奥数题库

青少年数学国际城市邀请赛试题解答

朱华伟　孙文先　编著

科学出版社

奥数题库

青少年数学国际城市邀请赛试题解答

朱华伟　孙文先　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书收录了"青少年数学国际城市邀请赛"第一届(1999年)至第十二届(2011年)的全部试题,每届包含个人竞赛和队际竞赛两套试题. 本书对每一道试题均给出详解,有些题还给出了多种解法,目的是使读者加深对问题的理解,从中得到有益的启发.

本书可供初中数学资优生、准备中考数学的考生、准备参加各类初中数学竞赛的选手、中学数学教师、高等师范院校数学教育专业大学生、数学爱好者及数学研究工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

青少年数学国际城市邀请赛试题解答/朱华伟,孙文先编著. —北京:科学出版社,2013.1

(奥数题库)

ISBN 978-7-03-035838-7

Ⅰ.①青… Ⅱ.①朱…②孙… Ⅲ.①数学-竞赛题-题解 Ⅳ.①O1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第249104号

责任编辑:李 敏/责任校对:李 影

责任印制:钱玉芬/整体设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

北京天时彩色印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013年1月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2013年1月第一次印刷 印张:12 插页:2

字数:240 000

定价:33.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

张景中谈奥数

华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分．这个看法是言之成理的．数学要解题，要发现问题、创造方法．年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态．早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题．竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑．

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话．有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒．我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧．再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训．就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动．这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五．从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可．对于

青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流. 发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了.

摘自《走进教育数学》丛书总序

前　言

“青少年数学国际城市邀请赛”(Invitational World Youth Mathematics Inter-City Competition，IMC）始于1999年，是由台湾高雄师范大学创办的国际性数学竞赛，每年举行一届，2003年因“非典”停办一届，历届赛事分别在中国台湾、菲律宾塔盖泰、印度勒克瑙、中国澳门、韩国仁川、南非德班、印度尼西亚巴厘岛、中国温州和长春等地举行．刚开始时只有六七个国家和地区参赛，2011年由印度尼西亚教育部主办，参赛的国家和地区已达29个．

这项赛事旨在为青少年提供一个国际交流的机会，促进世界各地青少年的友谊及合作精神，发掘世界各地资优学生的数学潜能．每一次IMC都是世界各地青少年数学爱好者的一次盛会，对激发学生的学习兴趣、开发智力、培养创新能力、开阔视野有着非常积极的作用．

数学竞赛并非另类数学，而是一种追求数学知识及逻辑思维的智力发展的有效途径，也是多方面能力的锻炼．这些能力包括思考所需的专注能力，寻求解答的不屈不挠的劲头，团队分工、互助合作的精神．通过数学竞赛还可以了解世界各国数学教育的模式及数学课程的现状，为各国的数学教育改革提供一个实验平台．

目前参加IMC赛事的有20多个国家和地区的代表队，以城

市为邀请单位，每一个城市派出的代表队由一名领队、一名副领队和4名（或不多于4名）学生组成，须为未满15周岁且尚未就读高中的青少年学生.

IMC的比赛项目分个人竞赛和队际竞赛．个人竞赛包括12个填空题和3个解答题，要求在2小时内完成；队际竞赛分两阶段进行，须在1小时内完成：第一阶段，全队4名选手先利用10分钟商议分配前8题，在35分钟内独立完成各自分配的问题，每位成员至少解答1题；第二阶段，4名选手在15分钟内一起讨论最后2题并合作完成.

竞赛试题由每届邀请赛评审委员会命制和审定，个人竞赛试题部分侧重图形分析能力、数学逻辑思维与文字表达能力，全面考察学生的数学智慧及综合素质；队际竞赛试题常以实际生活为设题背景，注重试题的趣味性，并以其团队性考察学生们通力合作、齐心协力解决难题的能力．青少年数学城市邀请赛以其新颖、创意的试题，让热爱数学的青少年享受思考的乐趣，欣赏数学之美.

本书收录了1999～2011年IMC初中组的全部试题，对每一道试题均给出了详细解答，有些题还给出了多种解法，目的是使读者加深对问题的理解，可以从中得到有益的启发.

