干节,每节都有配套练习题,每章后有自测题,书末附有参考答案并附录预备知识及常用曲线与曲面等内容.

本书理论系统,举例丰富,讲解透彻,难度适宜,适合作为高职高专各专业的“高等数学”课程的教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/程红萍,钟忠銓主编. —3版. —上海:
同济大学出版社,2012.5
ISBN 978-7-5608-4872-3

I. ①高… II. ①程… ②钟… III. ①高等
数学—高等教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 103556 号

面向 21 世纪高职高专规划教材

高等数学(第 3 版)

程红萍 钟忠銓 主编

责任编辑 曹建 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向葵

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 同济大学印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 25.25
印 数 4101—10200
字 数 505000
版 次 2012 年 5 月第 3 版 2012 年 12 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-4872-3

定 价 42.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

本书自 2006 年面世后,即被国内许多高校选作教材,深受高校师生和广大读者的喜爱.2009 年同济大学出版社出版了本教材的第 2 版,同样受到广泛好评.很多专家、学者和兄弟高校的教师、学生还专门来函或发来电子邮件,对我们的工作给予热情的鼓励和宝贵的支持,同时对第 2 版教材中存在的一些问题和印刷疏漏给予指正,并对如何提高教材质量提出了很多建设性的改进意见.这让我们在感到无比欢欣鼓舞的同时,深为自己的疏忽给读者造成的不便而自责.借此再版之机,我们向长期以来对我们的工作给予关注、支持和鼓励的兄弟高校的同行以及广大的读者朋友表示真诚的感谢!

此次修订,着眼于进一步提高教材质量.为了达到这个要求,我们参考了一些兄弟院校“高等数学”课程的教学大纲和近年来专升本考试的命题情况,对相关章节的内容进行了必要的调整,但对教材原有的逻辑严谨、叙述细致、既可以作为教材又便于自学的特点予以保留并有所强化,目的是使原版教材的优点更突出,更能适应高职高专院校对高等数学教学的实际需要.当然,我们也对所有在第 2 版教材中已发现的包括内容和文字两方面的印刷错误都进行了更正.殷切希望我们的工作能够一如既往地得到各位同行和广大师生的帮助及支持.

这次修订工作由程红萍同志承担.尽管我们在修订过程中已经付出了很大的努力,但由于水平有限,在第 3 版教材中仍有可能出现错误和不当之处,敬请有关专家、学者和广大读者继续不吝赐教.

编 者

2012 年 5 月

第2版前言

本教材自2006年出版以来,由于它在取材、体系、讲法、可读性等诸方面较为切合当前高职教育教学的改革形势以及高职院校的高等数学教学实际,而被全国许多院校所采用,深受国内高职院校的欢迎,教材使用量逐年上升.几年来,许多专家、学者对本教材给出了许多有益的建议,有的读者对印刷与编写的一些错漏逐一记录并及时反馈,这是对我们工作的鼓励和支持,也是保证再版质量不可或缺的条件.借此再版之机,向关心和支持我们工作的专家、学者和广大读者表示诚挚的感谢!

目前,许多高职院校在高等数学教学改革方面进行了积极探索,各院校特别注重对学生数学素质、计算机应用能力和创新意识的培养,对高等数学教材提出了许多新的要求.基于这些情况,我们在这次再版中,除修正初版中的某些疏漏,如文字、符号、图形外,还订正了部分印刷及习题解答中的错误.在不影响本书原有的体系、结构、格局的前提下,对某些概念表述、内容作了适当的调整,并增加了部分内容,使本书的内容更充实、更合理.例如,考虑到学生对二次曲面比较陌生,在附录中增加了一些常见的二次曲面图形.通过修订,本书质量得到了提高,将更加方便教师教学和学生自学.

这次修订工作由程红萍等人完成.本教材自出版以来深得广大读者和同行的关心支持,在此深表谢意.限于编者水平,书中难免仍有错误和不妥之处,诚恳地希望专家、学者和广大读者批评指正.

编 者

2009年5月

第 1 版前言

本教材是根据教育部制订的“高职高专数学教学的基本要求”,在总结国内几所学校多年来高职高专有关专业的高等数学课程教学经验的基础上,经过编者认真讨论编写而成的.全书共分 10 章,主要内容包括函数与极限,导数与微分;导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,向量代数与空间解析几何简介,多元函数微分学,二重积分与曲线积分,无穷级数等.

