SHUANGCEDU DE

WENDINGXING FENXI

# 双测度的稳定性分析

王 娟 何莉敏 侯玉双 著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

# 双测度的稳定性分析

王　娟　何莉敏　侯玉双　著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

## 内 容 简 介

本书的三位作者长期参加“混合动力系统理论研究及其应用”科研小组(由内蒙古科技大学应用数学系的杨金林教授和加拿大滑铁卢大学应用数学系的刘新芝教授组织)的研究讨论，本书在此基础之上编著而成。全书共分5章，分别讲述控制理论中的数学基础及双测度稳定性的基本理论、改进、推广和应用。

本书的第0章可作为高等院校数学与应用数学及自动控制专业等本科生参考阅读，第1～4章可作为高等院校数学与应用数学及自动控制专业等研究生参考阅读，亦可作为相关领域科技人员使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

双测度的稳定性分析 / 王娟，何莉敏，侯玉双著. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2014.4
ISBN 978-7-5635-3902-4

Ⅰ. ①双… Ⅱ. ①王… ②何… ③侯… Ⅲ. ①自动控制理论—研究 Ⅳ. ①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第076716号

**书　　名**：双测度的稳定性分析
**著作责任者**：王娟　何莉敏　侯玉双　著
**责 任 编 辑**：张珊珊
**出 版 发 行**：北京邮电大学出版社
**社　　址**：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)
**发 行 部**：电话：010-62282185　**传真**：010-62283578
**E-mail**：publish@bupt.edu.cn
**经　　销**：各地新华书店
**印　　刷**：北京联兴华印刷厂
**开　　本**：787 mm×1 092 mm　1/16
**印　　张**：13.75
**字　　数**：300千字
**版　　次**：2014年4月第1版　2014年4月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-3902-4　　定　价：36.00元

**·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·**

# 前　言

现实世界中(如自然科学、工程技术、环境生态、社会经济等方面)的问题既具有复杂性又具有多学科交叉的特点。尽管不同问题之间存在明显的差异,但针对同一类问题而找到的解决办法,通常均可以解决这一类问题中的许多种情形。例如著名的李雅谱诺夫第二方法,这种方法在整个微分方程稳定性理论的发展中发挥着极其重要的作用,推动着稳定性理论不断向前发展。李雅谱诺夫第二方法的一个明显的优势就是它并不需要求解出系统的解,因此,这种方法在处理实际问题中有着广泛的应用。

李雅谱诺夫函数这个概念被广泛应用于动力系统中各类质与量的问题的研究中。李雅谱诺夫函数能够将某个给定的复杂的微分系统转换为一个相对简单的系统,进而只需研究这个相对简单系统的解的性质即可。利用李雅谱诺夫函数可以考虑去研究给定的非线性问题,这为非线性问题的解决提供了一个非常有效的方法。

在实际应用中,由李雅谱诺夫稳定性派生出许多新的概念,如最终稳定性、部分稳定性、相对稳定性、条件稳定性、全局稳定性等以及相应的有界性的概念和实用稳定性的概念。正如对于李雅谱诺夫稳定性理论有全面介绍的文献一样,对于上述的每一个概念都有许多与之相应的介绍该种概念的文献。那么人们自然会问,是否可以找到一个把各种稳定性概念统一、包含在一起的新的框架呢?答案是肯定的。这便是本书所要介绍的双测度稳定性。本书的主要目的是向读者呈现出一个系统而全面的关于双测度稳定性的理论,并且介绍这个理论现在发展的状况、前景与应用。本书通过丰富的应用实例来证实稳定性概念在本质上的统一,为研究非线性问题提供了一种新的、更具一般性的框架。

本书具有如下特点:

(1) 是市面上运用双测度来系统地介绍稳定性判据的少有书籍;

(2) 用双测度的方法阐述了广义李雅谱诺夫方法,同时证明了这种有效的方法在各类非线性问题中的重要作用;

