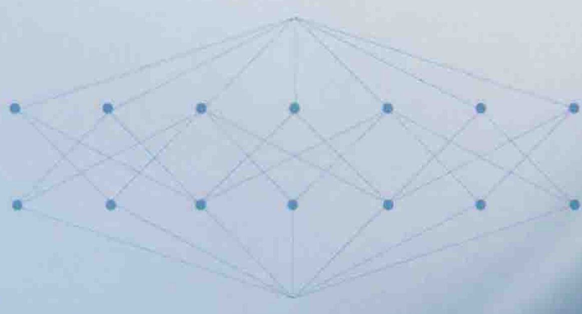
抽象代数引论

陈引兰　施恩伟　左可正　编著



科学出版社

抽象代数引论

陈引兰　施恩伟　左可正　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书在格和泛代数的层面上讲述传统抽象代数中的群、环、域和模的内容，同时介绍现代分析理论研究所需的代数理论.

本书既可作为高等院校数学专业高年级本科生的课程教材、研究生的专业基础课程教材或教学参考书，也可供高等院校相关专业的教师及相关科研工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

抽象代数引论/陈引兰，施恩伟，左可正编著．—北京：科学出版社，2014.6

ISBN 978-7-03-040666-8

Ⅰ. ① 抽… Ⅱ. ① 陈… ② 施… ③ 左… Ⅲ. ① 抽象代数-高等学校-教材 Ⅳ. ① O153

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 102003 号

责任编辑：吉正霞 李香叶／责任校对：桂伟利

责任印制：高 嵘／封面设计：蓝 正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5 (720 × 1000)

2014 年 7 月第 一 版 印张：7 1/2

2014 年 7 月第一次印刷 字数：146 000

定价：26.80 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书主要介绍格、泛代数基础、群、环和域及模, 与其他代数学论著与教材有以下两点明显的区别.

其一, 本书是在格和泛代数的层面上讲述抽象代数的内容, 这是我们对代数教学内容的一个新的尝试, 经过多年的研究及教学实践, 其效果是好的. 其特点是突出了代数学内容的统一性, 这样系统化、抽象化之后, 读者能更深刻地理解代数的核心内容.

其二, 本书包括局部环、诺特环、诺特模等内容, 这些代数理论是现代数学分析理论研究所需要的最基本的代数理论. 但是, 在其他一些相关的论著中, 很少涉及这些内容.

本书的主要内容是由编者近年来在湖北师范学院及云南师范大学讲授抽象代数课程的讲义编写成的, 还介绍编者的一些较新的科研成果. 其中, 第 1 章格、第 2 章泛代数基础、第 5 章模由陈引兰副教授执笔; 第 3 章群由陈引兰和左可正教授执笔; 第 4 章环和域由施恩伟教授执笔. 全书由陈引兰和左可正负责统稿.

感谢为本书提出宝贵建议和给予帮助与支持的教师 (中国科学技术大学的郭文彬教授、湖北师范学院的李开灿教授、黄朝凌博士、谢涛博士、余红宴博士) 和硕士研究生 (石向前、燕敏等).

本书得到学校重点学科 (数学和统计学)、专著专项基金的资助, 得到省教育厅《应用数学》重点学科基金的资助, 得到省教育厅科学技术研究项目 (D20122202) 的资助, 在此一并表示感谢!

抽象代数内容和结论丰富, 由于篇幅的限制, 本书中所展现的许多抽象代数精华也只是挂一漏万, 乃作者一孔之见, 不足之处在所难免, 敬请专家、学者及广大读者批评指正!

编　者

2014 年 5 月

目　录

第1章　格

格是一类应用广泛的代数系统, 是随着经典逻辑的代数化与泛代数的发展而引进的. 近代格理论大约形成于 20 世纪 30 年代. 近年来, 格的理论在组合数学、量子力学、模型推理、理论计算机科学, 甚至在社会科学中都得到了广泛的应用, 同时也极大地推动了该学科自身的发展, 使之成为数学和理论计算机科学中的重要研究对象.

本章包括两部分内容, 第一部分主要介绍偏序集的概念, 第二部分是介绍格的一些基本概念及性质.

1.1　偏　序　集

设 A 是一个非空集合, $a, b \in A$, 则 a 与 b 之间可能存在某种关系, 记这种关系为 R. 假设若 a 与 b 具有关系 R, 称为 aRb 或者 (a, b). 所有具有关系 R 的元素对 (a, b) 构成 $A \times A$ 的一个子集. 所以, 给出下面的定义.

定义 1.1　设 A 为一个非空集合, $A \times A$ 的一非空子集 R 称为是 A 上的一个二元关系. 若 $(a, b) \in R$, 则称 a 与 b 具有关系 R. 习惯上, 若 $(a, b) \in R$, 则记为 aRb.

