



张伟平◎著

学生在数学学习中对 无限的认识探究

Research on recognition to infinity for
students in mathematics learning

光明日报出版社



张伟平◎著

学生在数学学习中对 无限的认识探究



Research on recognition to infinity for
students in mathematics learning

光明日报出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

学生在数学学习中对无限的认识探究 / 张伟平著.

-- 北京: 光明日报出版社, 2013. 12

ISBN 978-7-5112-5618-8

I. ①学… II. ①张… III. ①数学教学—教学研究

IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 283141 号

学生在数学学习中对无限的认识探究

著 者: 张伟平

责任编辑: 曹美娜

责任校对: 张明明

封面设计: 中联学林

责任印制: 曹 净

出版发行: 光明日报出版社

地 址: 北京市东城区珠市口东大街 5 号, 100062

电 话: 010-67078248 (咨询), 67078870 (发行), 67078235 (邮购)

传 真: 010-67078227, 67078255

网 址: <http://book.gmw.cn>

E - mail: gmcbbs@gmw.cn caomeina@gmw.cn

法律顾问: 北京天驰洪范律师事务所徐波律师

印 刷: 北京天正元印务有限公司

装 订: 北京天正元印务有限公司

本书如有破损、缺页、装订错误, 请与本社联系调换

开 本: 710 × 1000 毫米 1/16

字 数: 222 千字 印 张: 14.5

版 次: 2014 年 7 月第 1 版 印 次: 2014 年 7 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5112-5618-8

定 价: 43.00 元

版权所有 翻印必究

上海师范大学教师教育改革项目：师范专业基础
课建设 (B-6001-11-001180)

上海师范大学校级项目：职前教师基于行为的诊
断式体验性课程的开发和应用 (SK201307)

自序

继 PISA2009 测试中上海学生首次夺冠后，2013 年再传强音：PISA2012 测试中上海学生再次问鼎。众所周知，PISA 测试主要考察学生的三大素养：阅读素养、数学素养和科学素养。2012PISA 测试以数学为主测，单看数学科目，上海学生要比排名第二的新加坡（573 分）足足高出 40 分，优势明显。用遥遥领先来形容上海学生的数学素养并不为过（张民选，2014）。本书恰是以上海学生为样本，从学生在数学学习中对无限认识的视角来研究学生数学素养，本书的出版可谓是应运而生。

事实上，重视科学教育在国际上已蔚然成风。2009 年美国《复苏与再投资法案》（American Recovery and Reinvestment Act of 2009）的“力争上游”教育拨款计划中，奥巴马政府就明确将 STEM 教育作为重要指标。STEM 教育是指以科学、技术、工程和数学（Science, Technology, Engineering, Mathematics）为主要对象的教育活动。时至今日，美国 STEM 教育已经发展成教育管理部门、教育研究者、中小学师生、教育实体机构等共同参与协作的立体、全方位的教育共同体模式。也许借 PISA 测试之东风和国际潮流，我国数学教育研究也会迎来新的明媚春天。

正如 PISA 测试评估的理念是考察学生运用知识和技能解决实际问题的能力，而不是考查纯学科的知识和技能，本研究也聚焦于学生数学无限认知能力。本书参考国内外相关研究，综合数学哲学、数学发展史、认识论三个视角，将学生对数学无限的认识划分为 5 大层级，八大层次的金字塔结构：朴素认识、直觉层次（初步直觉层次、高级直觉层次）、思辨方式（潜无限

方式、实无限方式)、演绎层次(无穷小分析层次、严密系统层次)、超限数理论。在此基础上系统地精心编撰了数学无限认识量表,并利用量表采用大样本(524人)实地调查了上海小学一年级、初二学生、高三学生、大二学生的无限认识现状,针对现状分析了个中原因。大样本调查所得结论可供教学研究的二次素材,为教学决策提供参考和借鉴。本研究对无限认识梳理得层次分明,学生调查研究年龄跨度大,能使各个年龄层次读者对数学的认识转换思维视角,有清新明朗之感。