(3) 给出如何利用双测度分别将李雅谱诺夫稳定性、实用稳定性及有界性的判据

统一起来，列举了运用双测度理论解决实际问题的一些具体案例。

回顾许多关于介绍李雅谱诺夫第二方法的著作，均未全面包含有关双测度下的李雅谱诺夫稳定性判据的所有材料内容。双测度稳定性理论为稳定性问题的研究提供了新的解决路径，可以进一步考虑这种理论的新应用。期待本书能激发读者们对于双测度稳定性理论进一步发展的探索欲望。

诚挚感谢杨教授和刘教授在这五年多的小组讨论中给予的关怀和帮助。

本书在内容的编排、叙述及文字符号的处理上经过了多次讨论，最终统一协调。限于作者水平，难免有不妥和错误之处，敬请读者批评指正。

作　者

# 目　　录

# 第 0 章　控制理论中的数学基础

自动控制系统最重要的特性之一是它的稳定性。一个不稳定的系统是无法完成预期的控制任务的，因此如何判别一个系统是否稳定以及怎样改善其稳定性是系统分析与设计的首要问题。

系统的稳定性是指系统在遭受外界扰动偏离原来的平衡状态，而在扰动消失后，系统自身仍有能力恢复到原来平衡状态的一种“顽性”。在经典控制理论中，对于单输入单输出线性定常系统，应用劳斯（Routh）判据和胡维茨（Hurwitz）判据等代数方法判定系统的稳定性，非常方便有效。至于频域中的奈奎斯特（H. Nyquist）判据则是更为通用的方法，它不仅可以用于判定系统是否稳定，而且还能指明改善系统稳定性的方向。上述方法都是以分析系统特征方程在根平面上根的分布为基础的。但对于非线性系统和时变系统，这些判据就不适用了。

早在 1892 年，俄国数学家李雅普诺夫就将判定系统稳定性的问题归纳为两种方法：李雅普诺夫第一方法和李雅普诺夫第二方法。李雅普诺夫第二方法除了用于对系统进行稳定性分析之外，还可用于对系统瞬态响应的质量进行评价以及求解参数最优化问题。此外，在控制系统理论的许多方面，例如最优系统设计、最优估值、最优滤波以及自适应控制系统设计等，李雅普诺夫理论都有广泛的应用。

本章的 0.1 节介绍李雅普诺夫关于稳定性的定义及理论基础，0.2 节介绍李雅普诺夫第一方法和李雅普诺夫第二方法，0.3 节介绍李雅普诺夫函数的构造。

## 0.1　李雅普诺夫关于稳定性的定义

从经典控制理论可知，线性系统的稳定性只决定于系统的结构和参数而与系统的初始条件及外界扰动的大小无关，但非线性系统的稳定性还与初始条件及外界扰动的大小有关，因此在经典控制理论中没有给出稳定性的一般定义。李雅普若夫第二方法是一种普遍适用于线性系统、非线性系统及时变系统稳定性分析的方法。李雅普诺夫给出了对任何系统都普遍适用的稳定性的一般定义。

在给出各种稳定性定义之前，首先保证非线性微分系统

$$x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x) \tag{0.1.1}$$

解的存在、唯一性以及解的延拓和解对初值的连续性、可微性等，这可概括为下面的定理。

这里 $x\in D\subseteq R^n$，设给定方程组(0.1.1)的初值条件为

$$x(t_0)=x_0$$

考虑包含点$(t_0,x_0)=(t_0;x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$的某区域

$$R:|t-t_0|\leqslant a,\ \ \|x-x_0\|\leqslant b$$

在本章中，向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 的范数 $\|x\|$ 定义为

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

所谓 $f(t,x)$在域 $G$ 上关于 $x$ 满足局部李普希兹条件是指：对于 $G$ 内的任一点$(t_0,x_0)$，存在闭邻域 $R\subset G$，而 $f(t,x)$于 $R$ 上关于 $x$ 满足李普希兹条件，即存在常数 $L>0$，使得不等式

