高中

# 数学解题思维方法

## 转换

邵龙章 曹承剑 朱连生

uxuejietifangfa

西教育出版社

# 数学解题思维方法——转换

（高中版）

邵龙章　曹承剑　程　斌　朱连生

山 西 教 育 出 版 社

**数学解题思维方法——转换**
**（高中版）**
邵龙章　等编
*
山西教育出版社出版发行（太原并州北路 69 号）
晋中地区印刷厂印刷
*
开本：850×1168　1/32　印张：12.25　字数：299 千字
1998 年 7 月第 1 版　1998 年 7 月山西第 1 次印刷
印数：1—2000 册
*
ISBN　7－5440－1254－9
G·1235　定价：12.70 元

# 序

爱因斯坦有一著名公式 $w=x+y+z$,其中 w 代表成功,x 代表刻苦劳动,y 代表适当的方法,z 代表少说废话,可见思想方法在培养人才中占据着很重要的位置。

科学的思维方法是什么呢?

大家知道,各门学科都在研究转换:医学在研究病理如何向健康转换;我们人的机体每天都在把食物转换为可吸收的糖类、蛋白质、脂肪、……。数学是抽去事物的质去研究它们的空间形式和数量关系的相互转换。具体地说,中学数学主要是研究数与数、形与形、数与形之间的相互转换。

回顾一下数学史,可以看到:著名的哥尼斯堡七桥问题,就是转换为一个网络图中的一笔画问题;平面几何中,用尺规作图的三个不可能的问题,都是通过转换为代数问题而得出结论;又如定积分与原函数的概念,从定义上看是两个不相干的概念,定积分是一种和式的极限,而原函数是它的导数为某一已知函数,但通过牛顿——莱布尼兹公式,使这两个概念建立了联系,使求和式极限问题转换为求已知函数的原函数在区间上的增量,由于这一转换促使了微积分的发展,是微积分史上重要的创新。……因此,可以说,数学在一定意义上是研究转换的学科。

因此说,中学数学的精髓——转换。

本书由邵龙章主编,曹承剑、程斌、朱连生参加了编写工作。对本书的不足之处,欢迎读者批评指正。

**编　者**

# 目 录

# 第一章　三角函数

三角函数是一种重要的基本初等函数，是中学数学的重要内容之一，在立体几何、解析几何、物理、微积分和其它工程技术中都有着广泛的应用.

三角的特点是公式多，难记，变形繁，灵活. 在这种情况下，怎样才能学好三角又不会遗忘呢?

这就要掌握三角的精髓——转换.

**一、简单向复杂转换，复杂向简单转换**

认识论的基本规律是：人们的认识，总是先认识个别的、特殊的、简单的，进而认识一般的、复杂的事物. 我们学习也一样，先认识特殊的、简单的锐角三角函数，进而认识扩展到钝角三角函数，任意角的三角函数. 而任意角的三角函数，通过与角 $\alpha$ 有相同终边的角的集合：$\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in Z\}$，可以转换成角 $\alpha$ 的三角函数($0 \leqslant \alpha < 360^\circ$)；再通过诱导公式，则最后可以转换成锐角三角函数，可见，锐角三角函数是学好三角函数的基础，需要指出的是，目前很多参考书，在讲了诱导公式后，往往忽视了三角函数定义的作用，现举例如下：

例 1　已知，$\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$，求 $\theta$ 的其它三角函数值.

解法一：$\because$　$\sin\theta = -\dfrac{4}{5} < 0$，$\therefore$　$\theta$ 是第三象限或第四象限的角.

(1) 如果 $\theta$ 是第三象限的角，则

$$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\frac{3}{5}, \operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg}\theta = \frac{3}{4}$$

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{5}{3}$，$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{5}{4}$.

(2) 如果 $\theta$ 是第四象限的角，则

$\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\mathrm{tg}\theta=-\frac{4}{3}$，$\mathrm{ctg}\theta=-\frac{3}{4}$，$\sec\theta=\frac{5}{3}$，$\csc\theta=-\frac{5}{4}$.

解法二：$\because\quad \sin\theta=-\frac{4}{5}<0$，$\therefore\quad \theta$ 是第三或第四象限的角.

(1) 如果 $\theta$ 是第三象限的角，则

$\cos\theta<0$，$\mathrm{tg}\theta>0$，$\mathrm{ctg}\theta>0$，

$\sec\theta<0$，$\csc\theta<0$.