参加本书编写工作的还有广州大学软件所郑焕博士、博士生付云皓，广州大学附中周弋林、杨姗老师等.

对于本书存在的不足，热忱希望读者不吝赐教.

朱华伟　孙文先

2011年12月

目　　录

张景中谈奥数

前言

第 1 章　第一届青少年数学国际城市邀请赛 …… 1

1.1　个人竞赛试题 …… 1

1.2　个人竞赛试题解答 …… 4

1.3　队际竞赛试题 …… 8

1.4　队际竞赛试题解答 …… 10

第 2 章　第二届青少年数学国际城市邀请赛 …… 13

2.1　个人竞赛试题 …… 13

2.2　个人竞赛试题解答 …… 14

2.3　队际竞赛试题 …… 19

2.4　队际竞赛试题解答 …… 20

第 3 章　第三届青少年数学国际城市邀请赛 …… 26

3.1　个人竞赛试题 …… 26

3.2　个人竞赛试题解答 …… 27

3.3　队际竞赛试题 …… 32

3.4　队际竞赛试题解答 …… 34

第 4 章　第四届青少年数学国际城市邀请赛 …… 42

4.1　个人竞赛试题 …… 42

4.2　个人竞赛试题解答 …… 44

4.3　队际竞赛试题 …… 51

4.4　队际竞赛试题解答 …… 53

第 5 章　第五届青少年数学国际城市邀请赛 …… 59

5.1　个人竞赛试题 …… 59

5.2　个人竞赛试题解答 …… 61

5.3 队际竞赛试题 …… 69
5.4 队际竞赛试题解答 …… 71
第6章 第六届青少年数学国际城市邀请赛 …… 79
6.1 个人竞赛试题 …… 79
6.2 个人竞赛试题解答 …… 81
6.3 队际竞赛试题 …… 85
6.4 队际竞赛试题解答 …… 86
第7章 第七届青少年数学国际城市邀请赛 …… 91
7.1 个人竞赛试题 …… 91
7.2 个人竞赛试题解答 …… 93
7.3 队际竞赛试题 …… 97
7.4 队际竞赛试题解答 …… 99
第8章 第八届青少年数学国际城市邀请赛 …… 105
8.1 个人竞赛试题 …… 105
8.2 个人竞赛试题解答 …… 108
8.3 队际竞赛试题 …… 113
8.4 队际竞赛试题解答 …… 116
第9章 第九届青少年数学国际城市邀请赛 …… 122
9.1 个人竞赛试题 …… 122
9.2 个人竞赛试题解答 …… 124
9.3 队际竞赛试题 …… 130
9.4 队际竞赛试题解答 …… 133
第10章 第十届青少年数学国际城市邀请赛 …… 141
10.1 个人竞赛试题 …… 141
10.2 个人竞赛试题解答 …… 143
10.3 队际竞赛试题 …… 147
10.4 队际竞赛试题解答 …… 149
第11章 第十一届青少年数学国际城市邀请赛 …… 154
11.1 个人竞赛试题 …… 154
11.2 个人竞赛试题解答 …… 156

11.3　队际竞赛试题 …… 162
11.4　队际竞赛试题解答 …… 164
第 12 章　第十二届青少年数学国际城市邀请赛 …… 170
12.1　个人竞赛试题 …… 170
12.2　个人竞赛试题解答 …… 172
12.3　队际竞赛试题 …… 177
12.4　队际竞赛试题解答 …… 179

第1章　第一届青少年数学国际城市邀请赛

1.1　个人竞赛试题

第一部分

填空题,共12题,每题5分.

1. 设数 $a=122333444455555666666777777788888888999999999$,那么 a 除以9的余数为__________.

2. 图1-1中角 a、b、c、d 的度数之和为__________.

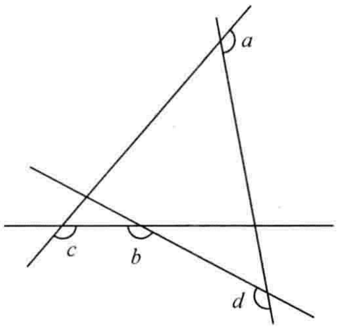

图1-1

3. 在 $1^2,2^2,\cdots,1999^2$ 中,十位上的数字为奇数的数共有__________个.

