现代远程教育精品教材

高等数学（下）

GAODENG SHUXUE

□主　编　温罗生　李　东

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

高等数学

（下）

主编　温罗生　李　东

重庆大学出版社

内容提要

本书分为上下两册，本书为下册，内容包括：微分方程、无穷级数、空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分和曲线积分。编者通过对读者的数学基础、学习时间、专业需要等多个方面仔细权衡，选择课程的主要内容和例题，力图通过精简的篇幅呈现该课程的核心内容。

本书可作为高等学校网络教育、成人教育、高职高专院校的高等数学教材，也可作为普通高等学校文科类专业高等数学教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下/温罗生，李东主编．—重庆：重庆大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-5624-8315-1

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①温…②李…　Ⅲ．①高等数学　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 139000 号

高等数学

（下）

主　编　温罗生　李　东

策划编辑：唐启秀　杨粮菊

责任编辑：文　鹏　　版式设计：杨粮菊

责任校对：关德强　　责任印制：赵　晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：邓晓益

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401331

电话：（023）88617190　88617185（中小学）

传真：（023）88617186　88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn（营销中心）

全国新华书店经销

万州日报印刷厂印刷

*

开本：720×960　1/16　印张：14.75　字数：368 千

2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—3 000

ISBN 978-7-5624-8315-1　定价：28.00 元

前言

在编写一本教材之前，总是需要比较系统地查阅国内外同类教材，对课程的目的、内容、特色、使用对象等加以对比研究。实际上，《高等数学》教材尽管种类繁多，其目的和主要内容可以说早有定论。因此，编者们应该集中精力的倒是教材的内容、难度、学时等与使用教材的学生的实际情况相结合、与当前的时代特色相结合、与当前的教学方式相结合。

成人教育和网络教育是当前国内外大学教育的一个重要组成。对课程的实际需求以及其教育方式和传统方式的差异是编写该教材的一个重要动因。针对“高等数学”课程，编者在多年的大学普通教育和网络教育实践的基础上，通过对学生本身的差异性、教育方式的差异性、外部环境的差异性等方面的仔细对比和分析，按照“精、简、趣、新”的原则，编写本教材。在编写过程中，尽量实现下面的一些特色：

①尽量简洁地给出问题的基本概念、基本理论、基本方法，不过多追求理论的完整性和系统性，选择直接反映基本理论和基本方法的例题，不过多追求计算的复杂性和技巧性。

②对于基本概念、基本理论和基本方法，大量使用“注”的方式说明注意事项、使用方法等，将这些一般在课堂上使用的“诀窍”放入教材之中，使读者自学更加容易。

③教材注重趣味性，将所涉及的历史人物、历史事件等尽量地在相应的内容中呈现出来；同时在教材的制作上尽量体现轻松活泼的气氛。

④受众多网络教学，比如“慕课”和“爱课程”的启发，编写教材的时候尽量和片段式的录像相结合，让读者能在较短的时间对一个相对独立的知识点进行理解和掌握。

⑤习题的编写也尽量地和网络教学将结合，较多采用选择和判断题的方式以便进行网上自测。

本教材分为上下册。上册由李东副教授编写，温罗生副教授负责各章节的习题编写；下册由温罗生副教授编写，李东副教授负责所有习题的编写。

本教材的出版得到重庆大学网络教育学院的大力支持，我们表示衷心的感谢。

由于时间较紧，加之编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请广大同行、读者批评指正。

编　者

2014 年 5 月

目录 CONTENS

第7章　微分方程

微分方程是微积分最常见的应用之一，经过几百年的发展，早已成为一门独立的数学分支. 实际上，微积分的创始人牛顿和莱布尼茨也是最早研究微分方程的数学家之一. 早期的微分方程完全可以看成是微积分的一个部分. 而由于物理、化学等自然科学，以及后来的生物学和经济学等基本规律一般都能很好地使用微分方程进行描述，微分方程已经变成描述和解决各种工程实践问题的基本工具. 本章通过对一些应用问题的微分方程描述，使读者理解微分方程建模的基本过程，同时掌握一阶微分方程和二阶常系数微分方程的基本解法.