本研究为科学教育提供了实践操作性很强的“数学无限认识量表”,用来检测学生的貌似与数学考试无关的无限认识等级,但实实在在地与学生的数学素养相关联。尤其是在大学教育跨入“大众化”时代,越来越多的学生需要接触高等数学,或作研究,或当作工具,而高等数学恰是以无限集合为研究对象的。让数学面目更亲和些,让学生多懂一点与考试无关的数学素养,乃是数学教育工作者的心愿。

PISA 测试使得世界的眼光投向了中国,对中国的数学教育加以总结和提炼,乃是时代之造势。本书恰似中国数学教育研究的一朵浪花,以飨读者。

张伟平

2014年5月26日于上师大

前 言

数学是无限的科学，数学无限是推动数学发展的重要动力，但无限隐藏在相关数学概念中，中学对数学无限一般避而不谈。中学数学大纲没有明确提出学生对“无限”的认识目标。特别是学生对极限概念理解困难，极限概念成为学生学习微积分的“拦路虎”。鉴于此，笔者分层次考察学生对无限的认识，主要从以下两方面着手：

线索一：学生对无限诸层次的认识状况

(1) 初三、高三和大二学生实际达到的无限水平如何？影响学生诸层次无限认识的本质因素是什么？

(2) 在给出的每一层次的标准尺度的基础上，学生表现出怎样的较稳定的认知方式？容易出现哪些错误的心理模式？

线索二：学生对相关数学无限概念的理解

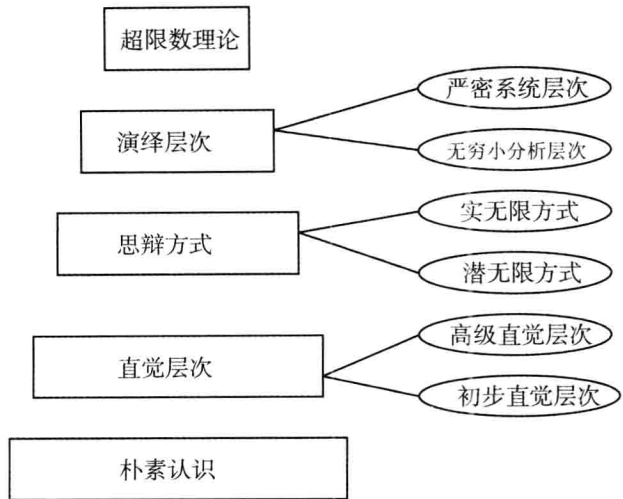
(1) 学生如何认识数学概念中的无限？表现出哪些比较稳定的认知方式？

(2) 学生认识数学概念中的无限过程中容易出现哪些错误心理模式？

首先，笔者界定了本文研究的无限。学生学习的数学中没有直接给出无限的定义，也不可能直接给出定义。无限包含于具体的数学概念中。有的以显性方式呈现，如自然数、平行线；有的隐含于数学概念中，如函数单调性、交换律；有的存在于某一特定对象的无限过程中，比如函数极限、从集合出发的超限数理论。本文研究的无限是具体数学概念中包含的无限。

接着，从数学哲学、数学发展史、认识论三个角度出发，笔者将学生对

无限的认识划分为 5 大层级，八大层次的金字塔结构。



笔者界定了每一层次的涵义，分析了各个层次之间的关系，并根据文献资料，精心编制了无限认识量表，在此基础上对学生的无限认识展开了研究。

笔者以 Spiro (1991) 提出的个体学习的认知弹性理论，美国数学教育学家 Ed Dubinsky 的 APOS 理论为依据，运用潜、实无限辩证分析法、无限 - 有限辩证分析等方法，对学生的无限认识进行分析。

笔者选取了小学、初中、高中、大学二年级共计 500 多学生作为实证研究的样本，作了问卷测试，并分别从每一一年级各选出 8 名学生共计 24 名学生作为个案研究对象，对学生的个别访谈作了全程录像或录音。还对初三年级、高中、大二年级的部分教师作了访谈。获取了第一手数据资料后，用 SPSS 统计软件对数据进行统计分析。横向比较了同一年龄的不同学生的理解层次。通过个案访谈，笔者从数学无限的理解、数学思维、学生心理方面，分析了学生的无限认识状况，纵向比较了不同年龄学生的无限认识状况，分析了学生无限认识的心理倾向，得到了以下结论：