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant L\|x-y\|$$

对所有的$(t,x)$，$(t,y)\in R$ 成立。$L$ 称为李普希兹系数。

**存在唯一性定理** 如果向量函数 $f(t,x)$在域 $R$ 上连续并且关于 $x$ 满足李普希兹条件，则方程组(0.1.1)对初值$(t_0,x_0)$存在唯一解 $x=\varphi(t,t_0,x_0)$，它在区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上连续，而且

$$\varphi(t_0,t_0,x_0)=x_0$$

这里 $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$，$M=\max\limits_{(t,x)\in R}\|f(t,x)\|$。

**解的延拓与连续性定理** 如果向量函数 $f(t,x)$在某域 $G$ 内连续，并且关于 $x$ 满足局部李普希兹条件，则方程组(0.1.1)的满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x=\varphi(t,t_0,x_0)$($(t_0,x_0)\in G$)可以延拓，或者延拓到$+\infty$(或$-\infty$)；或者使点$(t,\varphi(t,t_0,x_0))$任意接近区域 $G$ 的边界。而解 $x=\varphi(t,t_0,x_0)$作为 $t,t_0,x_0$ 的函数在它的存在范围内是连续的。

**可微性定理** 如果向量函数 $f(t,x)$及$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(i,j=1,2,\cdots,n)$在域 $G$ 内连续，那么方程组(0.1.1)由初值条件 $x(t_0)=x_0$ 确定的解 $x=\varphi(t,t_0,x_0)$作为 $t,t_0,x_0$，在它的存在范围内是连续可微的。

设微分方程(0.1.1)中函数 $f(t,x)$对 $x\in D\subseteq R^n$ 和 $t\in R$ 连续，对于 $x$ 满足局部李普希兹条件。对初值$(t_0,x_1)$存在唯一解 $x(t)=\varphi(t,t_0,x_1)$，而对初值$(t_0,x_0)$的唯一解，记作 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$。

**定义 0.1.1** 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $t_0\geqslant 0$，存在 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得对于一切的 $t\geqslant t_0$，当 $x_0$ 满足 $\|x_0-x_1\|<\delta$ 时，有 $\|x(t,t_0,x_0)-\varphi(t,t_0,x_1)\|<\varepsilon$ 成立。则称微分方程(0.1.1)的解 $x(t)=\varphi(t,t_0,x_1)$是稳定的，否则是不稳定的。

如果 $\delta$ 与 $t_0$ 无关，则称微分方程(0.1.1)的解 $x(t)=\varphi(t,t_0,x_1)$是一致稳定的。

**定义 0.1.2**　假设 $x(t)=\varphi(t,t_0,x_1)$ 是稳定的，而且存在 $\delta_1(0<\delta_1\leqslant\delta)$，使得当 $x_0$ 满足 $\|x_0-x_1\|<\delta_1$ 时，有 $\lim\limits_{t\to\infty}[x(t,t_0,x_0)-\varphi(t,t_0,x_1)]=0$ 成立。则称微分方程(0.1.1)的解 $x(t)=\varphi(t,t_0,x_1)$ 是渐近稳定的。

为了简化讨论，通常把解 $x(t)=\varphi(t,t_0,x_1)$ 稳定性转化成平凡解的稳定性问题。

记 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$，$\varphi(t)=\varphi(t,t_0,x_1)$，作如下变量代换，令

$$y(t)=x(t)-\varphi(t) \tag{0.1.2}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\\&=f(t,x(t))-f(t,\varphi(t))\\&=f(t,\varphi(t)+y(t))-f(t,\varphi(t))\\&=G(t,y(t))\end{aligned}$$

于是在变换(0.1.2)下，将系统(0.1.1)化成

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=G(t,y(t)) \tag{0.1.3}$$

这样关于方程(0.1.1)的解 $x=\varphi(t)$ 的稳定性问题就转化为方程(0.1.3)的平凡解 $y(t)=0$ 的稳定性问题了。因此，我们可以在下文中只考虑方程(0.1.1)的平凡解(即平衡状态)$x(t)=0$ 的稳定性，即假设 $f(t,0)=0$，并有如下李雅普诺夫意义下的稳定性定义。