例 1　设集合 $A = \{x, y, z\}$, $R_1 = \{(x, x), (x, y), (x, z)\} \subset A \times A$, 则 R_1 是 A 上的一个二元关系; 又设 $R_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z)\} \subset A \times A$, 则 R_2 也是 A 上一个二元关系.

定义 1.2　设 R 是非空集合 A 上一个二元关系, 即 $R \subset A \times A$, 若 R 满足

(1) $\forall x \in A$, 有 xRx, 并称 R 具有自反性;

(2) 若 xRy 且 yRx, 则有 $x = y$, 并称 R 具有反对称性;

(3) 若 xRy 且 yRz, 则 xRz, 并称 R 具有传递性,

则说关系 R 是一个偏序关系.

换个说法, 设 $R \subset A \times A$, 若

$(1)'$ $\forall x \in A$ 有 $(x, x) \in R$, 即 R 具有自反性;

$(2)'$ 若 $(x, y) \in R, (y, x) \in R$, 则 $x = y$, 即 R 具有反对称性;

$(3)'$ 若 $(x, y) \in R, (y, z) \in R$,

则 $(x, z) \in R$, 即 R 具有传递性, 则 R 是 A 上的偏序关系.

例 2　(1) 设 Z 为一非空集合, 用 $\mathrm{Su}(Z)$ 表示 Z 的幂集合, 定义 $\mathrm{Su}(Z)\times\mathrm{Su}(Z)$ 的子集为 $(A,B)\in R$ 当且仅当 $A\subset B$, 则 R 是 $\mathrm{Su}(Z)$ 上的偏序关系, 或者说 $\subset$ 是 $\mathrm{Su}(Z)$ 上的偏序关系.

(2) 设 A 是正整数集, 定义 $A\times A$ 的子集 R 为 $(m,n)\in R$ 当且仅当 m 整除 n, 则 R 是 A 上的偏序关系.

(3) 设 A 是实数集, $\leqslant$ 表示两个实数的大小关系, 则 $\leqslant$ 是 A 上的一个偏序关系.

定义 1.3　设 R 是集合 S 上的一偏序关系, 则称 (S,R) 为偏序集. 习惯上, 为了方便, 用 $\leqslant$ 表示偏序关系.

注　在偏序集 $(S,\leqslant)$ 中的任两个元素 a,b, 不一定有 $a\leqslant b$ 或者 $b\leqslant a$, 也就是说, 任意两个元素不一定可以比较大小. 若 $a\leqslant b$, 则说 a 小于或等于 b.

定义 1.4　设 $(S,\leqslant)$ 是偏序集, 若任取 $x,y\in S$, 有 $y\leqslant x$ 或 $x\leqslant y$, 称 S 是一个链或是一个有序集或全序集. 设 $(S,\leqslant)$ 是偏序集, $A\subset S$. 若 A 是一个链, 称 A 是 S 的线性子集或有序子集.

定义 1.5　偏序集 $(S,\leqslant)$ 的元素 a 称为 S 的最小元, 如果 $\forall x\in S$, 有 $a\leqslant x$. S 的元素 b 称为 S 的最大元, 如果 $\forall x\in S$, 则有 $x\leqslant b$. S 的元素 m 称为 S 的极大元, 如果存在 $x\in S$, 使得 $m\leqslant x$, 则必有 $m=x$. S 的元素 l 称为 S 的一个极小元, 如果存在 $x\in S$, 使得 $x\leqslant l$, 则必有 $x=l$.

显然, 若 S 有最大元, 则必定是唯一的. 最大元一定是极大元. 反之未必, 极大元若存在, 也不一定唯一. 最小元与极小元也是如此.

定义 1.6　若偏序集 $(S,\leqslant)$ 是有限集, 可用图形表示其偏序关系, 称为 Hasse 图. 我们用 “$\circ$” 代表 S 的元素, 若 $a,b\in S$ 且 $a\leqslant b$, 则用图 1.1 表示. 注意, 元素 a 位于线段的下端, 元素 b 位于线段上端. 当 $a=b$ 时, 我们理解为两个圆圈是重合的. 这样, 整个集合 S 中元素之间的偏序关系就可以用图形表示出来. 利用偏序集 S 的 Hasse 图, 能够比较容易地看出 S 的元素的一些性质.

例 3　设 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\forall m,n\in S$, 规定 $m\leqslant n$ 当且仅当 m 能整除 n, 则 $(S,\leqslant)$ 是偏序集, 它的 Hasse 图为图 1.2, 由图 1.2 立即可知 S 有极大元 5, 6, 7 及 8, 无最大元.

定义 1.7　设 A 是偏序集 $(S,\leqslant)$ 的一个非空子集, S 的一个元素 b 称为 A 的一个上界, 如果 $\forall x\in A$ 都有 $x\leqslant b$. A 的一个上界 b 称为 A 的最小上界 (或上确界), 如果对于 A 的任意一个上界 c 均有 $b\leqslant c$.

A 的下界及最大下界 (或下确界) 可类似定义.