本书在编写过程中,充分考虑了高职高专教育改革发展的新形势和高职高专培养应用型人才的实际需要,在内容上力求突出其基础性、应用性与工具性,充分体现了它是高职各专业的基础课而不是专业课以及“服务专业,兼顾数学体系”的原则.因而对难度大的基础理论,只给出定理,不追求严格证明,适度注意数学自身的系统性与逻辑性,重点突出基础概念、基本计算和基本知识,致力于培养学生的逻辑思维能力和分析、解决实际问题的能力;对每个概念都给出了产生它的实际背景,每节后面都有配套的习题,每章后都有自测题,书末附有习题和自测题的参考答案.本教材可供高职高专有关专业使用.对于书中带有“*”号的章节,各学校可根据专业教学需要选用.

本书由钟忠銮教授、苏淑真副教授、程红萍老师编写.具体分工是:苏淑真编写第一章、第九章,约 16 万字;程红萍编写第二章至第八章,约 30 万字;钟忠銮编写第十章,约 5 万字.本书在编写和使用过程中,西安欧亚学院给予了大力支持和帮助,在此深表谢意.

由于我们的水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正.

编 者

2006 年 8 月

目 录

前 言

第 2 版前言

第 1 版前言

第一章 函数与极限 (1)

第一节 预备知识 (1)

一、实数及其几何表示 (1)

二、实数的绝对值 (2)

三、区间与邻域 (4)

第二节 函数的概念与性质 ... (6)

一、常量与变量 (6)

二、函数的概念 (6)

三、函数的几种特性 (10)

四、反函数与复合函数 (14)

第三节 初等函数 (19)

一、基本初等函数 (19)

二、初等函数 (23)

第四节 非初等函数和建立函数

关系举例 (23)

一、分段函数 (23)

二、建立函数关系举例 (25)

* 三、几种常见的经济函数 (27)

第五节 数列的极限 (31)

一、数列的概念 (31)

二、数列的极限 (32)

第六节 函数的极限 (36)

一、函数极限的定义 (36)

二、函数极限的性质 (42)

第七节 无穷小量与无穷大量

..... (43)

一、无穷小量与无穷大量 (43)

二、无穷小量的性质 (44)

三、无穷小量的比较 (45)

第八节 极限的四则运算法则

..... (46)

第九节 两个重要极限 (52)

第十节 函数的连续性 (57)

一、函数的增量 (58)

二、函数的连续性 (58)

三、函数的间断点 (61)

四、连续函数的运算 (62)

五、闭区间上连续函数的性质 ... (63)

第二章 导数与微分 (69)

第一节 导数的概念 (69)

一、问题的提出 (69)

二、导数的定义 (70)

三、导数的几何意义 (74)

四、函数可导与连续的关系 (75)

第二节 导数基本运算法则

..... (78)

一、导数的四则运算法则 (78)

二、反函数的求导法则 (80)

三、复合函数的求导法则 (82)

四、初等函数的导数 (85)

第三节 高阶导数 (88)

第四节 隐函数的导数

对数求导法 (90)

一、隐函数的导数 (90)

二、对数求导法 (91)

第五节 微分及其应用 (93)

一、微分的定义 (93)