**定义 0.1.3**　如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $t_0\geqslant0$，存在 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得对于一切的 $t\geqslant t_0$，当 $x_0$ 满足 $\|x_0\|<\delta$ 时，有 $\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$ 成立。则称微分方程(0.1.1)的平凡解是稳定的，否则是不稳定的。

**定义 0.1.4**　若微分方程(0.1.1)的平凡解是稳定的，而且存在 $\delta_1>0$，使得当 $x_0$ 满足 $\|x_0\|<\delta_1$ 时，有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t,t_0,x_0)=0$ 成立。则称微分方程(0.1.1)的平凡解是渐近稳定的。

如果定义 0.1.3 中的 $\delta$ 与 $t_0$ 无关，即得：

**定义 0.1.5**　如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $t_0\geqslant0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于一切的 $t\geqslant t_0$，当 $x_0$ 满足 $\|x_0\|<\delta$ 时，有 $\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$ 成立。则称微分方程(0.1.1)的平凡解是一致稳定的。

在定义 0.1.4 中，如果微分方程(0.1.1)的平凡解是稳定的，并且存在域 $D_0$，当且仅当 $x_0\in D_0$ 时满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t,t_0,x_0)$ 均有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t,t_0,x_0)=0$ 成立，则域 $D_0$ 称为(渐近)稳定域或吸引域。若稳定域为全空间，即 $\delta_1=+\infty$ 时，则称微分方程(0.1.1)的平凡解为全局渐近稳定的或简称全局稳定的。

**定理 0.1.1**　系统若是定常的，即

$$\begin{cases}x'=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)\\f(0)=0\end{cases}$$

则平凡解是一致稳定的充分必要条件是它是稳定的。

为了建立平凡解是渐近稳定的一组概念，引入下述概念。

**定义 0.1.6** 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $t_0\geqslant 0$，存在 $\delta=\delta(t_0)>0$ 和 $T=T(t_0,\varepsilon)\geqslant 0$，使得对于一切的 $t\geqslant t_0+T$，当 $x_0$ 满足 $\|x_0\|<\delta$ 时，有 $\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$ 成立。则称微分方程(0.1.1)的平凡解是吸引的。

如果定义 0.1.6 中的 $\delta$、$T$ 与 $t_0$ 无关，即得：

**定义 0.1.7** 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $t_0\geqslant 0$，存在 $\delta>0$ 和 $T=T(\varepsilon)\geqslant 0$，使得对于一切的 $t\geqslant t_0+T$，当 $x_0$ 满足 $\|x_0\|<\delta$ 时，有 $\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$ 成立。则称微分方程(0.1.1)的平凡解是一致吸引的。

**定义 0.1.8** 系统(0.1.1)的平凡解是渐近稳定的，系指它是稳定的又是吸引的、一致吸引的。系统(0.1.1)的平凡解是一致渐近稳定的，系指它是一致稳定的又是一致吸引的。

**附注 0.1.1** 对于一个任意系统，不一定都存在平衡状态，有时即使存在也未必是唯一的，例如对于线性定常系统 $x'=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)=Ax$，当 $A$ 为非奇异矩阵时，满足 $Ax=0$ 的解 $x(t)=0$ 是系统唯一存在的一个平衡状态。而当 $A$ 为奇异矩阵时，系统将有无穷多个平衡状态。对于非线性系统，通常可有一个或多个平衡状态。

**附注 0.1.2** 应当指出，稳定性问题都是相对于某个平衡状态而言的。线性定常系统，由于只有唯一的一个平衡点，所以才笼统地讲所谓的系统稳定性问题。对于其余系统，则由于可能存在多个平衡点，而不同平衡点可能表现出不同的稳定性，因此必须逐个地分别加以讨论。