注　对于偏序集 S 的任意子集 A, 用 $\vee A$ 或 $\sup A$ 及 $\wedge A$ 或 $\inf A$ 分别表示它的上确界及下确界. 特别地, 若 $A=\{a_i|i=1,2,3,\cdots,n\}$, 习惯上, 用 $a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$, 即 $\vee a_i$ 表示 A 的上确界. 同样地, $\wedge a_i$ 表示 A 的下确界.

图 1.1

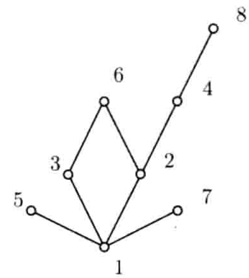


图 1.2

例 4 设 $(\mathbb{Q},\leqslant)$ 是由有理数组成的偏序集, $\leqslant$ 表示实数大小关系. $H=\{x|x\in\mathbb{Q},x<\sqrt{2}\}$ 为 $\mathbb{Q}$ 的一个子集, 则易证每一个大于 $\sqrt{2}$ 的有理数都是 H 的上界, 即 H 的上界之集为 $H^*=\{y|y\in\mathbb{Q},y>\sqrt{2}\}$, H^* 中没有最小元素, 即在 $\mathbb{Q}$ 中不存在上确界 $\vee A$.

例 5 偏序集 $(S,\leqslant)$, 如图 1.3 所示.

$H=\{c,d,e\}$, c,b,a 都是 H 的上界, $\vee H=c$, e 是 H 的下界, 且 $\wedge H=e$.

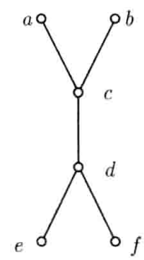


图 1.3

1.2 格的定义

格的定义有两种方法, 一种是利用 1.1 节中的偏序集概念定义, 另一种是以代数运算为基础来定义.

定义 1.8 设 $(L,\leqslant)$ 是一个偏序集, 如果对 $\forall a,b\in L$, $a\vee b$ 与 $a\wedge b$ 都存在, 则称 $(L,\leqslant)$ 为一个格, 称 $\vee$ 为格 L 的并运算, $\wedge$ 为交运算.

下面是格的另一种定义方式.

定义 1.8* 包含两个二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 的非空集合 L 称为格, 若满足以下四个条件:

(1) $a\wedge a=a, a\vee a=a$ (幂等律).

(2) $a\wedge b=b\wedge a, a\vee b=b\vee a$(交换律).

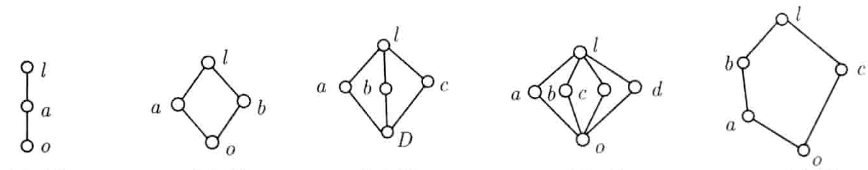
(3) $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$, $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$(结合律).

(4) $a\wedge(a\vee b)=a, a\vee(a\wedge b)=a$(吸收律).

例 1 (1) 设 Z 是一个非空集合, 在偏序集 $(\mathrm{Su}(Z),\subseteq)$ 中定义 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别为集合的并和交, 则 $(\mathrm{Su}(Z),\cup,\cap)$ 是一个格, 称为 Z 的幂集格.

(2) 以 A 表示实数集, 设 $F=\{f|f:A\longrightarrow A$ 为连续函数$\}$, $\forall f,g\in F$, 定义 $f\leqslant g$ 当且仅当 $\forall x\in A$, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $(F,\leqslant)$ 是一个格.

(3) 偏序集 M_1,M_2,M_3,M_4,N_5 都是格. 如图 1.4 所示.



(a) M_1　(b) M_2　(c) M_3　(d) M_4　(e) N_5

图 1.4

命题 1.9　格的两个定义是等价的.

证明　1) 若 $(L,\leqslant)$ 是一个由定义 1.8 给出的格, 定义运算 $\vee$ 为 $a\vee b=\sup\{a,b\}$, 运算 $\wedge$ 为 $a\wedge b=\inf\{a,b\}$, 则

(1) 由自反性知, $a\leqslant a$, 于是 a 是 $\{a,a\}$ 的一个下界, 所以 $a\leqslant a\wedge a$. 反过来, 因为 $a\wedge a$ 是 $\{a,a\}$ 的下确界, 所以 $a\wedge a\leqslant a$, 因此 $a\wedge a=a$. 同理 $a\vee a=a$, 幂等律证毕.

(2) 因为 $a\wedge b$ 既是 $\{a,b\}$ 的下确界, 也是 $\{b,a\}$ 的下确界, 所以 $a\wedge b\leqslant b\wedge a$. 同理 $b\wedge a\leqslant a\wedge b$. 所以 $a\wedge b=b\wedge a$. 同理 $a\vee b=b\vee a$. 交换律证毕.