二、微分的几何意义	(96)	一、曲边梯形的面积	(158)
三、微分法则	(96)	二、变速直线运动的路程	(159)
四、微分在近似计算中的应用	(98)	三、定积分的定义	(159)
第三章 导数的应用	(104)	四、定积分的几何意义	(161)
第一节 中值定理	(104)	第二节 定积分的基本性质	(162)
第二节 洛必达法则	(110)	第三节 微积分基本定理	(165)
一、洛必达法则	(110)	一、变速直线运动中位置函数与 速度函数之间的联系	(165)
二、其他未定式极限的计算	(114)	二、积分上限的函数及其导数	(166)
第三节 函数的单调区间与极值	(116)	三、牛顿-莱布尼兹公式	(169)
一、函数的单调区间	(116)	第四节 定积分的换元积分法与 分部积分法	(172)
二、函数的极值	(118)	一、换元积分法	(172)
第四节 函数的最值	(122)	二、分部积分法	(174)
第五节 函数曲线的凹凸性与拐点 函数图形的描绘	(124)	第五节 定积分的应用	(175)
一、函数曲线的凹凸性与拐点	(124)	一、平面图形的面积	(175)
二、函数图形的描绘	(126)	* 二、克服重力所作的功	(179)
第六节 几何与经济方面函数的 优化	(128)	三、体积	(180)
第四章 不定积分	(134)	* 第六节 广义积分	(183)
第一节 不定积分的概念与性质	(134)	一、积分区间为无限区间的广义积分	(183)
一、原函数与不定积分	(134)	二、无界函数的广义积分	(185)
二、基本积分表	(136)	第六章 常微分方程	(190)
三、不定积分的性质	(138)	第一节 微分方程的基本概念	(190)
四、不定积分的几何意义	(139)	一、两个引例	(190)
第二节 换元积分法	(141)	二、微分方程的基本概念	(191)
一、第一类换元积分法(凑微分法)	(141)	第二节 一阶微分方程	(193)
二、第二类换元法	(145)	一、可分离变量的一阶微分方程	(193)
第三节 分部积分法	(150)	二、一阶线性微分方程	(195)
第四节 简单有理函数的 积分举例	(153)	第三节 可降阶的高阶微分方程	(198)
第五章 定积分及其应用	(158)		
第一节 定积分的概念	(158)		

一、 $y^{(n)}=f(x)$ 类型的方程	··· (199)	五、空间直线与平面的位置关系	··· (234)
二、 $y''=f(x,y')$ 类型的二阶微分方程	··· (199)	第五节 二次曲面与空间曲线	··· (236)
三、 $y''=f(y,y')$ 类型的二阶微分方程	··· (201)	一、曲面方程的概念	··· (236)
第四节 二阶常系数线性微分方程的解法	··· (203)	二、二次曲面	··· (237)
一、二阶常系数线性微分方程通解的结构	··· (203)	* 三、空间曲线	··· (241)
二、二阶常系数齐次线性微分方程的解法	··· (205)	第八章 多元函数微分学	··· (244)
三、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	··· (207)	第一节 多元函数的基本概念	··· (244)
第七章 向量代数与空间解析几何简介	··· (213)	一、区域	··· (244)
第一节 空间直角坐标系	··· (213)	二、多元函数的概念	··· (245)
一、空间直角坐标系	··· (213)	三、二元函数的极限	··· (247)
二、空间两点间的距离公式	··· (214)	四、二元函数的连续性	··· (248)
第二节 向量代数	··· (215)	第二节 偏导数	··· (250)
一、向量的基本概念	··· (215)	一、偏导数的概念	··· (250)
二、向量的加、减与数乘运算	··· (215)	二、高阶偏导数	··· (254)
三、向量的坐标表示法	··· (216)	第三节 全微分及其应用	··· (256)
四、两向量的数量积	··· (220)	一、全微分的概念	··· (256)
五、两向量的向量积	··· (222)	二、全微分在近似计算中的应用	··· (259)
第三节 平面及其方程	··· (225)	第四节 多元复合函数与隐函数的求导法则	··· (260)
一、平面的点法式方程	··· (225)	一、多元复合函数的求导法则	··· (260)
二、平面的一般方程	··· (226)	二、隐函数的求导法则	··· (265)
三、平面的截距式方程	··· (228)	* 第五节 方向导数与梯度	··· (267)
四、两平面的相互位置关系	··· (228)	一、方向导数	··· (267)
五、点到平面的距离公式	··· (230)	二、梯度	··· (269)
* 第四节 空间直线方程	··· (231)	* 第六节 偏导数的应用	··· (272)
一、空间直线的对称式方程	··· (231)	一、偏导数在几何上的应用	··· (272)
二、空间直线的参数方程	··· (232)	二、多元函数的极值	··· (276)
三、空间直线的一般方程	··· (233)	第九章 二重积分与曲线积分	··· (282)
四、空间直线与直线的位置关系	··· (234)		

