

高中

数学解题思维方法

.....转换

邵龙章 曹承剑 朱连生

suxuejietifangfa



西教育出版社

数学解题思维方法——转换

(高中版)

邵龙章 曹承剑 程 斌 朱连生

山西教育出版社

数学解题思维方法——转换
(高中版)

邵龙章 等编

*

山西教育出版社出版发行(太原并州北路 69 号)
晋中地区印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:12.25 字数:299 千字
1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月山西第 1 次印刷
印数:1—2000 册

*

ISBN 7-5440-1254-9
G·1235 定价:12.70 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。



爱因斯坦有一著名公式 $w = x + y + z$, 其中 w 代表成功, x 代表刻苦劳动, y 代表适当的方法, z 代表少说废话, 可见思想方法在培养人才中占据着很重要的位置。

科学的思维方法是什么呢?

大家知道, 各门学科都在研究转换: 医学在研究病理如何向健康转换; 我们人的机体每天都在把食物转换为可吸收的糖类、蛋白质、脂肪、……。数学是抽去事物的质去研究它们的空间形式和数量关系的相互转换。具体地说, 中学数学主要是研究数与数、形与形、数与形之间的相互转换。

回顾一下数学史, 可以看到: 著名的哥尼斯堡七桥问题, 就是转换为一个网络图中的一笔画问题; 平面几何中, 用尺规作图的三个不可能的问题, 都是通过转换为代数问题而得出结论; 又如定积分与原函数的概念, 从定义上看是两个不相干的概念, 定积分是一种和式的极限, 而原函数是它的导数为某一已知函数, 但通过牛顿——莱布尼兹公式, 使这两个概念建立了联系, 使求和式极限问题转换为求已知函数的原函数在区间上的增量, 由于这一转换促使了微积分的发展, 是微积分史上重要的创新。……因此, 可以说, 数学在一定意义上是研究转换的学科。

因此说, 中学数学的精髓——转换。

本书由邵龙章主编, 曹承剑、程斌、朱连生参加了编写工作。对本书的不足之处, 欢迎读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 三角函数	(1)
一、简单向复杂转换,复杂向简单转换	(1)
二、“数”与“形”的相互转换	(8)
三、三角函数公式链及其转换规律	(16)
四、反三角函数向三角函数转换	(43)
五、三角方程向解转换的规律	(55)
三角测试题(一)	(65)
三角测试题(二)	(68)
第二章 立体几何	(72)
一、“角”的平面性定义,是把“立体几何问题”转换为 解的基础	(72)
二、异面直线之间的距离,常转换为四种思路	(82)
三、线线关系、线面关系、面面关系的相互转换	(91)
四、图形翻折中的不变量是解题转换的关键	(96)
五、命题转换(反证法)	(101)
六、空间图形的展开,是将立体几何问题转换为平面 几何问题的常用方法之一	(105)
七、抓住关键平面图形,促使立体几何问题向平面几 何问题转换	(113)
八、平面几何与立体几何的类比促使转换	(122)

立体几何测试题(一)	(131)
立体几何测试题(二)	(134)
第三章 代 数	(137)
一、“数”与“形”的相互转换是学好代数的基础	(137)
二、函数与反函数的互相转换是解决函数问题的关键	 (149)
三、恒等变形是已知向目标转换的主要通道	(161)
四、换元转换是方程向解转换的核心,配方转换是方程向解转换的基础	(168)
五、不等式的性质和基本不等式是不等式向目标转换的依据	(175)
六、通项 a_n 的转换是数列问题的核心	(185)
七、排列、组合问题转换为解的基础是分类法,关键是加法原理、乘法原理	(204)
八、复数的概念及其在中学数学中的地位与作用	(214)
代数测试题(一)	(228)
代数测试题(二)	(231)
第四章 解析几何	(234)
一、解析几何问题向目标转换的一般方法和规律	(234)
二、曲线族方程及其意义——一般向个别的转换	(242)
三、圆锥曲线的概念与主要线段的度量是解题转换的基础	(249)
四、常量和变量统一于轨迹方程之中	(256)
五、椭圆的问题转换为圆的问题	(264)
六、参数——加速已知向目标转换的催化剂	(274)
七、直角坐标与极坐标的相互转换	(284)