(3) 因为 $(a\wedge b)\wedge c$ 是 $\{a\wedge b,c\}$ 的下确界, 所以 $(a\wedge b)\wedge c\leqslant a\wedge b$ 且 $(a\wedge b)\wedge c\leqslant c$. 又由 $a\wedge b$ 是 $\{a,b\}$ 的下确界, 所以有 $a\wedge b\leqslant a$, $a\wedge b\leqslant b$. 于是 $(a\wedge b)\wedge c\leqslant a$, $(a\wedge b)\wedge c\leqslant b,(a\wedge b)\wedge c\leqslant c$. 由 $(a\wedge b)\wedge c\leqslant b,(a\wedge b)\wedge c\leqslant c$ 知 $(a\wedge b)\wedge c$ 是 $\{b,c\}$ 的下界, 得 $(a\wedge b)\wedge c\leqslant b\wedge c$. 又 $(a\wedge b)\wedge c\leqslant a$ 知 $(a\wedge b)\wedge c$ 是 $\{a,b\wedge c\}$ 的下界, 得 $(a\wedge b)\wedge c\leqslant a\wedge(b\wedge c)$. 同理 $a\wedge(b\wedge c)\leqslant(a\wedge b)\wedge c$, 所以 $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$.

同理可证 $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$, 结合律证毕.

(4) 因为 $a\wedge(a\vee b)$ 是 $\{a,a\vee b\}$ 的下确界, 所以 $a\wedge(a\vee b)\leqslant a$. 又因为 $a\vee b\geqslant a,a\vee b\geqslant a\vee b$, 所以 $a\wedge(a\vee b)\geqslant a$. 故 $a\wedge(a\vee b)=a$, 同理, $a\vee(a\wedge b)=a$, 吸收律证毕.

综上所述, 由定义 1.8 可推出定义 1.8*.

2) 若 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个由定义 1.8* 给出的格, 我们在 L 上定义关系 $\leqslant$ 为 $a\leqslant b$ 当且仅当 $a=a\wedge b$ 或 $b=a\vee b$, 因为 $a=a\wedge b$ 与 $b=a\vee b$ 是等价的.

(1) 由 $a\wedge a=a$ 可以推出 $a\leqslant a$. 自反性成立.

(2) 若 $a\leqslant b,b\leqslant a$,.则 $a=a\wedge b,b=b\wedge a$, 所以 $a=b$. 反对称性成立.

(3) 若 $a\leqslant b,b\leqslant c$, 则 $a=a\wedge b,b=b\wedge c$, 所以 $a=a\wedge b=a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c=a\wedge c$, 即 $a\leqslant c$. 传递性成立. 由上面 (1)(2)(3) 知, 二元关系 $\leqslant$ 为一个偏序关系. 因为 $a=a\wedge(a\vee b),b=b\wedge(a\vee b)$, 所以 $a\leqslant a\vee b$, $b\leqslant a\vee b$, 即 $a\vee b$ 是 $\{a,b\}$ 的上界. 若 $a\leqslant u,b\leqslant u$, 则 $a\vee u=(a\wedge u)\vee u=u$. 同样地, $b\vee u=u$, 所以 $(a\vee u)\vee(b\vee u)=u\vee u=u$. 所以 $(a\vee b)\vee u=u$, 又 $(a\vee b)\wedge u=(a\vee b)\wedge[(a\vee b)\vee u]=a\vee b$, 可以得出 $a\vee b\leqslant u$. 因此 $a\vee b=\sup\{a,b\}$. 同理可证 $a\wedge b=\inf\{a,b\}$.

综上, 由定义 1.8* 可以推出定义 1.8. □

例 2 设 I 是正整数集合, $m,n\in I$, 定义: $m\leqslant n$ 当且仅当 m 整除 n, 则 $(I,\leqslant)$ 是偏序集. 进一步在 I 上定义运算 $\vee$ 和 $\wedge$: $a\vee b=a$ 与 b 的最小公倍数; $a\wedge b=a$ 与 b 的最大公约数, 则 $(I,\vee,\wedge)$ 是一个格.

例 3 设 $(L,\vee,\wedge)$ 与 $(M,\vee,\wedge)$ 是两个格, 在 $L\times M$ 上定义运算 $\curlyvee$ 和 $\curlywedge$ 如下: $\forall(a,c)\in L\times M,(b,d)\in L\times M$, $(a,c)\curlyvee(b,d)=(a\vee b,c\vee d),(a,c)\curlywedge(b,d)=(a\wedge b,c\wedge d)$, 则可以证明 $(L\times M,\curlyvee,\curlywedge)$ 也是一个格.

1.3 格的同构与子格

对任意的两个格 L_1 与 L_2, 为了方便, 我们用相同的运算符号 $\vee$ 与 $\wedge$ 表示它们的运算.