**附注 0.1.3** 从工程意义上说，渐近稳定比稳定更为重要，但由于渐近稳定是一个局部概念，通常只确定某平衡状态的渐近稳定性并不意味着整个系统就能正常运行。因此，如何确定渐近稳定的最大区域，并且尽量扩大其范围是尤其重要的。

**附注 0.1.4** 如果平衡状态 $x(t)=0$ 是稳定的，而且从状态空间中所有初始状态出发的轨线(系统的响应)都具有渐近稳定性，则称这种平衡状态是大范围渐近稳定的。显然，大范围渐近稳定的必要条件是在整个状态空间只有一个平衡状态。对于线性系统来说，如果平衡状态是渐近稳定的，则必然也是大范围渐近稳定的。

在控制工程中，确定大范围内渐近稳定的范围是很重要的，因为只有知道了渐近稳定的范围，才能明确这一系统的抗干扰程度，从而可设法抑制干扰，使它满足系统稳定性的要求。古典理论的稳定性概念，只牵涉到小的扰动，没有涉及大范围扰动的问题，因此它是有局限性的。

**附注 0.1.5** 在经典控制理论中，只有渐近稳定的系统才称为稳定系统。只在李雅普诺夫意义下稳定，但不是渐近稳定的系统则称临界稳定系统，这在工程上属于不稳定系统。

**例 0.1.1**　考察系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x\\ x(0)=x_0,y(0)=y_0\end{cases}$$

平凡解的稳定性。

**解**　对于一切的 $t\geqslant 0$,方程组满足初始条件 $x(0)=x_0,y(0)=y_0(x_0^2+y_0^2\neq 0)$的解为

$$\begin{cases}x(t)=x_0\cos t+y_0\sin t\\ y(t)=-x_0\sin t+y_0\cos t\end{cases}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当$(x_0^2+y_0^2)^{\frac{1}{2}}<\delta$ 时,有

$$[x^2(t)+y^2(t)]^{\frac{1}{2}}=[(x_0\cos t+y_0\sin t)^2+(-x_0\sin t+y_0\cos t)^2]^{\frac{1}{2}}=(x_0^2+y_0^2)^{\frac{1}{2}}<\delta$$

故该系统的平凡解是稳定的。

然而,由于

$$\lim_{t\to\infty}[x^2(t)+y^2(t)]^{\frac{1}{2}}=(x_0^2+y_0^2)^{\frac{1}{2}}\neq 0$$

所以该系统的平凡解不是渐近稳定的。

**例 0.1.2**　考察系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x\\ x(0)=x_0,y(0)=y_0\end{cases}$$

平凡解的稳定性。

**解**　在 $t\geqslant 0$,取初值为$(0,x_0,y_0)(x_0^2+y_0^2\neq 0)$的解为

$$\begin{cases}x(t)=x_0\cos t-y_0\sin t\\ y(t)=x_0\sin t+y_0\cos t\end{cases}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当$(x_0^2+y_0^2)^{\frac{1}{2}}<\delta$ 时,有

$$[x^2(t)+y^2(t)]^{\frac{1}{2}}=x_0^2+y_0^2<\varepsilon$$

故该系统的平凡解是稳定的。

又由于

$$\lim_{t\to\infty}[x^2(t)+y^2(t)]^{\frac{1}{2}}=(x_0^2+y_0^2)^{\frac{1}{2}}\neq 0$$

所以该系统的平凡解不是渐近稳定的。

**例 0.1.3**　试讨论一阶方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bx^2(A>0,B>0)$$

(1) 求出其常数解；

(2) 判断各常数解的稳定性。

**解** 方程有常数解 $x=0, x=-\dfrac{A}{B}(x<0)$.

先考虑初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=Ax+Bx^2\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

求解为

$$x(t)=\frac{A}{\left(\dfrac{A}{x_0}+B\right)e^{-A(t-t_0)}-B}\left(x_0\neq 0,-\frac{A}{B}\right)$$

考虑过$(t_0,x_0)$的解，当 $x_0>0$ 时，$\dfrac{dx}{dt}\Big|_{(t_0,x_0)}=Ax_0+Bx_0^2>0$，则 $x$ 是单调增加的，当 $t\to\dfrac{1}{A}\ln\dfrac{A+Bx_0}{Bx_0}+t_0$ 时，解 $x(t,t_0,x_0)$趋于$+\infty$。