第一节 二重积分的概念与性质	一、常数项级数的概念	(323)
..... (282)	二、级数收敛的必要条件	(325)
一、二重积分的概念	三、级数的基本性质	(326)
..... (282)	第二节 正项级数的审敛法	
二、二重积分的性质	 (327)	
..... (284)	一、基本定理	(327)
第二节 二重积分的计算	二、比较审敛法	(327)
..... (286)	三、比值审敛法	(329)
一、直角坐标系下二重积分的计算	四、根值审敛法	(330)
..... (286)	第三节 任意项级数的审敛法	
二、极坐标系下二重积分的计算	 (331)	
..... (293)	一、交错级数的审敛法	(331)
第三节 二重积分的应用举例	二、级数的绝对收敛与条件收敛	
..... (298)	 (332)	
一、立体体积	第四节 函数项级数与幂级数	
..... (299)	 (334)	
二、平面薄片的质量	一、函数项级数	(334)
..... (300)	二、幂级数及其收敛性	(335)
第四节 对弧长的曲线积分	三、幂级数的运算及性质	(338)
..... (301)	四、函数展开成幂级数	(340)
一、对弧长的曲线积分的概念和性质	* 第五节 傅里叶级数	(346)
..... (301)	一、三角级数、三角函数系的正交性	
二、对弧长的曲线积分的计算方法	 (346)	
..... (303)	二、以 2π 为周期的函数展开成	
第五节 对坐标的曲线积分	傅里叶级数	(347)
..... (306)	三、以 $2l$ 为周期的函数展开成	
一、对坐标的曲线积分的概念与性质	傅里叶级数	(352)
..... (306)	参考答案	(356)
二、对坐标的曲线积分的计算方法	附录	(376)
..... (309)	附录一 预备知识	(376)
* 三、两类曲线积分之间的关系	附录二 几种常用的曲线	(379)
..... (313)	附录三 几种常用的曲面	(382)
第六节 格林公式	附录四 试题	(386)
..... (315)		
一、格林公式		
..... (315)		
二、平面上曲线积分与路径无关		
的条件		
..... (318)		
第十章 无穷级数		
..... (323)		
第一节 常数项级数的概念和性质		
..... (323)		

第一章 函数与极限

函数是对事物及变量之间相互制约、相互依赖关系进行的数量描述. 函数的概念即是对事物数量特征的抽象和概括. 函数是高等数学的主要研究对象, 也是高等数学的基本概念. 极限是研究变量的一种基本方法, 也是高等数学的重要理论工具.

本章将介绍函数、极限和函数的连续性等概念, 介绍它们的一些性质以及极限的运算法则等.

第一节 预备知识

一、实数及其几何表示

微积分主要是在实数范围内讨论问题, 所以应该熟悉和了解实数的有关概念.

1. 实数

有理数和无理数统称为实数.

形如 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数且 $q \neq 0$) 的数称为有理数. 由于 $\frac{p}{q}$ 可以是整数或分数, 所以也可以说整数与分数统称为有理数. 有理数一定是有限小数或无限循环小数.

无限不循环小数称为无理数. 例如 $\pi \approx 3.1415926$, $\sqrt{2} \approx 1.4142136$ 等. 无理数不能表示为 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数且 $q \neq 0$).

2. 数轴

规定了原点、正方向及单位长度的直线称为数轴(图 1-1).

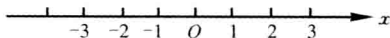


图 1-1

图 1-1 中的数轴也称为 Ox 轴.

3. 实数与数轴

有了数轴之后, 任何一个实数几何上均可用数轴上的一个点来表示. 反之,

数轴上任何一个点都表示一个实数. 即数轴上的点和实数之间是一一对应的关系.

应当指出的是, 实数是稠密的, 它充满整个数轴.

以后为方便起见, 将实数和它在数轴上对应的点不加区分. 例如, 实数 a 也称为点 a .

二、实数的绝对值

1. 实数的绝对值

实数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示. 规定正数和零的绝对值是它本身, 负数的绝对值是它的相反数, 即

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

例如: $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$.

显然, 实数的绝对值是一个非负数. 几何上, $|a|$ 表示数轴上点 a 与原点之间的距离(图 1-2).

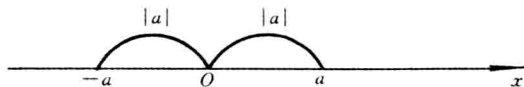


图 1-2

2. 实数绝对值的性质

设 a, b 为任意两个实数, 则绝对值有以下性质:

(1) $|a| \geq 0$; 仅当 $a = 0$ 时, 有 $|a| = 0$.