1. 从初三到高三学生无限认识的总体发展趋势

高中阶段是学生无限水平蓬勃发展的阶段，具体表现为从初三到高三，学生的无限直觉水平、无限思辩能力显著提高，但到大二，这两方面并无显

著差异。高三学生的无限直觉水平、无限思辨能力具有一定的稳定性。

2. 学生对无限本质的认识

- (1) “无穷大”的抽象化认识是具备初步直觉认识的重要标志
- (2) “整体认知”是影响高级直觉认知的重要因素
- (3) “动态分析”是演绎层次的重要标志
- (4) 理解极限定义中的“有分界”的无限是关键

3. 学生对数学无限概念的认识

- (1) 大二学生对连续、导数、定积分中的“无限逼近”思想认识不足
- (2) 影响学生理解定义的原因分析

4. 学生无限认识的心理倾向

- (1) 生活经验在一定程度上阻碍学生对数学无穷大的认识
- (2) 高三学生的无限思辨的心理倾向性特点
- (3) 大二学生对“一一对应”和超限数的认识倾向

在以上结论的基础上,对数学教学提出了建设性意见和建议:

1. 在教学中注重学生无限观的培养

- (1) 在教学中抓住无限认识的开端
- (2) 启发学生整体认知数学概念
- (3) 教学中有意识采取有利于学生无限思辨的教学方法
- (4) 注重对极限概念的动态分析
- (5) 教学中注重对定义中的“有分界”的无限的诠释
- (6) 关于超限数理论的教学

2. 注重提高中学教师的数学无限素养

3. 对教材体系安排的一点建议

4. 建议在数学课标中体现无限观培养的具体要求

- (1) 明确提出无限观培养目标
- (2) 建议在中学数学课程标准中增加无限观培养的一个实例

5. 对教学评价的建议

目 录

CONTENTS

第一章 导论	1
1.1 问题提出的背景 1	
1.1.1 数学无限的认识发展一瞥 2	
1.1.2 对数学无限的认识窘状 6	
1.2 研究的问题 6	
1.2.1 研究的线索一:学生对无限的诸层次的认识状况和影响因素 6	
1.2.2 研究的线索二:学生对相关数学无限概念的理解 7	
1.3 本研究的意义 7	
1.4 本书的结构 8	
第二章 文献述评和研究思想框架的形成	10
2.1 关于无限的界定 10	
2.1.1 关于哲学上的无限的界定 10	
2.1.2 关于数学哲学上的无限界定 11	
2.1.3 本书所研究的数学无限的界定 11	
2.2 无限思辩的两个观点 12	
2.2.1 哲学意义上的潜无限和实无限 12	

2.2.2	数学上的潜、实无限观的认识发展一瞥	14
2.2.3	数学上的三大流派对无限的不同观点	16
2.2.4	小结	18
2.3	对无限认识的研究综述	18
2.3.1	对个体实无限的认识研究	18
2.3.2	关于无限的隐喻(metaphor)研究	20
2.3.3	关于无限认识的分类研究	21
2.4	研究思想架构的形成	22
2.4.1	学习的认知弹性理论	22
2.4.2	数学概念学习的 APOS 理论	24
2.4.3	无限认识层次划分的依据	26
2.4.4	层次划分	30
2.4.5	无限认识量表使用说明	33
第三章 研究的设计与方法		34
3.1	总体和样本	34
3.1.1	学校	34
3.1.2	学生和教师	35
3.2	研究工具	36
3.2.1	问卷调查表	36
3.2.2	访谈	37
3.2.3	工具的试验	38
3.3	研究的具体问题	38
3.3.1	线索一的具体研究问题	38
3.3.2	线索二的具体研究问题	38
3.4	数据收集,处理与分析	39
3.4.1	数据收集与评分	39
3.4.2	数据的处理与分析	39
3.5	研究的优点和局限性	40