7.1　微分方程的基本概念

7.1.1　两个引例

例 7.1　我们知道，不同的朝代，不同的国家，有着不同的人口数. 我们不禁要问，人口的数量变化有什么规律，能否预测不同时期的人口数？

背景：早在1798年，英国的人口学家马尔萨斯便关注人口的增长问题，并提出马尔萨斯人口模型. 马尔萨斯在分析人口出生与死亡情况的资料后发现，人口净增长率 k 基本上是一个常数.

解　用 t 表示时间，用 x 表示人口数量，很显然 x 是随时间 t 变化的，因此可以将 x 看成是 t 的函数. 使用微积分的思想，设时间有一个微小的增量 Δt，在 $t+\Delta t$ 时对应的人口数为 $x(t+\Delta t)$. 按照人口净增长率的定义，有

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{x(t)\Delta t}=k \tag{7.1}$$

或者改写为

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=kx(t) \tag{7.2}$$

其意义为单位时间的人口增长量和当前人口数成正比,比例常数为人口净增长率.

当 Δt 趋于零时,根据导数的定义,式(7.2)可以改写为

$$x'(t) = kx(t) \tag{7.3}$$

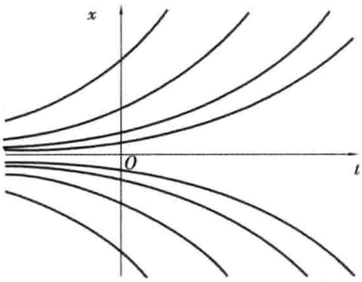

图 7.1

方程(7.3)是一个含有未知函数的导数的方程. 然而,这个方程能否回答上面的问题呢? 它包含了哪些信息?

容易验证,形如

$$x(t) = Ce^{kt} \tag{7.4}$$

的函数能使微分方程(7.3)恒成立,我们称这样的函数是所求微分方程的解,如图 7.1 所示.

在某时刻的实际人口数据已知的情况下,也就是已知在时间点 $t=t_0$ 的人口数 $x(t_0)=x_0$,代入函数 $x(t)=Ce^{kt}$,可以解出其中的常数 C 并得到满足上述微分方程的唯一解

$$x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)} \tag{7.5}$$

容易发现,上述的曲线是图 7.1 所示的曲线簇中过点(t_0,x_0)的其中一条曲线. 使用方程(7.5),可以得到任意时刻的人口数量.

注 1: 许多实际问题可以使用微分方程进行建模,在了解事物发展内在规律的基础上,使用微积分等数学工具,可以得到问题的微分方程模型.

注 2: 验证一个函数(簇)是否是已知微分方程的解,方法是将该函数进行求导并代入原方程. 如果能使方程恒成立,则该函数(簇)是方程的解. 比如,$x(t)=Ce^{kt}$,求导得到 $x'(t)=kCe^{kt}$,此时容易发现,$x'(t)=kx(t)$.

注 3: 寻找已知微分方程的解的过程就是解微分方程,这是本书后面的章节中重点要解决的问题. 解微分方程没有一般的方法,一些微分方程无法得到解. 本书主要针对不同类型的方程,给出针对该类型方程的特有求解方法. 因此,在求解微分方程之前,判断该方程的类型,选择适合该方程的方法是能否得到正确的解的关键.

例 7.2 设质量为 m 的物体,在 $t=0$ 时自由下落,忽略空气的阻力,求物体下落距离与时间的关系.

解 如图 7.2 建立坐标系，设 x 为物体下落的距离，于是物体下落的速度和加速度分别为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 和 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，根据牛顿第二定律，$F=ma$，可列出方程

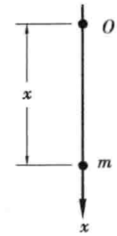

图 7.2

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=mg$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=g \tag{7.6}$$

将上式积分两次，得到

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=gt+c_1 \tag{7.7}$$

$$x=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2 \tag{7.8}$$

其中，c_1 及 c_2 为两个常数. 容易发现，曲线簇(7.8)在几何上是一系列的抛物线，当给定物体的初始位置和初始速度时，比如初始位置 $x(0)=0$ 和初始速度 $v_0=x'(0)=0$. 将这两个条件代入式(7.7)和式(7.8)，可解得 c_1,c_2 为

$$c_1=0,c_2=0$$

自由下落物体的距离与时间的关系为

$$x=\frac{1}{2}gt^2 \tag{7.9}$$

注 4：运动学和力学是微分方程最常见的应用领域，而速度和加速度是导数概念在现实世界最自然的表现. 当涉及物体的加速度时，关于未知函数的导数一般是二阶的.