根据诱导公式，其绝对值与锐角三角函数值相等，故可作 $Rt\triangle ABC$，使 $AC=4$，$AB=5$，则 $BC=3$（见图 1—1—1）

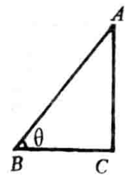

图 1—1—1

$\therefore\quad \cos\theta=-\frac{BC}{AB}=-\frac{3}{5}$，

$\mathrm{tg}\theta=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{3}$，$\mathrm{ctg}\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}$，

$\sec\theta=-\frac{AB}{BC}=-\frac{5}{3}$，$\csc\theta=\frac{AB}{AC}=-\frac{5}{4}$.

(2) 如果 $\theta$ 是第四象限的角，同理可得：

$\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\mathrm{tg}\theta=-\frac{4}{3}$，$\mathrm{ctg}\theta=-\frac{3}{4}$，

$\sec\theta=\frac{5}{3}$，$\csc\theta=-\frac{5}{4}$.

解法三：$\because\quad \sin\theta=-\frac{4}{5}$，根据任意角三角函数的定义，可设 $y=-4k$，$r=5k$，则 $x=\pm 3k$

(1) 当 $\theta$ 是第三象限的角，则 $x=-3k$，$y=-4k$，$r=5k$（其中 $k\in N$）.

$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{3}{5}$，$\mathrm{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$，

$\text{ctg}\theta=\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$, $\sec\theta=\frac{r}{x}=-\frac{5}{3}$.

$\csc\theta=\frac{y}{r}=-\frac{5}{4}$.

(2) 当 $\theta$ 是第四象限的角时, $x=3k$, $y=-4k$, $r=5k$.

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$, $\text{tg}\theta=-\frac{4}{3}$, $\text{ctg}\theta=-\frac{3}{4}$,

$\sec\theta=\frac{5}{3}$, $\csc\theta=-\frac{5}{4}$.

说明:现在一般书的解法均为解法一,实际上解法二、解法三更简单,其中解法二的书写可逐渐直接写出答案,符号由象限决定,绝对值由锐角三角函数的定义得出(在解题中可取 $k$ 为 1).

例 2 求证: $\frac{1+\sec\theta+\text{tg}\theta}{1+\sec\theta-\text{tg}\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

证法一:左边 $=\frac{(\sec^2\theta-\text{tg}^2\theta)+\sec\theta+\text{tg}\theta}{1+\sec\theta-\text{tg}\theta}$

$=\frac{(\sec\theta+\text{tg}\theta)(\sec\theta-\text{tg}\theta)+(\sec\theta+\text{tg}\theta)}{1+\sec\theta-\text{tg}\theta}$

$=\frac{(\sec\theta+\text{tg}\theta)(\sec\theta-\text{tg}\theta+1)}{1+\sec\theta-\text{tg}\theta}$

$=\sec\theta+\text{tg}\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

证法二:左边 $=\frac{1+\frac{r}{x}+\frac{y}{x}}{1+\frac{r}{x}-\frac{y}{x}}=\frac{x+r+y}{x+r-y}$.

右边 $=\frac{1+\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{r+y}{x}$

又: $x(x+r+y)=x^2+xr+xy$

$(r+y)(x+r-y)=rx+xy+r^2+yr-yr-y^2$

$=rx+xy+x^2\quad(r^2=x^2+y^2)$

$\therefore$ 左边 = 右边.

证法三:左边 $=\dfrac{1+\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\dfrac{(\cos\theta+1)+\sin\theta}{(\cos\theta+1)-\sin\theta}$

$=\dfrac{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}+2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}$

$=\dfrac{\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}{\left(\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}$

$=\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}+2\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

证法四:$\because$ $(1+\sec\theta+\mathrm{tg}\theta)\cos\theta=\cos\theta+1+\sin\theta$,

又:$(1+\sin\theta)(1+\sec\theta-\mathrm{tg}\theta)$

$=1+\sin\theta+\sec\theta+\sin\theta\sec\theta-\mathrm{tg}\theta-\sin\theta\mathrm{tg}\theta$

$=1+\sin\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}+\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=1+\sin\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

$=1+\sin\theta+\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}=1+\sin\theta+\cos\theta.$

$\therefore$ 左边 = 右边

证法五:左边 $=\dfrac{1+\sec\theta+\mathrm{tg}\theta}{(\sec^2\theta-\mathrm{tg}^2\theta)+\sec\theta-\mathrm{tg}\theta}$

$=\dfrac{1+\sec\theta+\mathrm{tg}\theta}{(\sec\theta-\mathrm{tg}\theta)(\sec\theta+\mathrm{tg}\theta+1)}$

$$=\frac{1}{\sec\theta-\operatorname{tg}\theta}=\frac{1}{\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

说明：一般说来，同角三角函数的证明问题，从三角函数的定义出发，有的往往比用公式来得简单，其实质是把三角问题转换为代数问题.