定义 1.10 设 L_1 与 L_2 是格, 若存在映射 α: $L_1\longrightarrow L_2$ 满足 $\alpha(a\vee b)=\alpha(a)\vee\alpha(b)$, $\alpha(a\wedge b)=\alpha(a)\wedge\alpha(b)$, 则称 α 为 L_1 到 L_2 的格同态. 若 α 是格同态且为双射, 则称 L_1 与 L_2 同构, 记为 $L_1\cong L_2$. 同时称 $\alpha:L_1\longrightarrow L_2$ 是同构映射.

注 1 双射也称为一一对应或满单射.

注 2 若 α 是 L_1 到 L_2 的一个同构映射, 则 α^{-1} 是 L_2 到 L_1 的一个同构映射. 若 β 是 L_2 到 L_3 的一个同构映射, 则 $\beta\circ\alpha$ 是 L_1 到 L_3 的一个同构映射.

定义 1.11 若 P_1 和 P_2 是两个偏序集, α 是 P_1 到 P_2 的一个映射, 我们称 α 是保序映射. 若 $a\leqslant b$ 时, 有 $\alpha(a)\leqslant\alpha(b)$ 成立, 对 $\forall a,b\in P_1$.

命题 1.12 设 L_1 与 L_2 是格, α: $L_1\longrightarrow L_2$ 满足 $\alpha(a\vee b)=\alpha(a)\vee\alpha(b)$, 则 α 为保序的; 若 α 满足 $\alpha(a\wedge b)=\alpha(a)\wedge\alpha(b)$, 则 α 也是保序的.

证明 设 α: $L_1\longrightarrow L_2$ 满足 $\alpha(a\vee b)=\alpha(a)\vee\alpha(b)$, 且 $a,b\in L_1,a\leqslant b$, 则 $b=a\vee b$, 所以 $\alpha(b)=\alpha(a\vee b)=\alpha(a)\vee\alpha(b)$, 即 $\alpha(b)$ 是 $\{\alpha(a),\alpha(b)\}$ 的上确界, 故 $\alpha(a)\leqslant\alpha(b)$, 即 α 是保序的. 同理, α 满足 $\alpha(a\wedge b)=\alpha(a)\wedge\alpha(b)$ 时也是保序的. □

注 命题 1.12 的逆命题不一定成立.

例 1 如图 1.5 所示, 在 L_1 中, $b\vee c=a$. 在 L_2 中, $\alpha(b\vee c)=\alpha(a)=a'$, $\alpha(b)\vee\alpha(c)=b'\vee c'=b'\neq a'=\alpha(b\vee c)$. 显然, α 保序但是并不保并.

定理 1.13 两个格 L_1 与 L_2 是同构的当且仅当存在 L_1 到 L_2 的一个双射 α 满足 α 和 α^{-1} 都是保序的.

证明 因为 α 是一个双射, 所以 α^{-1} 存在且也是一个双射.

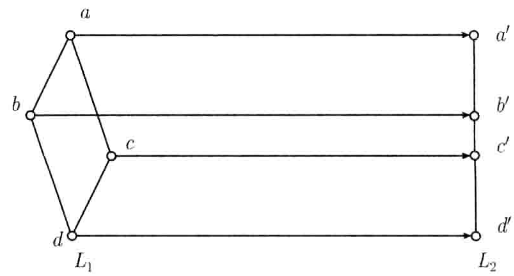


图 1.5

必要性. 若 L_1 与 L_2 是同构的, 则存在 L_1 到 L_2 的一个双射 α 满足 $\alpha(a\vee b)=\alpha(a)\vee\alpha(b)$, 所以 α 必是一个保序映射. α^{-1} 的保序性也可以类似证明.

充分性. 设 α 与 α^{-1} 均保序, 因为在 L_1 中有 $a\leqslant a\vee b, b\leqslant a\vee b$, 所以 $\alpha(a)\leqslant\alpha(a\vee b),\alpha(b)\leqslant\alpha(a\vee b)$. 因此 $\alpha(a\vee b)$ 是 $\{\alpha(a),\alpha(b)\}$ 的上界, 所以 $\alpha(a\vee b)\geqslant\alpha(a)\vee\alpha(b)$.

此外, $\alpha(a)\leqslant\alpha(a)\vee\alpha(b),\alpha(b)\leqslant\alpha(a)\vee\alpha(b)$, 所以 $a\leqslant\alpha^{-1}\circ(\alpha(a)\vee\alpha(b)),b\leqslant\alpha^{-1}\circ(\alpha(a)\vee\alpha(b))$, 所以 $a\vee b\leqslant\alpha^{-1}\circ(\alpha(a)\vee\alpha(b))$, 从而 $\alpha(a\vee b)\leqslant\alpha(a)\vee\alpha(b)$.