解析几何测试题(一)	(296)
解析几何测试题(二)	(299)
第五章 解题转换途径探索	(303)
一、分析法与综合法	(303)
二、数形结合,促进已知向目标转换	(306)
三、概念是解题转换的源头,分类是转换的基础,知识 的内在联系是解题转换的动力	(319)
四、“类比”促使解题转换,“派生”促使数学知识融汇 贯通	(326)
五、演绎和归纳转换	(332)
六、向矛盾的对立面转换	(341)
七、命题之间的转换	(348)
综合测试题(一)	(357)
综合测试题(二)	(360)
参考答案	(364)

第一章 三角函数

三角函数是一种重要的基本初等函数,是中学数学的重要内容之一,在立体几何、解析几何、物理、微积分和其它工程技术中都有着广泛的应用.

三角的特点是公式多,难记,变形繁,灵活.在这种情况下,怎样才能学好三角又不会遗忘呢?

这就要掌握三角的精髓——转换.

一、简单向复杂转换,复杂向简单转换

认识论的基本规律是:人们的认识,总是先认识个别的、特殊的、简单的,进而认识一般的、复杂的事物.我们学习也一样,先认识特殊的、简单的锐角三角函数,进而认识扩展到钝角三角函数,任意角的三角函数.而任意角的三角函数,通过与角 α 有相同终边的角的集合: $\{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in Z\}$,可以转换成角 α 的三角函数 ($0 \leq \alpha < 360^\circ$);再通过诱导公式,则最后可以转换成锐角三角函数,可见,锐角三角函数是学好三角函数的基础,需要指出的是,目前很多参考书,在讲了诱导公式后,往往忽视了三角函数定义的作用,现举例如下:

例1 已知, $\sin \theta = -\frac{4}{5}$,求 θ 的其它三角函数值.

解法一: $\because \sin \theta = -\frac{4}{5} < 0, \therefore \theta$ 是第三象限或第四象限的角.

(1) 如果 θ 是第三象限的角,则

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\frac{3}{5}, \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \theta = \frac{3}{4}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{5}{3}, \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = -\frac{5}{4}.$$

(2) 如果 θ 是第四象限的角, 则

$$\cos \theta = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} \theta = -\frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \theta = -\frac{3}{4}, \sec \theta = \frac{5}{3}, \csc \theta = -\frac{5}{4}.$$

解法二: $\because \sin \theta = -\frac{4}{5} < 0, \therefore \theta$ 是第三或第四象限的角.

(1) 如果 θ 是第三象限的角, 则

$$\cos \theta < 0, \operatorname{tg} \theta > 0, \operatorname{ctg} \theta > 0,$$

$$\sec \theta < 0, \csc \theta < 0.$$

根据诱导公式, 其绝对值与锐角三角函数值相等, 故可作 $Rt\triangle ABC$, 使 $AC = 4, AB = 5$, 则 $BC = 3$ (见图 1—1—1)

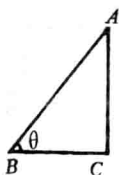


图 1—1—1

$$\therefore \cos \theta = -\frac{BC}{AB} = -\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4},$$

$$\sec \theta = -\frac{AB}{BC} = -\frac{5}{3}, \csc \theta = \frac{AB}{AC} = -\frac{5}{4}.$$

(2) 如果 θ 是第四象限的角, 同理可得:

$$\cos \theta = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} \theta = -\frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \theta = -\frac{3}{4},$$

$$\sec \theta = \frac{5}{3}, \csc \theta = -\frac{5}{4}.$$

解法三: $\because \sin \theta = -\frac{4}{5}$, 根据任意角三角函数的定义, 可设 $y = -4k, r = 5k$, 则 $x = \pm 3k$

(1) 当 θ 是第三象限的角, 则 $x = -3k, y = -4k, r = 5k$ (其中 $k \in N$).