第四章 研究结果(一):朴素认识 41

- 4.1 朴素认识是学生认识无限的开端 41
- 4.2 朴素认识的标准尺度 43
- 4.3 研究结果一:初三学生对无限的朴素认识 45
 - 4.3.1 初三学生对无限的朴素认识的普遍状况 45
 - 4.3.2 初三学生朴素认识的心理模式特点 45
- 4.4 研究结果二:初三学生和高三学生的朴素认识没有显著性差异 49
- 4.5 小结 50
 - 4.5.1 生活经验在一定程度上阻碍学生对数学无穷大的认识 50
 - 4.5.2 高三学生和初三学生的朴素认识没有显著性差异 51
 - 4.5.3 教学启示和建议 51

第五章 研究结果(二):直觉认知 53

- 5.1 初级直觉认知和高级直觉认知的内涵 54
- 5.2 直觉认知的标准尺度 55
- 5.3 研究结果一:初三学生的初级直觉认知 57
 - 5.3.1 初三学生的初级直觉认知的大体得分状况分析 57
 - 5.3.2 初三学生容易出现无限直觉的经验化心理趋向 58
 - 5.3.3 初三学生直觉认知水平与数学成绩的相关性 61
- 5.4 研究结果二:高三学生的高级直觉认知 63
 - 5.4.1 高三学生高级直觉认知现状分析 63
 - 5.4.2 实证研究 63
- 5.5 研究结果三:学生直觉认知的年龄阶段性 65
 - 5.5.1 小学生的无限直觉认识 65
 - 5.5.2 初中生与高中生初步直觉认识比较 66
 - 5.5.3 高三学生和大二学生高级直觉认识比较 68
- 5.6 研究结果四:学生对涉及无限的数学概念的直觉认知 70
 - 5.6.1 初三学生对平行线的理解 70
 - 5.6.2 高三学生对单调性的实无限认知 77

5.6.3 小结	86
5.7 教师的无限直觉认知的一点调查	87
5.8 小结	89
5.8.1 “无穷大”的抽象化认识是具备初步直觉认识的重要标志	89
5.8.2 “整体认知”是影响高级直觉认知的重要因素	90
5.8.3 教学启示和建议	90
第六章 研究结果(三):无限思辩方式	92
6.1 无限思辩方式的内在矛盾性	92
6.1.1 无限思辩方式内在矛盾性内涵	92
6.1.2 无限思辩方式的三维结构	93
6.2 思辩方式的标准尺度	94
6.3 高三学生的无限思辩特点分析	98
6.3.1 现状分析	98
6.3.2 高三学生的无限思辩特点	99
6.3.3 个案对比研究分析	103
6.3.4 思辩方式得分和学生的数学成绩的相关性	105
6.4 高三学生无限思辩能力的稳定性	106
6.4.1 高三和初三学生思辩能力比较	106
6.4.2 高三学生与大二学生思辩能力比较	107
6.5 小结	109
6.5.1 高三学生的无限思辩方式特点	109
6.5.2 高三学生无限思辩能力具有稳定性	109
6.5.3 教学启示和建议	109
6.5.4 初三、高三学生无限认识水平的简要概括	111
第七章 研究结果(四):演绎层次	112
7.1 演绎层次的内涵	112
7.1.1 极限和无限的关系	113

7.1.2	极限的思想内涵	113
7.1.3	语言的本质	115
7.2	演绎层次的标准尺度	116
7.2.1	无穷小分析(极限)的标准尺度	116
7.2.2	严密系统层次的标准尺度	116
7.3	研究结果一:大二学生对演绎层次的理解	116
7.3.1	大二学生对演绎层次的总体得分状况	116
7.3.2	大二学生对极限的思想内涵的理解	117
7.3.3	大二学生对语言的理解	120
7.3.4	大一学生对定义中包含的“有分界”的无限的理解	130
7.4	研究结果二:大二学生对涉及极限的数学概念的定義的理解	134
7.4.1	微积分总体无限逼近思想的几何直观——以直代曲	134
7.4.2	大二学生对连续、可导、可积的极限思想的理解	136
7.5	对高校数学教授定义的理解的一点调查	139
7.6	替代定义的某些尝试	141
7.6.1	张景中院士的“不等式法”的思想	142
7.6.2	张景中院士的“不等式法”的意义	142
7.7	小结	143
7.7.1	“动态分析”是演绎层次的重要标志	143
7.7.2	理解极限的定义中的“有分界”的无限是关键	143
7.7.3	阻碍学生理解定义的主要因素	143
7.7.4	大二学生对连续、导数、定积分中的“无限逼近”思想认识不足	144
7.7.5	教学启示和建议	144
第八章	研究结果(五):超限数理论初步认识	145
8.1	超限数理论的内涵	145
8.1.1	Cantor 发明超限数理论一瞥	146
8.1.2	Cantor 的超限数理论是实无限理论	147