(2) $|a| = \sqrt{a^2}$.

(3) $|-a| = |a|$.

(4) $-|a| \leq a \leq |a|$.

以上几条性质由绝对值的定义不难理解. 上述性质(2)说明 $\sqrt{a^2}$ 是一个非负数, 即为算术平方根. 如 $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.

除上述性质外, 实数绝对值还有以下运算性质:

$$|a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a - b| \geq |a| - |b|;$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

这些运算性质可以根据绝对值的性质加以证明,也可以根据绝对值的定义加以理解.

例 1 化去下列各式中的绝对值符号.

(1) $|x-1|$; (2) $2-|x-2|$.

解 根据绝对值的定义,可以去掉各式中绝对值的符号.

$$(1) |x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0, \\ -(x-1), & x-1 < 0. \end{cases}$$

即 $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1. \end{cases}$

$$(2) 2-|x-2| = \begin{cases} 2-(x-2), & x-2 \geq 0, \\ 2-[-(x-2)], & x-2 < 0. \end{cases}$$

即 $2-|x-2| = \begin{cases} 4-x, & x \geq 2, \\ x, & x < 2. \end{cases}$

3. 绝对值不等式

带有绝对值符号的不等式称为绝对值不等式. 求解绝对值不等式时,除用到绝对值的定义外,还常用到两个绝对值不等式的等价不等式,它们分别是:

$$k > 0 \text{ 时, } |a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k.$$

$$k > 0 \text{ 时, } |a| > k \Leftrightarrow a < -k \text{ 或 } a > k.$$

这两个绝对值不等式的等价不等式由绝对值的定义不难得到,其中“ $\Leftrightarrow$ ”表示“等价于”. 这里所谓等价即相同的意思.

例如, $|a| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$; $|a| > 3 \Leftrightarrow a < -3 \text{ 或 } a > 3$.

例 2 去掉 $|x^2-4|$ 中的绝对值符号.

$$\text{解 } |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & x^2-4 \geq 0, \\ -(x^2-4), & x^2-4 < 0. \end{cases}$$

即 $|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & |x| \geq 2, \\ 4-x^2, & |x| < 2. \end{cases}$

即 $|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2, \\ 4-x^2, & -2 < x < 2. \end{cases}$

例 3 解下列绝对值不等式.

(1) $|2x-1| \leq 3$; (2) $|3x-2| > 4$; (3) $1 < |x-3| < 5$.

解 (1) $|2x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x-1 \leq 3$, 得 $-1 \leq x \leq 2$.

所以,不等式的解为 $-1 \leq x \leq 2$.

(2) $|3x-2| > 4 \Leftrightarrow 3x-2 < -4 \text{ 或 } 3x-2 > 4$,

得 $x < -\frac{2}{3}$ 或 $x > 2$.

所以, 不等式的解为 $x < -\frac{2}{3}$ 或 $x > 2$.

$$(3) 1 < |x-3| < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| > 1 \\ |x-3| < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < -1 \text{ 或 } x-3 > 1, \\ -5 < x-3 < 5. \end{cases}$$

这是一个不等式组, 解得 $-2 < x < 2$ 或 $4 < x < 8$. 所以不等式的解为 $-2 < x < 2$ 或 $4 < x < 8$.

三、区间与邻域

具有某种属性的元素 x 的全体称为一个集合, 记为 A , x 称为集合的元素, 记 $A = \{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$.

例如, 由不等式 $1 \leq x \leq 5$ 表示的实数集合记为 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$.

集合也可以用其他大写的英文字母表示. 如果 x 是集合 A 中的元素, 记为 $x \in A$. 否则, 记为 $x \notin A$ 或 $x \bar{\in} A$.

由全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$, 由自然数构成的集合记为 $\mathbf{N}$, 整数集合记为 $\mathbf{Z}$, 有理数集合记为 $\mathbf{Q}$, 无理数集合记为 $\mathbf{W}$. 显然 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ 及 $\mathbf{W}$ 都包含于 $\mathbf{R}$ 内, 故它们分别为 $\mathbf{R}$ 的子集.

1. 区 间

设 a, b 均为实数, 且 $a < b$, 则称 $\{x \mid a < x < b\}$ 表示的实数 x 的集合为开区间, 记为 (a, b) . 即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

类似地, 称 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 为闭区间; $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ 以及 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ 为半开半闭区间.