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}, \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{x}{y} = \frac{3}{4}, \sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{5}{3}.$$

$$\csc \theta = \frac{y}{r} = -\frac{5}{4}.$$

(2) 当 θ 是第四象限的角时, $x = 3k, y = -4k, r = 5k$.

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} \theta = -\frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \theta = -\frac{3}{4},$$

$$\sec \theta = \frac{5}{3}, \csc \theta = -\frac{5}{4}.$$

说明:现在一般书的解法均为解法一,实际上解法二、解法三更简单,其中解法二的书写可逐渐直接写出答案,符号由象限决定,绝对值由锐角三角函数的定义得出(在解题中可取 k 为 1).

例 2 求证: $\frac{1 + \sec \theta + \operatorname{tg} \theta}{1 + \sec \theta - \operatorname{tg} \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$

$$\begin{aligned} \text{证法一: 左边} &= \frac{(\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta) + \sec \theta + \operatorname{tg} \theta}{1 + \sec \theta - \operatorname{tg} \theta} \\ &= \frac{(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)(\sec \theta - \operatorname{tg} \theta) + (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)}{1 + \sec \theta - \operatorname{tg} \theta} \\ &= \frac{(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)(\sec \theta - \operatorname{tg} \theta + 1)}{1 + \sec \theta - \operatorname{tg} \theta} \\ &= \sec \theta + \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\text{证法二: 左边} = \frac{1 + \frac{r}{x} + \frac{y}{x}}{1 + \frac{r}{x} - \frac{y}{x}} = \frac{x + r + y}{x + r - y}.$$

$$\text{右边} = \frac{1 + \frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{r + y}{x}$$

$$\text{又: } x(x + r + y) = x^2 + xr + xy$$

$$\begin{aligned} (r + y)(x + r - y) &= rx + xy + r^2 + yr - yr - y^2 \\ &= rx + xy + x^2 \quad (r^2 = x^2 + y^2) \end{aligned}$$

∴ 左边 = 右边.

$$\begin{aligned}
 \text{证法三: 左边} &= \frac{1 + \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \\
 &= \frac{(\cos\theta + 1) + \sin\theta}{(\cos\theta + 1) - \sin\theta} \\
 &= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)} \\
 &= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}
 \end{aligned}$$

证法四: ∵ $(1 + \sec\theta + \operatorname{tg}\theta)\cos\theta = \cos\theta + 1 + \sin\theta$,

又: $(1 + \sin\theta)(1 + \sec\theta - \operatorname{tg}\theta)$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \sin\theta + \sec\theta + \sin\theta\sec\theta - \operatorname{tg}\theta - \sin\theta\operatorname{tg}\theta \\
 &= 1 + \sin\theta + \frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \sin\theta \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
 &= 1 + \sin\theta + \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \\
 &= 1 + \sin\theta + \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta} = 1 + \sin\theta + \cos\theta.
 \end{aligned}$$

∴ 左边 = 右边

$$\begin{aligned}
 \text{证法五: 左边} &= \frac{1 + \sec\theta + \operatorname{tg}\theta}{(\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta) + \sec\theta - \operatorname{tg}\theta} \\
 &= \frac{1 + \sec\theta + \operatorname{tg}\theta}{(\sec\theta - \operatorname{tg}\theta)(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta + 1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sec\theta - \operatorname{tg}\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \\
 &= \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}
 \end{aligned}$$

说明:一般说来,同角三角函数的证明问题,从三角函数的定义出发,有的往往比用公式来得简单,其实质是把三角问题转换为代数问题.