故 $\alpha(a\vee b)=\alpha(a)\vee\alpha(b)$. 同理可证 $\alpha(a\wedge b)=\alpha(a)\wedge\alpha(b)$, 所以 α 是 L_1 到 L_2 的一个同构映射, 故 L_1 和 L_2 同构. □

定义 1.14　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个格, L' 是 L 的一非空子集且满足 $\forall a,b\in L'$, $a\vee b$ 和 $a\wedge b$ 与 L 中是一致的, 则我们说 L' 是 L 的一个子格.

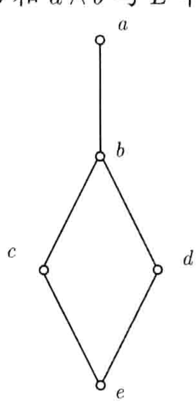


图 1.6

例 2　L 是如图 1.6 所示定义的格, 取 $L_1=\{a,c,d,e\}$, L_1 是一个格, 但不是 L 的子格. 因为在 L 中 $c\vee d=b$, 在 L_1 中 $c\vee d=a$. 取 $L_2=\{a,b,c,e\}$, 则 L_2 是 L 的一个子格.

定义 1.15　我们称格 L_1 能被嵌入格 L_2, 若存在 L_2 的一个子格同构于 L_1.

除了同构之外, 有时需要考虑反同构.

设 $\alpha: L_1\longrightarrow L_2$, 满足

(1) α 是一一对应;

(2) $\alpha(a\vee b)=\alpha(a)\wedge\alpha(b)$;

(3) $\alpha(a\wedge b)=\alpha(a)\vee\alpha(b)$,

称 α 为反同构.

例 3　若 L 是 Banach 空间中的闭子集格, $E\in L$, $E^{\perp}\in L$, 定义 $\alpha:L\longrightarrow L$ 为 $E\longrightarrow E^{\perp}$, 则 α 为反同构.

1.4 分配格与模格

定义 1.16 格 L 称为分配格, 若 L 满足下面的分配律:

(1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

$\forall\ x, y, z \in L$.

注 实际上, 定义 1.16 中的条件 (1) 与 (2) 是等价的, 出于对称性的目的, 定义要求 L 满足两个条件, 定理 1.17 证明了这一事实.

定理 1.17 格 L 满足 (1) 当且仅当它满足 (2).

证明 设 (1) 成立, 则

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \quad (\text{吸收律}) \\ &= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\ &= x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) \\ &= x \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee ((x \vee y) \wedge z) \\ &= (x \wedge (x \vee y)) \vee ((x \vee y) \wedge z) \quad (\text{吸收律}) \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{aligned}$$

即式 (2) 成立.

反之同理可证. □

例 1 (1) 幂集格是一个分配格.

(2) 设 I 是正整数集合, $m, n \in I$, 定义 $m \leqslant n$ 当且仅当 m整除n, 则 $(I, \leqslant)$ 也是一个分配格.

比分配律条件要弱的是模律, 下面给出模格与模律的定义.

定义 1.18 格 L 称为模格, 若 L 满足下面的条件:

(M) 设 $x, y \in L$, 当 $x \leqslant y$ 时, 有 $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$.

条件 (M) 称为模律.

定理 1.19 每一个分配格一定是模格.

证明 由分配律 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ 知, 当 $x \leqslant y$ 时 $x \vee y = y$, 所以 $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$, 即满足模律, 所以分配格必是模格. □

例 2 对于图 1.4 中 N_5, $a \leqslant b$ 时, $a \vee (b \wedge c) \neq b \wedge (a \vee c)$, 所以 N_5 不是模格. 但是可以验证出 M_3 是一个模格.

注 定理 1.19 的逆不成立, 如 M_3 是模格, 但不是分配格.

定理 1.20 L 不是模格当且仅当 N_5 能被嵌入 L (即 N_5 同构于 L 的某个子格).

证明　必要性. 设 L 不是模格, 则必存在 $a,b,c\in L$, 使得 $a\leqslant b$, 但 $a\vee(b\wedge c)\neq b\wedge(a\vee c)$, 记 $a_1=a\vee(b\wedge c)$ 及 $b_1=b\wedge(a\vee c)$. 事实上, 由 $a\leqslant b$ 及 $a\leqslant a\vee c$ 得 $a\leqslant b\wedge(a\vee c)$; 由 $b\wedge c\leqslant b$ 及 $b\wedge c\leqslant c\leqslant a\vee c$ 得 $b\wedge c\leqslant b\wedge(a\vee c)$, 所以 $a\vee(b\wedge c)\leqslant b\wedge(a\vee c)$, 即 $a_1\leqslant b_1$, 但 L 不是模格, 故必有 $a_1<b_1$. 记 $L_0=\{a_1,b_1,c,a\vee c,b\vee c\}$(图 1.7), 则 L_0 与 N_5 同构. 又因为 $c\wedge b\leqslant a_1\leqslant b_1$, 所以 $c\wedge b\leqslant c\wedge a_1\leqslant c\wedge b_1=c\wedge b$, 因此 $c\wedge a_1=c\wedge b_1=c\wedge b$. 同理有 $c\vee b_1=c\vee a_1=c\vee a$. 于是, 显然 L_0 是 L 的子格且与 N_5 同构, 即 N_5 可嵌入到 L 中.