7.1.2 微分方程的基本概念

方程(7.3)和(7.6)的一个共同特点是都含有未知函数的导数，称含有未知函数的导数或微分的方程为**微分方程**.

微分方程中所出现的未知函数的**最高阶导数的阶数**称为**微分方程的阶**. 比如，微分方程(7.3)是一阶的，而微分方程(7.6)是二阶的.

一般地,n 阶微分方程的形式为

$$y^{(n)}=f(x,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{7.10}$$

如果将函数 $y=y(x)$ 代入方程(7.10)使之成为恒等式,则称该函数为微分方程的解. 比如,函数(7.5)和(7.9)分别是微分方程(7.3)和(7.6)的解.

如果 n 阶微分方程的解 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 中含有独立任意常数的个数与方程的阶数相同(n 个独立的任意常数是指它们不能合并而使得任意常数的个数减少),则称该解为微分方程的通解. 通解在几何上是平面上的一系列平行曲线. 比如方程(7.4)和方程(7.8)分别是微分方程(7.3)和(7.6)的通解.

微分方程的通解看似给出了微分方程解的全部信息,但回顾前面两个实际例子,可以发现,在实际情况中人们往往关注的是满足一定条件的解,比如解(7.5)和解(7.9). 确定了通解中的任意常数以后所得到的解称为微分方程的**特解**. 比如函数(7.5)和(7.9)分别是微分方程(7.3)和(7.6)的特解. 用于确定通解中任意常数的条件称为初始条件. 一般 n 阶微分方程 $y^{(n)}=f(x,y',y'',\cdots,y^{(n-1)})$ 的初始条件表述为

$$y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y_1,\cdots,y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1}$$

求微分方程满足初始条件的解的问题称为初值问题. n 阶微分方程的初值问题常记为

$$\begin{cases}y^{(n)}=f(x,y',y'',\cdots,y^{(n-1)})\\ y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y_1,\cdots,y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1}\end{cases} \tag{7.11}$$

注 5:已知 n 阶微分方程的通解和 n 个初始条件,可以得到一个包含 n 个方程的方程组,求解该方程组就可以得到待定的 n 个任意常数,从而得到微分方程的特解.

例 7.3 对于微分方程 $y''+y=0$,(1)验证 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是该微分方程的解;(2)若已知 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 是该微分方程的通解,求满足初始条件 $y|_{x=\frac{\pi}{4}}=1$ 和$y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=-1$ 的特解.

解 (1)对于函数 $y=\sin x$,求一阶和二阶导数得到 $y'=\cos x,y''=-\sin x$. 代入可得 $y''+y=0$ 恒成立,因此,函数 $y=\sin x$ 是微分方程的解.

类似的可以验证,函数 $y=\cos x$ 也是微分方程的解.

(2)因为方程的通解为

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x \tag{7.12}$$

对式(7.12)两边同时求导得

$$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x \tag{7.13}$$

在式(7.12)和式(7.13)中令 $x=\frac{\pi}{4}$,根据两个初始条件可得含2个未知量2个方程的方程组:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 = -1 \end{cases}$$

解之得 $c_1=0, c_2=\sqrt{2}$,故所求特解为 $y=\sqrt{2}\cos x$.

习题 7.1

一、单项选择题

1. 下列微分方程

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}=x+\sin x$　　(2) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4$

(3) $(2x-y+1)dx+y^2dy=0$　　(4) $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=0$

的阶分别为(　　).

A. 2,2,2,4　　B. 2,1,1,4　　C. 2,2,3,4　　D. 3,1,1,3

2. 对于下面的四个说法:

(1) 函数 $y=\frac{1}{x}$ 是二阶微分方程 $y''=x^2+y^2$ 的解;

(2) 函数 $y=ce^{\int P(x)dx}$ 是一阶微分方程 $y'=P(x)y$ 的解,其中 $P(x)$ 连续;

(3) 函数 $y=3\sin x-4\cos x$ 是二阶微分方程 $y''+y=1$ 的解;

(4) 函数 $y=1$ 是三阶微分方程 $2\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{d^2y}{dx^2}+y^2\frac{dy}{dx}=0$ 的解.