例3 已知 $\operatorname{tg}\theta = \frac{6}{5}$, 求 $\frac{1 - 3\sin\theta\cos\theta}{3\sin^2\theta - 4\cos^2\theta}$ 的值.

$$\begin{aligned}
 \text{解法一: 原式} &= \frac{\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{3\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{4\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} \\
 &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2\theta - 3\operatorname{tg}\theta}{3\operatorname{tg}^2\theta - 4} = \frac{1 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 3\left(\frac{6}{5}\right)}{3 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 4} = -\frac{29}{8}
 \end{aligned}$$

解法二: $\because \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{5}, \therefore y$ 可取 ± 6 , 则 $x = \pm 5$, (x, y 同号), $r = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$.

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin\theta &= \frac{y}{r} = \pm \frac{6}{\sqrt{61}}, \cos\theta = \pm \frac{5}{\sqrt{61}} \\
 \therefore \text{原式} &= \frac{1 - 3 \cdot \left(\pm \frac{6}{\sqrt{61}}\right) \left(\pm \frac{5}{\sqrt{61}}\right)}{3 \cdot \frac{36}{61} - 4 \cdot \frac{25}{61}} = \frac{61 - 90}{108 - 100} = -\frac{29}{8}
 \end{aligned}$$

说明:解法一的实质是:目标向已知转换,故分子、分母均除以 $\cos^2\theta$, 解法二则是从定义出发.

例4 设 $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{5}{13}$,

$$\text{求: } \frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}.$$

分析: 已知角为 $\frac{\pi}{4} - x$, 而求解的角为 $2x$ 、 $\frac{\pi}{4} + x$, 为此, 我们首先把所求的角向已知角转换: $2x = \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, $\frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, 这样就转换成同角三角函数的关系.

$$\begin{aligned} \text{解法一: } \frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} &= \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]} \\ &= \frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{24}{13} \\ &\left(\begin{array}{l} \because 0 < x < \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} < -x < 0 \\ \therefore 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{4}, \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

说明: 本例亦可从定义出发, $\because 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{5}{13}$, 故可设 $y = 5$, $r = 13$, $x = 12$,

$$\therefore 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \cdot \frac{x}{r} = \frac{24}{13}.$$

例 5 已知 $2\sin\theta + 3\cos\theta = 2$,

求 $\operatorname{tg}\theta$.

解法一: 根据万能代换:

$$2 \cdot \frac{2\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} + 3 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = 2$$

去分母,整理后得

$$5\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 4\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 1, \text{ 或 } \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{5}.$$

当 $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 1$ 时, $\operatorname{tg} \theta$ 不存在 ($\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

当 $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{5}$ 时, $\operatorname{tg} \theta = -\frac{5}{12}$.

解法二:

$$\because 2\sin\theta + 3\cos\theta = 2,$$

$$\sqrt{13}\sin(\theta + \varphi) = 2, \operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \sin(\theta + \varphi) = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

设 $y = 2, r = \sqrt{13}$, 则 $x = \pm 3$.

$$\therefore \operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \pm \frac{2}{3} \quad (\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2})$$

$$\text{即 } \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi} = \pm \frac{2}{3},$$

解这个方程,得

$$(1) \operatorname{tg}\theta \text{ 不存在}, (2) \operatorname{tg}\theta = -\frac{5}{12}.$$

解法三: $\because 2\sin\theta + 3\cos\theta = 2$

$$\therefore 2\frac{y}{r} + 3\frac{x}{r} = 2$$

$$2y + 3x = 2r = 2(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\therefore 4y^2 + 12xy + 9x^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$\therefore 5x^2 + 12xy = 0$$

$$x(5x + 12y) = 0$$

(1) $x = 0$, $\operatorname{tg} \theta$ 不存在.

$$(2) 5x + 12y = 0, \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = -\frac{5}{12}.$$