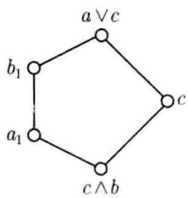


图 1.7

充分性. 若 N_5 能嵌入 L, 即 L 有一个子格与 N_5 同构. 显然在 N_5, 因 $a<b$, 故条件 $a\leqslant b$ 成立, 且 $a\vee(b\wedge c)=a$, $(a\vee b)\wedge(a\vee c)=b\wedge(a\vee c)=b\neq a$, 即 $a\vee(b\wedge c)\neq b\wedge(a\vee c)$, 所以模律不成立, 即 L 不是模格. □

命题 1.21　L 是一个模格当且仅当对 $x,y\in L$, $x\leqslant y$, 若存在 $a\in L$, 使 $a\vee x=a\vee y$, $a\wedge x=a\wedge y$, 则 $x=y$.

证明　必要性. 设 L 是一个模格, 且 $x\leqslant y\in L$, 则 $x=x\vee(x\wedge a)=x\vee(y\wedge a)=y\wedge(x\vee a)=y\wedge(y\vee a)=y$.

充分性. 首先, 设 $x\leqslant y$, 且 $a\vee x=a\vee y, a\wedge x=a\wedge y$ 时 $x=y$, 因为 $x\leqslant y$, 又 $x\leqslant a\vee x$, 所以 $x\leqslant y\wedge(a\vee x)$, 又由 $a\wedge y\leqslant y, a\wedge y\leqslant a\leqslant a\vee x$, 得 $a\wedge y\leqslant y\wedge(a\vee x)$, 所以 $y\wedge(a\vee x)\geqslant x\vee(a\wedge y)$, $a\wedge y=(a\wedge y)\wedge a\leqslant(x\vee(a\wedge y))\wedge a\leqslant(y\wedge(a\vee x))\wedge a=y\wedge((a\vee x)\wedge a)=y\wedge a$. 从而 $a\wedge(x\vee(a\wedge y))=a\wedge(y\wedge(a\vee x))$.

其次, $a\vee x\leqslant a\vee(x\vee(a\wedge y))\leqslant a\vee(y\wedge(a\vee x))\leqslant(a\vee x)\vee(y\wedge(a\vee x))=a\vee x$. 从而 $a\vee(x\vee(a\wedge y))=a\vee(y\wedge(a\vee x))$. 由条件可得当 $x\leqslant y$ 时, $x\vee(a\wedge y)=y\wedge(a\vee x)$, 故 L 是一个模格. □

定理 1.22　L 不是分配格当且仅当 M_3 或 N_5 能嵌入 L.

证明　充分性显然.

必要性. 因为 L 不是分配格, 若 L 不是模格, 则由命题 1.21 知, N_5 能嵌入 L 中, 所以可以设 N_5 不能嵌入 L 中, 从而 L 是模格. 因分配律不成立, 故 L 中必存在元素 a,b,c 满足 $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)<a\wedge(b\vee c)$.

我们定义

$$d=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\vee(b\wedge c),\quad e=(a\vee b)\wedge(a\vee c)\wedge(b\vee c)$$

$$a_1=(a\wedge e)\vee d,\quad b_1=(b\wedge e)\vee d,\quad c_1=(c\wedge e)\vee d$$

则 $d\leqslant a_1,b_1,c_1\leqslant e$. 因为 $d\leqslant e$, 又 $a\wedge d<a\wedge e$, 所以 $d<e$.

$$\begin{aligned}a_1\wedge b_1&=[(a\wedge e)\vee d]\wedge[(b\wedge e)\vee d]=[(a\wedge e)\wedge((b\wedge e)\vee d)]\vee d\\&=[(a\wedge e)\wedge((b\vee d)\wedge e)]\vee d=[(a\wedge e)\wedge e\wedge(b\vee d)]\vee d\end{aligned}$$

$$= [(a \wedge e) \wedge (b \vee d)] \vee d = [a \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee (a \wedge c))] \vee d$$
$$= [a \wedge (b \vee ((b \vee c) \wedge (a \wedge c)))] \vee d = [a \wedge (b \vee (a \wedge c))] \vee d$$
$$= (a \wedge c) \vee (b \wedge a) \vee d = d$$

同理可证 $a_1 \vee b_1 = a_1 \vee c_1 = b_1 \vee c_1 = e$. 所以如图 1.8 所示的格是 L 的一个子格, 且与 M_3 同构.