例 3　已知 $\operatorname{tg}\theta=\frac{6}{5}$，求$\frac{1-3\sin\theta\cos\theta}{3\sin^2\theta-4\cos^2\theta}$的值.

解法一：原式 $=\dfrac{\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{3\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{3\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{4\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}^2\theta-3\operatorname{tg}\theta}{3\operatorname{tg}^2\theta-4}=\frac{1+\left(\frac{6}{5}\right)^2-3\left(\frac{6}{5}\right)}{3\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^2-4}=-\frac{29}{8}$$

解法二：$\because\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{6}{5}$，$\therefore\quad y$ 可取 $\pm6$，则 $x=\pm5$，($x$，$y$ 同号)，$r=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$.

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\pm\frac{6}{\sqrt{61}},\cos\theta=\pm\frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$\therefore\quad 原式=\frac{1-3\cdot\left(\pm\frac{6}{\sqrt{61}}\right)\left(\pm\frac{5}{\sqrt{61}}\right)}{3\cdot\frac{36}{61}-4\cdot\frac{25}{61}}=\frac{61-90}{108-100}=-\frac{29}{8}$$

说明：解法一的实质是：目标向已知转换，故分子、分母均除以 $\cos^2\theta$，解法二则是从定义出发.

例 4　设 $0<x<\frac{\pi}{4}$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$，

求：$\dfrac{\cos 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$.

分析：已知角为$\dfrac{\pi}{4}-x$，而求解的角为$2x$、$\dfrac{\pi}{4}+x$，为此，我们首先把所求的角向已知角转换：$2x=\dfrac{\pi}{2}-2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$，$\dfrac{\pi}{4}+x=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$，这样就转换成同角三角函数的关系.

解法一：$\dfrac{\cos 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}=\dfrac{\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]}{\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]}$

$$=\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{24}{13}$$

$$\left(\begin{aligned}&\because\quad 0<x<\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}<-x<0\\&\therefore\quad 0<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{4},\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>0\end{aligned}\right)$$

说明：本例亦可从定义出发，$\because\quad 0<\dfrac{\pi}{4}-x<\dfrac{\pi}{4}$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{5}{13}$，故可设 $y=5$，$r=13$，$x=12$，

$\therefore 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=2\cdot\dfrac{x}{r}=\dfrac{24}{13}$.

例 5　已知 $2\sin\theta+3\cos\theta=2$，

求 $\mathrm{tg}\theta$.

解法一：根据万能代换：

$$2\cdot\frac{2\text{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\theta}{2}}+3\cdot\frac{1-\text{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\theta}{2}}=2$$

去分母,整理后得

$$5\text{tg}^2\frac{\theta}{2}-4\text{tg}\frac{\theta}{2}-1=0$$

$\therefore\quad \text{tg}\frac{\theta}{2}=1$,或 $\text{tg}\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{5}$.

当 $\text{tg}\frac{\theta}{2}=1$ 时,$\text{tg}\theta$ 不存在($\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$)

当 $\text{tg}\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{5}$时,$\text{tg}\theta=-\frac{5}{12}$.

解法二:

$\because\quad 2\sin\theta+3\cos\theta=2,$

$\sqrt{13}\sin(\theta+\varphi)=2,\text{tg}\varphi=\frac{3}{2}$

$\therefore\quad \sin(\theta+\varphi)=\frac{2}{\sqrt{13}}.$

设 $y=2,r=\sqrt{13}$,则 $x=\pm 3$.

$\therefore\quad \text{tg}(\theta+\varphi)=\pm\frac{2}{3}\quad(\text{tg}\varphi=\frac{3}{2})$

即 $\frac{\text{tg}\theta+\text{tg}\varphi}{1-\text{tg}\theta\text{tg}\varphi}=\pm\frac{2}{3}$,

解这个方程,得

(1) $\text{tg}\theta$ 不存在,(2) $\text{tg}\theta=-\frac{5}{12}$.

解法三:$\because\quad 2\sin\theta+3\cos\theta=2$

$\therefore\quad 2\frac{y}{r}+3\frac{x}{r}=2$

$2y+3x=2r=2(\sqrt{x^2+y^2})$

$\therefore\quad 4y^2+12xy+9x^2=4(x^2+y^2)$

$\therefore \quad 5x^2+12xy=0$

$x(5x+12y)=0$

(1) $x=0$, $\mathrm{tg}\theta$ 不存在.