- 8.2 超限数理论初步思想的标准尺度 148
- 8.3 研究结果一:大二学生对无限集合“一一对应”的理解 150
 - 8.3.1 学生对“不同长度线段的点数相同”的理解 150
 - 8.3.2 实证研究 154
- 8.4 研究结果二:大二学生对超限数运算的理解 159
 - 8.4.1 超限数运算的涵义 159
 - 8.4.2 实证研究 160
- 8.5 研究结果三:“芝诺悖论”解释—极限和超限数理论的共同应用 162
 - 8.5.1 关于“芝诺悖论”的解释 162
 - 8.5.2 学生对“芝诺悖论”的认识状况调查 165
- 8.6 小结 167
 - 8.6.1 大二学生对“一一对应”理解倾向 167
 - 8.6.2 大二学生对超限数的认识倾向 167
 - 8.6.3 教学启示和建议 167

第九章 结论、建议和反思 168

- 9.1 从初三到高三学生无限认识的总体发展趋势 168
- 9.2 学生对无限本质的认识 169
 - 9.2.1 “无穷大”的抽象化认识是具备初步直觉认识的重要标志 169
 - 9.2.2 “整体认知”是影响高级直觉认知的重要因素 169
 - 9.2.3 “动态分析”是演绎层次的重要标志 170
 - 9.2.4 理解极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义中的“有分界”的无限是关键 170
- 9.3 学生对数学极限概念的认识 170
 - 9.3.1 大二学生对连续、导数、定积分中的“无限逼近”思想认识不足 170
 - 9.3.2 阻碍学生理解 $\varepsilon - \delta$ 定义的主要因素 171
- 9.4 学生无限认识的心理倾向 171
 - 9.4.1 生活经验在一定程度上阻碍学生对数学无穷大的认识 171

9.4.2	高三学生的无限思辩的心理倾向性	172
9.4.3	大二学生对“一一对应”和超限数的认识倾向	172
9.5	教学建议	173
9.5.1	在教学中注重学生无限观的培养	173
9.5.2	注重提高中学教师的数学无限素养	176
9.5.3	对教材体系安排的一点建议	176
9.5.4	建议在数学课标中体现无限观培养的具体要求	177
9.5.5	对教学评价的建议	180
9.6	本研究的不足和进一步研究的方向	180
9.6.1	本研究的不足	180
9.6.2	进一步研究的方向	181
参考文献		182
附录一 初三学生无限认识量表		191
附录二 大一新生(高三学生)无限认识量表		197
附录三 大二学生无限认识量表		203
附录四 实数与实数集合中无限的魅力		210
后 记		213

第一章

导论

1.1 问题提出的背景

无穷大！任何一个其他问题都不曾如此深刻地影响人类的精神；任何一个其他观点都不曾如此有效地激励人类的智力；然而，没有任何概念比无穷大更需要澄清……

——Hilbert (1862 ~ 1943)

数学是无限的科学 (Howell)

根据我的理解，人类的不幸来自于他的伟大；因为他的心中有一个无穷大，人类借助于他所有的技巧，也无法把它埋藏在有限之中。

——Tomas Kalire (1795 ~ 1881)

Kant 甚至认为，时间和空间无限本身并不存在，只是人为构造的性质，是经过人脑努力而存在于人脑外部世界。

很多领域都提到了无限。绘画家 Escher 在他的绘画里画出了无穷大，而没有别的艺术家曾这样做。在文学中，无限是一种意境。“孤帆远影碧空尽”，“无边落木萧萧下”，是一种心境的抒发。最能直接反映古人无限的诗句，则是初唐诗人陈子昂的诗：

“前不见古人，后不见来者；
念天地之悠悠，独怆然而涕下。”