4. 有一幢建筑物高60m,在白天某时刻的影子长40m,这个建筑物的顶楼插着一根旗杆,长2m,在这个时刻,旗杆的影子长__________ m.

5. 计算 $1999^2-1998^2+1997^2-1996^2+\cdots+3^2-2^2+1^2=$__________.

6. 如果一个4位数中正好有两位上的数字相同,称为"好数",例如:3445、3231是好数,但3443、3233不是好数,那么所有的四位数中千位是3的好数有__________个.

7. 如图1-2所示,已知等边三角形的边长为1,若在三角形内有3个大小相等的圆彼此相切且与三角形的边相切,那么圆的半径为__________.

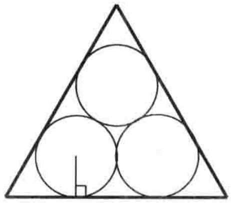

图 1-2

8. 设 A、B、C 为 3 个正整数，A 的平方加 160 等于 B 的平方加 5，且 A 的平方加 320 等于 C 的平方加 5，那么 $A=$__________.

9. 设 x 为一个两位数，$f(x)$ 为 x 加上其数字和再减去其数字积，例如：$x=32$，那么 $f(x)=32+3+2-6=31$，当 x 为__________时，$f(x)$ 有最大值.

10. 如图 1-3 所示，在直角△ABC 中，AB 长为 15，AC 长为 8，点 E、G 在 AC 上，点 D、F 在 AB 上，若 CD、DE、EF、FG 将△ABC 分成 5 个面积相等的部分，且 CD、DE、EF、FG 中只有一条线段的长度为整数，这个整数等于__________.

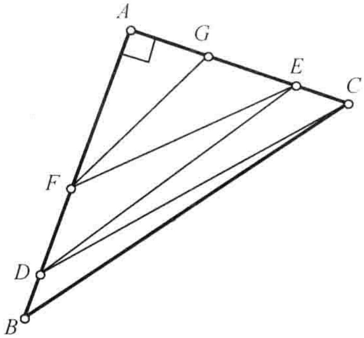

图 1-3

11. 如图 1-4 所示，图中不包含阴影部分的正方形共有__________个.

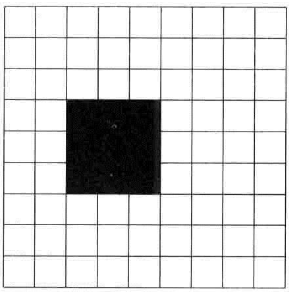

图 1-4

12. 设有 A、B 两个委员会，其中 A 委员会有 13 名委员，B 委员会有 6 名委员．在本年度召开的会议期间，若每位委员出席会议的天数在 30 天以内（含 30 天），那么每天可以支领 6000 元车马费，若会议超过 30 天，超出的天数每天支领 9000 元车马费，已知 B 委员会开会的天数是 A 委员会开会的天数的 2 倍，在本年度会议两个委员会所支出的车马费都相同，且这两个委员会车马费的总开支超过 3000000 元，那么这两个委员会实际支领的车马费总共__________元．

第二部分

解答题，共 3 题，每题 20 分．

1. 如图 1-5 所示，用铁丝围成棱长为 1 的正方体，有一只蚂蚁从点 A 出发，沿着这个正方体的棱（铁丝）爬行但不能走重复的路线，如果它要回到原来的 A 点，请问这只蚂蚁所经过的路径最长为多少？（说明理由）