当 $x_0=0$ 时，过$(t_0,x_0)$的解是常数解 $x(t,t_0,0)=0$。

当 $x_0<0$ 时，有解知，若$-\dfrac{A}{B}<x_0<0$，则$\dfrac{A}{x_0}+B<0$，当 $t$ 增加时 $x$ 下降，且当 $t\to\infty$ 时，$x\to-\dfrac{A}{B}$。

若 $x_0<-\dfrac{B}{A}<0$，则$\dfrac{A}{x_0}+B>0$，当 $t$ 增加时 $x$ 增加，且当 $t\to\infty$时，$x\to-\dfrac{A}{B}$。

平凡解 $x=0$ 是不稳定的，$x=-\dfrac{A}{B}(x<0)$。是渐近稳定的。

可以看出，稳定性的物理意义是很明显的，因为用微分方程描述的物质运动(例如某一质点运动)的特解密切依赖于初值，而初值的计算或测定实际上不可避免地出现误差和干扰。如果描述这运动的微分方程的特解是不稳定的，则初值的微小误差或干扰将招致“差之毫厘，谬以千里”的严重后果。因此，这样不稳定的特解将不宜作为设计的依据；反之，稳定的特解才是我们最感兴趣的。这说明解的稳定性的研究是一个十分重要的问题，可是大多数非线性微分方程是不可能或很难求出解的具体表达式来的。因此，必须要求在不具体解出方程的情况下判断方程的解的稳定性态。

为了更好地判断平凡解的稳定性，下面我们介绍有关李雅普诺夫稳定性定理。

**定理 0.1.2**(李雅普诺夫稳定性定理) 对系统(0.1.1)，若在区域

$$G_H=\{(t,x)\,|\,t\geqslant t_0,\ \|x\|<H\}$$

上存在李雅普诺夫函数 $V(t,x)$，满足

(1) 它是正定的；

(2) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(0.1.1)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,x)\leqslant 0$

则方程(0.1.1)的平凡解是稳定的。

**证明**：由于 $V(t,x)$ 是正定的，故存在 $\varphi(\|x\|)\in K$，使得对于任意给定的正数 $\varepsilon(0<\varepsilon<H)$ 和任意的 $t_0\geqslant 0$，存在 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$，由于 $V(t_0,0)=0$ 及 $V(t,x)$ 是连续的，则当 $x_0$ 满足 $\|x_0\|<\delta$ 时，有 $V(t_0,x_0)<\varphi(\varepsilon)$. 成立。所以

$$V(t,x(t,t_0,x_0))\leqslant V(t_0,x_0)<\varphi(\varepsilon),t\geqslant t_0,$$

从而

$$\varphi(\|x(t,t_0,x_0)\|)\leqslant V(t,x(t,t_0,x_0))\leqslant V(t_0,x_0)<\varphi(\varepsilon),t\geqslant t_0。$$

因为 $\varphi(\|x\|)\in K$，故有 $\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon,t\geqslant t_0$ 成立。定理证毕。

**例 0.1.4**　考虑无阻尼线性振动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0 \tag{0.1.4}$$

的平衡位置的稳定性。

**解**　把方程(0.1.4)化为等价系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\omega^2x\end{cases} \tag{0.1.5}$$

则方程(0.1.4)的平衡位置即方程(0.1.5)的平凡解。

作李雅普诺夫函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{\omega^2}y^2\right)$$

有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(0.1.4)}=\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\omega^2}y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{(0.1.4)}$$

即 $V(x,y)$ 是正定的，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(0.1.4)}\leqslant 0$，于是由李雅普诺夫稳定性定理(定理 0.1.2)可知，方程(0.1.5)的平凡解是稳定的，即方程(0.1.4)的平衡位置是稳定的。

**引理 0.1.1**　若 $V(x(t))$ 是正定(负定)的李雅普诺夫函数，并且对连续有界的函数 $x(t)$，有 $\lim\limits_{t\to\infty}V(x(t))=0$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