(2) $5x+12y=0$, $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{y}{x}=-\dfrac{5}{12}$.

解法四：$\because \quad 2\sin\theta+3\cos\theta=2$

$2(1-\sin\theta)-3\cos\theta=0$

$$2\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2-3\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=0$$

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot\left[2\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)-3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]=0$$

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+5\sin\frac{\theta}{2}\right)=0$$

$\therefore \quad \mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}=1$，或 $\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}=-\dfrac{1}{5}$（以下同解法一）.

说明：这四种解法中，显然从定义出发最简单，其实质是 $2y+3x=2r$ 是三元方程，因为 $r^2=x^2+y^2$，故它可化为 $2y+3x=2\sqrt{x^2+y^2}$ 的二元方程，而最后要求的是 $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{y}{x}$ 的比值，在代数方程中，一元方程有解，而二元方程可求出比值，故利用三角函数的定义，可把三角问题转化为代数的方程问题.

**二、"数"与"形"的相互转换**

"数"一般是指函数三种表达式中的解析式；

"形"一般是指函数的图像表示式.

代数是研究"数"的科学；几何是研究"形"的科学；三角作为一种工具，两者皆而有之.解析几何是用代数的方法来研究几何的一门学科，两者结合使几何研究取得了重大突破.代数与几何是对立的两个方面，两者在坐标系下统一了起来.

有时从"形"的观点来考虑问题比直接从数的观念出发要直观、简便，在大多数的情况下，"数"和"形"两者应取长补短，即取两

者之长来解决问题.

1. “形”与三角函数的性质:

三角函数的解析式,我们称之为“数”,单位圆、直角三角形等理解为“形”. 三角函数的图像可以直观地反映出三角函数的性质,反之,掌握了三角函数的性质,就能简捷地作出图像,两者是相辅相成的. 三角函数的图像,可以看作“数”向“形”的一种转换,由于这一转换,可以使学生直观地认识到三角函数的一些规律:如三角函数的定义域、值域(即图像在坐标平面上的伸展范围);最大值、最小值(图像上的最高点、最低点);奇偶性(图像关于原点或 $y$ 轴对称);单调性(图像的升降情况);周期性(图像每隔一定距离形状相同)等.

例 1　如图 1—2—1 为形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像($A>0,\omega>0$).

求:(1) 定义域、值域;

(2) 最大值、最小值;

(3) 奇偶性;

(4) 单调性;

(5) 周期性;

(6) 写出函数解析式.

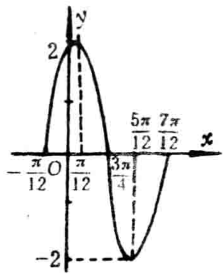


图 1—2—1

解:从图像上可以看出:

(1) $x\in R$, $-2\leqslant y\leqslant 2$;

(2) 当 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in Z$ 时,

$y_{\max}=2$;

当 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in Z$ 时,

$y_{\min}=-2$.

(3) 图像既不和 $y$ 轴对称,又不关于原点中心对称,故是非奇非偶函数;

(4) $-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$, $y$ 单调递增; $\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in Z$, $y$ 单调递减.

(5) $T=\frac{7\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{8\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}$

(6) $\omega=3$, ($\because\quad T=\frac{2\pi}{\omega}$)

$3x+\varphi=0$, $x=-\frac{\pi}{12}$. $\therefore\quad\varphi=\frac{\pi}{4}$.

从图上可知, $A=2$.

$\therefore$ 解析式为 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

说明:在考虑单调性时,把图像向左延伸$\frac{1}{4}$周期到 $x=-\frac{\pi}{4}$处,这样递增区域就可连在一起加以讨论.

例 2 画出函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$的图像(一个周期).

解:设 $x'=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}$,当 $x'$分别取 $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi,2\pi$ 时,得有关 $x$、$y$ 的值,列表如下:

| $x'$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{8\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{3}$ | $\frac{14\pi}{3}$ |
| $y$ | $0$ | $2$ | $0$ | $-2$ | $0$ |

$x'=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}=0$, $x_1=\frac{2\pi}{3}$

$x'=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{5\pi}{3}$

$x_3=\frac{8\pi}{3}$, $x_4=\frac{11\pi}{3}$, $x_5=\frac{14\pi}{3}$.