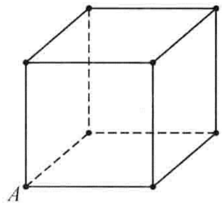

图 1-5

2. 如图 1-6 所示，已知 $AC=8CE$、$BC=4BD$. 若 $AD=164$、$BE=52$，试求 AB 的长．

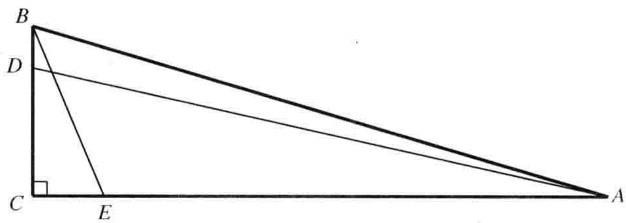

图 1-6

3. 将一个 6 位数分别乘以 2、3、4、5、6 后得到的数还是由原来的 6 位数的数字组成，只是改变了原来数字排列的位置，试求原来的数是多少？

1.2　个人竞赛试题解答

第一部分

1. 答案:6.

解　直接运算,余数为 6.

评注　被除数比较大,直接运算较复杂,考虑到除数为 9,利用同余,计算数 a 的数字和除以 9 的余数. 数 a 的数字和为

$$\begin{aligned}1+2\times2+3\times3+\cdots+9\times9&=1+2^2+3^2+\cdots+9^2\\&=1+4+9+\cdots+81\\&=285.\end{aligned}$$

数字和为 285,285 除以 9 的余数为 6,即数 a 除以 9 的余数为 6.

2. 答案:540°.

解　如图 1-7 所示,角 c 等于 $\angle1+\angle2$,角 a 等于 $\angle3+\angle4$,因此

$$a+b+c+d=\angle3+\angle4+b+\angle1+\angle2+d.$$

又因为 $\angle3+\angle1=180°$、$b+\angle2=180°$、$\angle4+d=180°$,因此 $a+b+c+d=540°$.

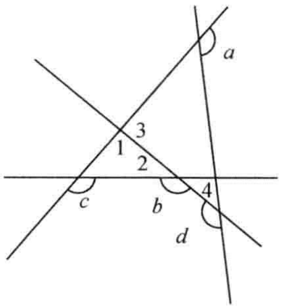

图 1-7

3. 答案:400.

解　一个正整数的平方的十位上的数字为奇数,当且仅当这个正整数的个位为 4 或 6,因此满足条件的数共有 400 个.

4. 答案:$\dfrac{4}{3}$m.

解　设旗杆的影子长 xm,

$$\frac{60}{40}=\frac{2}{x},$$

解得 $x=\frac{4}{3}$.

5. 答案:1999000.

解

由平方差公式:

$$
\begin{aligned}
&1999^2-1998^2+1997^2-1996^2+\cdots+3^2-2^2+1^2\\
=&(1999^2-1998^2)+(1997^2-1996^2)+\cdots+(3^2-2^2)+1^2\\
=&1999+1998+1997+1996+\cdots+3+2+1\\
=&\frac{(1999+1)1999}{2}\\
=&1999000.
\end{aligned}
$$

6. 答案:432 个.

解　有两种情况:

第一,相同的数字为 3:共有 $C_1^3 \times C_1^9 \times C_1^8=216$ 种;

第二,相同的数字不为 3:共有 $C_2^3 \times C_1^9 \times C_1^8=216$ 种;

满足条件的好数共有 432 个.

7. 答案:$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

解　如图 1-8 所示添加辅助线,设圆的半径为 x, $\angle ABC=30°$,那么 $AC=\sqrt{3}x$、$BC=2x$,因为三角形边长为 1,即

$$2x+2\sqrt{3}x=1,$$

解得 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

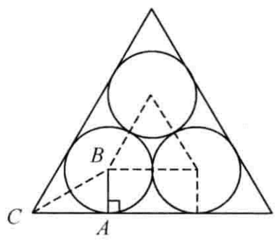

图 1-8

8. 答案:13.

解　由题意得 $A^2+160=B^2+5$、$A^2+320=C^2+5$,即

$$B^2-A^2=(B+A)(B-A)=155、C^2-A^2=315.$$

因为 $155=31\times5$，因此 $B+A=31$、$B-A=5$，即 $B=18$、$A=13$、$C=22$.

9. 答案：90.