证明由读者自己完成。

**定理 0.1.3**(李雅普诺夫一致稳定性定理)　对系统(0.1.1)，若在区域

$$G_H=\{(t,x)\mid t\geqslant t_0,\|x\|<H\} \tag{0.1.6}$$

上存在正定的有无穷小上界的李雅普诺夫函数 $V(t,x)$，满足

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(0.1.1)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,x)\leqslant 0,$$

则系统(0.1.1)的平凡解是一致稳定的。

**证明:**由假设,存在 $\varphi_1(\|x\|),\varphi_2(\|x\|)\in K$,使得

$$\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)$$

对于任意给定的正数 $\varepsilon(0<\varepsilon<H)$ 和任意的 $t_0\geqslant0$,取 $\delta=\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon))$,故有 $\varepsilon=\varphi_1^{-1}(\varphi_2(\delta))$,则

$$\varphi_1(\|x(t,t_0,x_0)\|)\leqslant V(t,x(t,t_0,x_0))\leqslant V(t_0,x_0)<\varphi_2(\|x_0\|)<\varphi_2(\delta)$$

当 $x_0$ 满足 $\|x_0\|<\delta$ 时,有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varphi_1^{-1}(\varphi_2(\delta))=\varepsilon,\quad t\geqslant t_0$$

成立。而 $\delta=\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon))=\delta(\varepsilon)$ 是与 $t$ 无关的,所以系统(0.1.1)的平凡解是一致稳定的。定理证毕。

**定理 0.1.4**(李雅普诺夫一致渐近稳定性定理) 对系统(0.1.1),若在区域(0.1.6)上存在正定的有无穷小上界的李雅普诺夫函数 $V(t,x)$,满足 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(0.1.1)}$ 是负定的,则系统(0.1.1)的平凡解是一致渐近稳定的。

**证明:**因为定理 0.1.4 的条件蕴涵定理 0.1.3 的条件,故方程(0.1.1)的平凡解是一致稳定的。现只需证明它是一致吸引的。

由假设条件可知,存在 $\varphi_1(\|x\|),\varphi_2(\|x\|),\varphi_3(\|x\|)\in K$,使得

$$\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(0.1.1)}\leqslant-\varphi_3(\|x\|)\leqslant-\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))<0$$

即

$$\int_{V(t_0)}^{V(t)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}\leqslant-(t-t_0)$$

亦即

$$\int_{V(t)}^{V(t_0)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}\geqslant(t-t_0)$$

对于任意给定的正数 $\varepsilon(0<\varepsilon<H)$ 和任意的 $t_0\geqslant0$,有

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_1(\|x\|)}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}&=\int_{\varphi_1(\|x\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}+\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}\\&\geqslant\int_{V(t)}^{V(t_0)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}\geqslant(t-t_0)\end{aligned}$$

取 $T=T(\varepsilon,H)>\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}$,显然,当 $t\geqslant t_0+T$ 时,由上式可进而得到

$$\int_{\varphi_1(\|x\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}\geqslant(t-t_0)$$

$$-\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}>t-t_0-T\geqslant0$$

这就推出

$$\varphi_1(\| x(t) \|)\leqslant\varphi_1(\varepsilon),t\geqslant t_0+T(\varepsilon,H)$$

即

$$\| x(t) \| <\varepsilon$$

成立。所以系统(0.1.1)的平凡解是一致吸引的。故是一致渐近稳定的。定理证毕。

**定理 0.1.5**(李雅普诺夫渐近稳定性定理)　对系统(0.1.1),若在区域(0.1.6)上存在李雅普诺夫函数 $V(t,x)$,满足

(1) 它是正定的;

(2) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(0.1.1)}$是负定的。

则方程(0.1.1)的平凡解是渐近稳定的。

**证明:** 由李雅普诺夫稳定性定理(定理 0.1.2)可知,系统(0.1.1)的平凡解是稳定的。取 $\delta$ 为李雅普诺夫稳定性定理(定理 0.1.2)证明过程中的 $\delta$,于是当 $\| x \| \leqslant\delta$ 时,$V(x(t,t_0,x_0))$单调下降。若 $x_0=0$,则由唯一性知 $x(t,t_0,x_0)\equiv0$,自然有$\lim\limits_{t\to\infty}x(t,t_0,x_0)=0$。