解法四: $\because 2\sin\theta + 3\cos\theta = 2$

$$2(1 - \sin\theta) - 3\cos\theta = 0$$

$$2\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 - 3\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[2\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right) - 3\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\right] = 0$$

$$\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + 5\sin\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = 1, \text{ 或 } \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{5} \text{ (以下同解法一).}$$

说明:这四种解法中,显然从定义出发最简单,其实质是 $2y + 3x = 2r$ 是三元方程,因为 $r^2 = x^2 + y^2$,故它可化为 $2y + 3x = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ 的二元方程,而最后要求的是 $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$ 的比值,在代数方程中,一元方程有解,而二元方程可求出比值,故利用三角函数的定义,可把三角问题转化为代数的方程问题.

二、“数”与“形”的相互转换

“数”一般是指函数三种表达式中的解析式;

“形”一般是指函数的图像表示式.

代数是研究“数”的科学;几何是研究“形”的科学;三角作为一种工具,两者皆而有之.解析几何是用代数的方法来研究几何的一门学科,两者结合使几何研究取得了重大突破.代数与几何是对立的两个方面,两者在坐标系下统一了起来.

有时从“形”的观点来考虑问题比直接从数的观念出发要直观、简便,在大多数的情况下,“数”和“形”两者应取长补短,即取两

者之长来解决问题.

1. “形”与三角函数的性质:

三角函数的解析式,我们称之为“数”,单位圆、直角三角形等理解为“形”.三角函数的图像可以直观地反映出三角函数的性质,反之,掌握了三角函数的性质,就能简捷地作出图像,两者是相辅相成的.三角函数的图像,可以看作“数”向“形”的一种转换,由于这一转换,可以使学生直观地认识到三角函数的一些规律:如三角函数的定义域、值域(即图像在坐标平面上的伸展范围);最大值、最小值(图像上的最高点、最低点);奇偶性(图像关于原点或 y 轴对称);单调性(图像的升降情况);周期性(图像每隔一定距离形状相同)等.

例1 如图 1—2—1 为形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像($A > 0, \omega > 0$).

- 求:(1) 定义域、值域;
 (2) 最大值、最小值;
 (3) 奇偶性;
 (4) 单调性;
 (5) 周期性;
 (6) 写出函数解析式.

解:从图像上可以看出:

- (1) $x \in \mathbb{R}, -2 \leq y \leq 2$;
 (2) 当 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ 时,

$$y_{\max} = 2;$$

$$\text{当 } x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ 时,}$$

$$y_{\min} = -2.$$

(3) 图像既不和 y 轴对称,又不关于原点中心对称,故是非奇非偶函数;

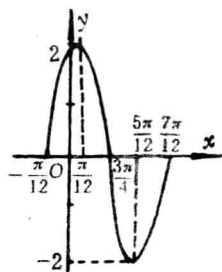


图 1—2—1

(4) $-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, y 单调递增; $\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$, y 单调递减.

$$(5) T = \frac{7\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$$

$$(6) \omega = 3, (\because T = \frac{2\pi}{\omega})$$

$$3x + \varphi = 0, x = -\frac{\pi}{12}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

从图上可知, $A = 2$.

$$\therefore \text{解析式为 } y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$$

说明:在考虑单调性时,把图像向左延伸 $\frac{1}{4}$ 周期到 $x = -\frac{\pi}{4}$ 处,这样递增区域就可连在一起加以讨论.

例2 画出函数 $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像(一个周期).

解:设 $x' = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}$, 当 x' 分别取 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ 时,得有关 x, y 的值,列表如下:

x'	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{14\pi}{3}$
y	0	2	0	-2	0

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} = 0, x_1 = \frac{2\pi}{3}$$

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{5\pi}{3}$$

$$x_3 = \frac{8\pi}{3}, x_4 = \frac{11\pi}{3}, x_5 = \frac{14\pi}{3}.$$