解 设 $x=\overline{ab}=10a+b$，那么

$$\begin{aligned}f(x)&=10a+b+a+b-ab\\&=11a+2b-ab\\&=(a-2)(11-b)+22.\end{aligned}$$

要使 $f(x)$ 有最大值，那么 $a-2$、$11-b$ 都要有最大值，即 $a=9$、$b=0$，$f(x)$ 最大值为 99. 因此 x 为 90.

10. 答案：10.

解 $\dfrac{AG}{GE}=\dfrac{\triangle GFA}{\triangle EFG}=\dfrac{1}{1}$、$\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{\triangle ADE}{\triangle EDC}=\dfrac{3}{1}$，所以 $EC=2$、$AE=6$、$AG=GE=3$.

同理，$\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{\triangle AEF}{\triangle FED}=\dfrac{2}{1}$、$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{\triangle ACD}{\triangle DCB}=\dfrac{4}{1}$，所以 $BD=3$、$AD=12$、$AF=8$、$FD=4$.

由勾股定理：

$$\overline{GF}=\sqrt{AF^2+AG^2}=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73},$$

$$\overline{FE}=\sqrt{AF^2+AE^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10,$$

$$\overline{DE}=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{12^2+6^2}=\sqrt{180},$$

$$\overline{DC}=\sqrt{AD^2+AC^2}=\sqrt{12^2+8^2}=\sqrt{208}.$$

长度为整数的线段为 FE，$FE=10$.

11. 答案：150.

解 不包含阴影部分的正方形有大小不同的几种类型：

面积为 1 的正方形：$9\times9-3\times3=81-9=72$；

面积为 4 的正方形：$8\times8-4\times4=64-16=48$；

面积为 9 的正方形：$7\times7-5\times5=49-25=24$；

面积为 16 的正方形：6；

共有：$72+48+24+6=150$ 个.

12. 答案：14040000.

解 设 A 委员会开会的天数为 x 天：

(1) 假设 $x\leqslant15$：$13\times6000x\leqslant1170000$，由条件知 A 委员会至少支出车马费 1500000，矛盾；

(2) 假设 $15<x\leqslant30$：

A 委员会支出：$13\times6000x$，

B 委员会支出：$6[6000\times30+9000(2x-30)]$.

由题意：$13\times6000x=6[6000\times30+9000(2x-30)]$，$x=18$，总车马费为 2808000 元，小于 3000000 元，不合题意；

(3) 假设 $x>30$：

A 委员会支出：$13[6000\times30+9000(x-30)]=117000x-1170000$，

B 委员会支出：$6[6000\times30+9000(2x-30)]=108000x-54000$，

由题意：$117000x-1170000=108000x-54000$，解得 $x=70$，

总支出为 $(117000\times70-1170000)\times2=14040000$.

第二部分

1. 答案：8cm.

解　因为要求最长的路径，则蚂蚁经过的顶点最多为 8 个点（图 1-9），即路径小于或等于 8cm，如 $A\to B\to F\to G\to C\to D\to H\to E\to A$.

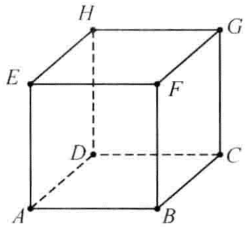

图 1-9

2. 答案：$16\sqrt{109}$.

解　设 $CE=x$、$BD=y$，则 $AC=8x$、$BC=4y$、$CD=3y$.

在直角 $\triangle ACD$ 中，$AD^2=AC^2+CD^2$，即 $(3y)^2+(8x)^2=164^2$，

在直角 $\triangle BCE$ 中，$BE^2=BC^2+CE^2$，即 $(4y)^2+x^2=52^2$，

解得 $x=20$、$y=12$，即 $AC=160$、$BC=48$，

在直角 $\triangle ACB$ 中，$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=16\sqrt{109}$.

3. 答案：142857.

解　设这个 6 位数为 $\overline{abcdef}$，由题意，6 个数字互不相同，且都不为 0；

因为这个数乘以 5、6 后还是 6 位数，因此 $a=1$.

因为 $\overline{abcdef}\times5$ 个位不为 0，那么 f 为奇数，且不为 5.