正确的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知某微分方程的通解和初始条件分别为 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 和

$\begin{cases} x(0)=a \\ x'(0)=0 \end{cases}$，则常数 C_1 和 C_2 分别等于(　　).

A. $a,0$　　B. $0,0$　　C. $0,a$　　D. a,a

4. 以下各方程以 $y=3e^{2x}$ 为解的是(　　).

A. $y'-2y=0$　　B. $y'=1+y$　　C. $y''+4y=0$　　D. $y''+xy'=0$

5. 某微分方程的解 $x^2+y^2=C$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=5$，则 $C=$(　　).

A. 0　　B. 25　　C. 1　　D. -25

二、计算题

验证函数 $y=\ln xy$ 是微分方程 $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$ 的解.

7.2 可分离变量的微分方程

7.2.1 可分离变量的微分方程

对一阶微分方程 $y'=f(x,y)$，如果右端函数 $f(x,y)$ 具有特殊的形式，比如 $f(x,y)=M(x)N(y)$. 这样，这个微分方程可以改写为

$$\frac{dy}{N(y)}=M(x)dx \tag{7.14}$$

的形式，则称方程 $y'=f(x,y)$ 为可分离变量的微分方程.

注意到方程(7.14)的特殊形式，两边同时积分，即

$$\int\frac{1}{N(y)}dy=\int M(x)dx \tag{7.15}$$

设 $G(y)$ 和 $F(x)$ 分别为 $\frac{1}{N(y)}$ 和 $M(x)$ 的原函数，于是式(7.15)变为

$$G(y)=F(x)+c \tag{7.16}$$

方程(7.14)的解满足关系式(7.16)，由方程(7.16)确定的隐函数 $y=\varphi(x,c)$ 便是(7.14)的通解.

注1：要使用上面的方法解微方程，所求解的微分方程必须有特殊的形式，就是$f(x,y)$能够分解成两个关于x和y的一元函数的积，从而能够写成方程(7.14)的形式. 后面的积分仅仅需要使用不定积分的知识就能完成. 同时需要指出的是，得到的隐式解(7.16)一般不需要化成显示形式.

注2：从上面的求解过程可以看出，需要强加条件函数$N(y)\neq 0$，但实际上原方程并没有这个限制，因此使用该方法可能丢失一些解. 为此，在使用上述方法求解之后，应该验证$N(y)=0$是不是原方程的解. 当$N(y)=0$是原方程的解，同时所求得的通解中不包含该解时，应该加上这个解.

例7.4 求解方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 当$y\neq 0$时，方程可以写成$\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$，两边积分，有

$$\int \frac{dy}{y}=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

即

$$\ln|y|=\arcsin x+c$$

所以原方程的通解为$y=\pm e^{\arcsin x+c}$.

另外，$y=0$时也是方程的解，它不包括在上述通解中，所以原方程的解是$y=0$和$=\pm e^{\arcsin x+c}$.

例7.5 求解微分方程初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\\ y|_{x=0}=1\end{cases}$.

解 在区域$y>0$中，方程为$\dfrac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$，分离变量得到

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}dy=dx$$

两边同时积分可得$\sqrt{y}=x-c$.

利用初始条件$y(0)=1$，得到$c=-1$，特解为$\sqrt{y}=x+1$，故$y=(x+1)^2(x>-1)$为原初值问题的解.

例7.6 求微分方程$(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$的解.

解 改写原方程：$e^x(e^y-1)dx=-e^y(e^x+1)dy$，按"左边只保留含 x 的项，右边只保留含 y 的项"的原则，并假定 $y\neq0$ 时（保证下式右端分母不为0），可以得到

$$\frac{e^x}{(e^x+1)}dx=-\frac{e^y}{(e^y-1)}dy$$

两边同时积分，即

$$\int\frac{e^x}{(e^x+1)}dx=\int-\frac{e^y}{(e^y-1)}dy$$

得到

$$\ln(e^x+1)+C_1=-\ln(e^y-1)$$

进一步可以简化得到通解

$$C(e^x+1)(e^y-1)=1$$

其中 $C=e^{c_1}$.

同时，容易验证，$y=0$ 是原方程的解并且不包含在通解中，是一个奇解. 因此，原方程的解是 $C(e^x+1)(e^y-1)=1$ 和 $y=0$.