以上区间分别如图 1-3(a) ~ (d) 所示.

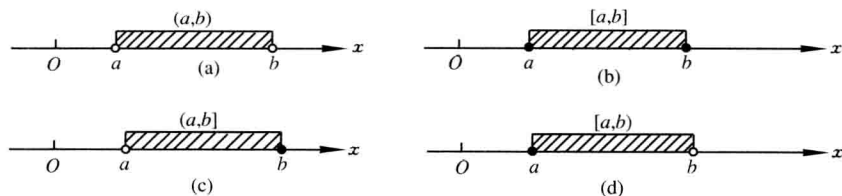


图 1-3

以上区间为有限区间, a 与 b 分别称为区间的端点, 右端点与左端点的差 $b - a$ 称为区间的长度. 在讨论问题时, 为方便起见也常用 I 表示上述各区间.

引入无穷大的记号 ∞ , 则以下各区间为无限区间:

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\} = \{x \mid x > a\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\} = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\} = \{x \mid x < b\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\} = \{x \mid x \leq b\},$$

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$, 即表示全体实数的集合.

应当注意的是, ∞ 是一个记号, 并不表示一个很大的数, 且不能参与运算.

有了区间的概念之后, 不等式或不等式组的解常用区间来表示.

2. 邻域

设 $\delta > 0$, x_0 是一个实数, 称集合

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

为点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$. 即 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$.

其中, x_0 为邻域的中心, δ 为邻域的半径.

在数轴上, 点 x_0 的 δ 邻域表示以点 x_0 为中心, 长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 如图 1-4(a) 所示.

如果 x 在 x_0 的 δ 邻域内变化但不能取 x_0 , 即 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$, 则称此邻域为点 x_0 的去心邻域, 记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 即 $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$, 如图 1-4(b) 所示. 相应地, 称 $U(x_0, \delta)$ 为点 x_0 的有心邻域.

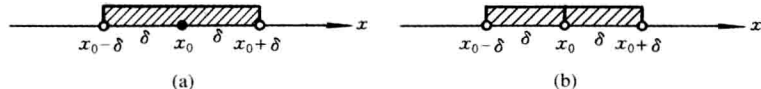


图 1-4

例如, 3 的 0.01 邻域, 就是满足不等式 $|x - 3| < 0.01$ 的实数 x 的集合, 即 $2.99 < x < 3.01$. 也就是开区间 $(2.99, 3.01)$.

又如, 满足不等式 $0 < |x + 2| < 0.01$ 的实数 x 的集合, 就表示点 -2 的去心邻域, 半径也是 0.01. 该邻域即开区间 $(-2.01, -2) \cup (-2, -1.99)$.

其中符号 $\cup$ 是集合运算的一种符号, 表示两个集合的并集, 即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

习题 1-1

1. 化去下列各式绝对值的符号.

(1) $|x - 3|$;

(2) $|3x - 7|$;

(3) $1 - |x - 3|$; (4) $|16 - x^2|$.

2. 用区间表示满足下列不等式的变量 x 的变化范围.

(1) $1 \leq x < 3$; (2) $x^2 < 9$;

(3) $|x - 1| > 1$; (4) $(x - 1)(x + 2) < 0$;

(5) $|2x + 3| \leq 1$; (6) $0 < |x - a| < \delta$ ($\delta > 0$).

3. 用不等式表示下列各区间.

(1) $[-1, 0]$; (2) $(-3, 3]$; (3) $[2, +\infty)$; (4) 点 -2 的 0.001 邻域.

第二节 函数的概念与性质

一、常量与变量

任何事物都具有某些能够表现其多少、大小、长短、高低、轻重、快慢等可以进行比较和测定的属性. 比如长度、体积、温度、速度、距离、产量、成本、价格等. 这些都称为量, 量的具体表现是数. 人们在对事物和现象的数量特征进行研究和定量分析时看到, 有些量在考察和研究的过程中保持不变, 只取某个固定的数值, 这种量称为常量; 有些量在研究过程中不断变化, 可以取不同的数值, 这种量称为变量.

例如, 考察从甲地飞往乙地的客机. 旅客人数、行李重量、票价与航空公司的收入等都是常量, 而消耗的汽油、飞行中客机与甲、乙两地的距离等则是变量.