不妨设 $x_0\neq0$,由初值问题解的唯一性,对任意 $t$,$x(t,t_0,x_0)\neq0$。从而由 $V(x)$的正定性知 $V(x(t,t_0,x_0))>0$ 总成立,则存在 $a\geqslant0$ 使 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(x(t,t_0,x_0))=a$。

假设 $a>0$,注意到 $V(x(t,t_0,x_0))$的单调性,我们有

$$a<V(x(t,t_0,x_0))<V(x_0)$$

对 $t>t_0$ 成立。从而由 $V(0)=0$ 知,存在 $h>0$,使得当 $t\geqslant t_0$ 时

$$h<\| x(t,t_0,x_0) \| <\varepsilon \tag{0.1.7}$$

成立。

由条件(2)有

$$M=\max_{h\leqslant|x|\leqslant\varepsilon}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(0.1.1)}<0$$

故从式(0.1.7)知

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t,t_0,x_0))}{\mathrm{d}t}\leqslant M$$

对上述不等式的两端从 $t_0$ 到 $t>t_0$ 积分得

$$V(x(t,t_0,x_0))-V(x_0)\leqslant M(t-t_0)$$

该不等式意味着

$$\lim_{t\to\infty}V(x(t,t_0,x_0))=-\infty$$

与前面的结论相矛盾,故 $a=0$,即

$$\lim_{t\to\infty}V(x(t,t_0,x_0))=0$$

由于平凡解是稳定的,所以 $x(t,t_0,x_0)$在$[t_0,\infty)$上是有界的。再由引理 0.1.1 知$\lim\limits_{t\to\infty}x(t,t_0,x_0)=0$。定理证毕。

**例 0.1.5** 试证明方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1) \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1) \end{cases} \tag{0.1.8}$$

的平凡解是渐近稳定的。

**证明：** 作李雅普诺夫函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

则有

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(0.1.8)}=\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)\Big|_{(0.1.8)}=(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)$$

在区域 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 上，$V(x,y)$ 是正定的，$\frac{dV}{dt}\big|_{(0.1.8)}$ 是负定的，故由定理(0.1.5)知方程(0.1.8)的平凡解是渐近稳定的。

最后，我们给出不稳定性定理而略去证明。

**定理 0.1.6** 对系统(0.1.1)，若存在 $V(t,x)\in C[G_H,R]$，$V(t,0)=0$ 使得

(1) 对 $t\geqslant t_0$，在原点任意邻域内，有 $V(t,x)>0$ 的区域；

(2) 在区域 $V(t,x)>0$ 中，$V(t,x)$ 是有界的；

(3) 在 $V(t,x)>0$ 中，$\frac{dV}{dt}\big|_{(0.1.1)}$ 是正定的。

则方程(0.1.1)的平凡解是不稳定的。

## 0.2 李雅普诺夫方法

在 1892 年，李雅普诺夫将如何判定系统的稳定性的问题归纳成两种方法(即第一方法和第二方法)。李雅普诺夫提出的稳定性理论是确定系统稳定性的更一般的理论，不仅适用于单变量、线性、定常系统，还适用于多变量、非线性、时变系统，它有效地解决过一些用其他方法不能解决的非线性微分方程的稳定性问题，在现代控制系统的分析与设计中，得到了广泛的应用与发展。第一方法的影响远不及第二方法，李雅普诺夫第二方法是研究稳定性的主要方法，既是研究控制系统理论问题的一种基本工具，又是分析具体控制系统稳定性的一种常用方法。

李雅普诺夫第一方法又称间接法，它是通过系统状态方程的解，然后根据解的性质来判断系统的稳定性。如果其解随时间而收敛，则系统稳定；如果其解随时间而发散，则系统不稳定。对于非线性系统，在工作点附近的一定范围内，可以用线性化的微分方程来近