7.2.2 变量代换的技巧

可分离变量的微分方程要求函数 $f(x,y)$ 能够分离成两个一元函数的乘积，但这个要求限制了该方法的使用. 实际上，有许多微分方程能够通过适当的变量代换，转化成为这类方程. 先看看下面的例子：

例 7.7 求微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-2y}$的通解.

解 微分方程的右端并不能写成关于 x 和 y 的一元函数的乘积，所以，该方程并不是可分离变量的微分方程. 但是，如果令 $u=x-2y$，并将该等式两端对变量 x 求导数，可以得到$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{du}{dx}\right)$，最后代入原方程得：

$$\frac{du}{dx}=\frac{u-2}{u}$$

这是一个可分离变量的微分方程，通过分离变量再积分得：$u+2\ln(u-2)=x+2\ln c$，将 $u=x-2y$ 代入上式得

$$x-2y+2\ln(x-2y-2)=x+2\ln c$$

化简得到

$$\ln(x-2y-2)=y+\ln c$$

所以原方程的通解为 $x-2y-2=ce^{y}$.

例 7.8 形如 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$的方程称为齐次方程,求该方程的解.

解 令 $u=\frac{y}{x}$,则有 $y=ux$ 并进一步可得 $y'=xu'+u$,将其代入方程,这样原方程 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$变为

$$xu'+u=f(u)$$

整理得到

$$xu'=f(u)-u$$

分离变量有

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

此为可分离变量方程,可通过两端同时积分计算该微分方程的解. 如果得到 $u=u(x,c)$是上述方程的通解,则 $y=xu(x,c)$是原方程 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$的通解.

注 3: 上面的两个例子揭示了变量代换的本质和技巧. 对右端函数 $f(x,y)$,寻找一个变量代换,比如 $u=\varphi(x,y)$,一方面,在该代换下,函数 $f(x,y)$能够写成关于 u 的一元函数形式;另一方面,要求函数 $u=\varphi(x,y)$比较简单,以便将 y'写成 u',u 和 x 的表达式,同时 y 写成 u 和 x 的表达式. 这样,得到的新的方程是关于 x 和 u 的微分方程.

注 4: 需要注意的是,在得到关于 u 和 x 的微分方程的通解 $u(x,c)$之后,需要利用代换关系得到原方程的通解 $y(x,c)$.

例 7.9 求微分方程 $y'=x^2+2xy+y^2$的通解.

解 因为 $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$,因此引入变量为 $u=x+y$. 一方面,函数 $x^2+2xy+y^2$写成为关于 u 的一元函数u^2,另一方面能简单解出 $y'=u'-1$. 因此方程改写成为$u'-1=u^2$.

分离变量得$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x$.

两边积分得 $\arctan u=x+c$, 即 $u=\tan(x+c)$.

再将 u 换回 $x+y$,得:$x+y=\tan(x+c)$,

故原方程的通解为 $y=\tan(x+c)-x$.

例 7.10 求微分方程 $2xyy'=x^2+y^2$ 的通解.

解 因为 $2xyy'=x^2+y^2$,

所以 $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}=\dfrac{x}{2y}+\dfrac{y}{2x}$,因此该方程是一个齐次方程.

令 $\dfrac{y}{x}=u$, 则 $y=xu, y'=u+xu'$.

原方程可写成 $u'=-\dfrac{u^2-1}{2ux}$.

分离变量得 $\dfrac{2u}{u^2-1}\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

两边积分得:$\ln|u^2-1|=-\ln|x|+\ln|c|$, 即 $u^2-1=\dfrac{c}{x}$.

再将 u 换回 $\dfrac{y}{x}$,得:$\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=1+\dfrac{c}{x}$,故原方程的通解为 $y^2=x^2+cx$.

注 5:通过观察函数 $f(x,y)$ 的形式而确定代换,下面是一些常见的代换例子.

$$f\left(\frac{x}{y}\right),\text{令 } u=\frac{y}{x}$$

$$f(xy),\text{令 } u=xy$$

$$f(ax+by),\text{令 } u=ax+by$$

$$f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right),\text{令 } u=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}.$$

习题 7.2

一、单项选择题

1. 方程 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}, y(0)=\dfrac{\pi}{4}$ 的特解为( ).

A. $y=\arctan x$ B. $y=\arctan x+\dfrac{\pi}{4}$

C. $y=\arctan x-\dfrac{\pi}{4}$ D. $y=\arctan x+\dfrac{\pi}{2}$