一个量是常量还是变量, 要根据具体情况而定. 例如, 三角形的内角和、圆周率 π 总是常量, 而我国总人口数、一天中的温度则总是变量. 银行储蓄存款的利率, 总的来说是有调整变化的, 是个变量, 但在每一个稳定时期则是固定不变的常量.

常量通常用字母 $a, b, c, \dots$ 表示. 变量通常用字母 $x, y, z, \dots$ 表示.

我们在微积分中讨论的量, 只在实数范围内取值. 由于实数与数轴上的点有一一对应的关系, 因此, 常用数轴上的定点表示常量, 而用数轴上的动点表示变量. 变量的取值和变化总有一定的范围, 常用区间来表示这个范围.

初等数学研究的主要对象是常量, 而高等数学研究的主要对象则是变量.

二、函数的概念

1. 函数关系

在研究任何事物或现象的同一过程中, 出现的变量都不止一个. 这些变量之间有些具有确定的相互依赖的某种数量关系, 而有些则没有确定的依赖关系, 考察下面几个例子.

例 1 用混凝土修建一个长方体水池, 显然容积 V 与水池的长 x 、宽 y 、高 z

之间有确定的依赖关系 $V = xyz$, 其中 $x > 0, y > 0, z > 0$. 对任一组 x, y, z 的值, 都能确定对应的水池容积 V 的值.

例 2 一个人进行投掷硬币实验, 掷币次数 n 与国徽面出现的次数 m 两个量之间不能说没有关系. 实验表明, n 越大 m 也越大, 但 n 与 m 之间没有确定的依赖关系. 比如, $n = 100$ 时, 人们无法确定 m 到底等于多少.

如果在某一过程中, 变量之间存在着某种确定的依赖关系, 即一些变量的变化和取值决定着另一变量的变化和取值, 就说存在这种依赖关系的变量之间有某种函数关系. 如例 1 中的 V, x, y, z 之间有函数关系 $V = xyz$, 而例 2 中的 n 和 m 之间则没有函数关系.

2. 函数的定义

对于两个有函数关系的变量进行进一步讨论, 不难发现, 一定存在着某种对应规则, 根据这一规则, 当其中一个变量在允许的范围内任意取定一个值时, 另外一个变量总有确定的值与之对应. 这正是两个变量间的函数关系的实质.

定义 1 设 x, y 为两个变量, 如果当 x 在其允许的取值范围 D (D 为实数集合) 内任意取定一个实数值时, 按照一定的规则 f , y 总有唯一确定的实数值与之对应, 则称 y 是定义在 D 上的函数. 记作 $y = f(x), x \in D$. 其中, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域.

由于只有一个自变量, 也称 $y = f(x)$ 为一元函数.

如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义, 则将 f 施行于 x_0 所确定的因变量 y 的值为 y_0 , 称 y_0 是自变量 x_0 所对应的函数值, 记作

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{或} \quad y|_{x=x_0} = y_0.$$

当 x 在定义域 D 内取遍所有数值时, 对应的函数值构成的集合称为函数的值域, 记为 R_f .

函数 $y = f(x)$ 中, 表示对应规则的记号 f , 也可以改用其他字母, 例如 φ, ψ 等. 这时函数就记作 $y = \varphi(x), y = \psi(x)$ 等.

$f(x)$ 既可以表示抽象、未知的函数, 也可以表示具体、已知的函数. 但是, 如果同时考察几个不同的函数, 就要用不同的函数符号. 如 $y = \varphi(x), y = g(x)$ 等. 有时也用 $y = y(x), u = u(x)$ 等表示某个函数. 这时等号右端的 y, u 不是因变量, 而只表示函数的对应规则.

例 3 设 $f(x) = 2^x, g(x) = x^2 + 1$, 求 $f(-1), f(2), g(-1), g(2)$ 和 $f(1-x), f[g(x)]$ 及 $g(1-x), g[f(x)]$.

解 $f(-1) = \frac{1}{2}, f(2) = 4, f(1-x) = 2^{1-x}, f[g(x)] = 2^{x^2+1}. g(-1) = 2, g(2) = 5, g(1-x) = (1-x)^2 + 1, g[f(x)] = 4^x + 1.$