综上, 若 L 不是分配格, 则 M_3 或 N_5 能嵌入 L. □

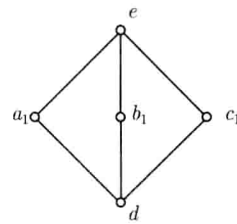


图 1.8

设 L 是格, $\forall\ x, y \in L$, 记

$$[x, y] = \{z | z \in L, x \leqslant z \leqslant y\}$$

显然, $[x, y]$ 是 L 的子格.

定理 1.23 设 L 是模格, $a, b \in L$, 则 $[a, a \vee b] \cong [a \wedge b, b]$.

证明 对 $\forall x \in [a, a \vee b]$, 定义映射 $\varphi(x) = x \wedge b$; 对 $\forall\ y \in [a \wedge b, b]$, 定义映射 $\phi(y) = a \vee y$, 则易证 $\varphi \circ \phi(y) = y$, $\phi \circ \varphi(x) = x$, 所以 $\phi = \varphi^{-1}$. 又易证 ϕ 及 φ 保序, 所以 $[a, a \vee b] \cong [a \wedge b, b]$. □

设格 L 存在最小元 0, $x \in L$, 设 $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = x$, 则称从 0 到 x 的有限链 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 的长度为 n, 记为 $l(x) = \max\{m | m$ 是所有从 0 到 x 的链的长度$\}$. 若 $l(x) < \infty$, 则称 $l(x)$ 是 x 的长度. 可以证明, 对于模格 L 有如下定理.

定理 1.24 设 L 是模格, $a, b \in L$, 则

$$l(a) + l(b) = l(a \vee b) + l(a \wedge b)$$

例 3 设 V 是 $n(\geqslant 2)$ 维实线性空间, 则 V 的所有子空间以包含关系为偏序关系构成一个模格, 记为 Sub$V$, 且 $l(V) = \dim V = n$, 而 Sub$V$ 不是分配格.

1.5 布尔代数

关于模格中元素的长度公式 $(*)$ 的更广泛的应用, 可参见文献 [1]. 模格对于群论的研究有着重要意义, 详见文献 [2].

定义 1.25 设格 L 有最大元 1 及最小元 0, 若对 $a \in L$, 存在 $x \in L$ 使得 $a \wedge x = 0, a \vee x = 1$, 则称 x 是 a 的补元.

注 格中的元素不一定有补元, 即使有也不一定唯一. 显然 1 是 0 的补元, 0 是 1 的补元. 若 a 的补元唯一, 用 a' 表示 a 的这个唯一的补元.

定理 1.26 设 L 是一个分配格, $a \in L$, 若存在 $x, y \in L$ 满足 $a \vee x = a \vee y, a \wedge x = a \wedge y$, 则 $x = y$.

证明

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (a \vee x)(\text{吸收律}) \\ &= x \wedge (a \vee y) \\ &= (x \wedge a) \vee (x \wedge y)(\text{分配律}) \\ &= (a \wedge y) \vee (x \wedge y) \\ &= y \wedge (a \vee x)(\text{分配律}) \\ &= (a \vee y) \wedge y = y(\text{吸收律}) \end{aligned}$$

即 $x = y$. □

定理 1.27 设 L 是一个分配格, $a \in L$, 若 a 有补元, 则补元唯一.

证明 假设 x 与 y 是 a 的任意两个补元, 则有 $a \vee x = 1, a \wedge x = 0$; $a \vee y = 1, a \wedge y = 0$, 因此 $a \vee x = a \vee y, a \wedge x = a \wedge y$, 由定理 1.26 知 $x = y$, 所以补元唯一. □

注 在分配格中, 一个元素最多有一个补元, 在非分配格中, 一个元素的补元 (若有) 不一定唯一. 例如, M_3 和 N_5 中就有这样的元.

定义 1.28 若格 L 中每一个元素都有补元, 则称格 L 是有补格.

定义 1.29 有补分配格称为布尔代数或布尔格.

例 设 X 是非空集, 在幂集格 $(\mathrm{Su}(X), \cup, \cap)$ 中, 若 $\forall A \subset X$, 定义 A' 为 A 的补集, 则 $(\mathrm{Su}(X), \cup, \cap, ')$ 是布尔代数.

设 B 是布尔代数, $a \in B$, 用 a' 表示 a 的补元素.

性质 1.30 设 B 是一个布尔代数, $\forall a, b \in B$, 则满足:

(1) $1' = 0, 0' = 1$;

(2) $(a')' = a$(对合性);

(3) 若 $a \leqslant b$, 则 $a' \geqslant b'$(逆序性);

(4) $(a \vee b)' = a' \wedge b', (a \wedge b)' = a' \vee b'$ (摩根律);

(5) $a \wedge b = 0$ 当且仅当 $a \leqslant b'$.

证明 (1) 因为 $1 \vee 0 = 1, 1 \wedge 0 = 0$, 所以 $1' = 0, 0' = 1$.

(2) 因为 $a \vee a' = 1, a \wedge a' = 0$, 所以 $(a')' = a$.

(3) 若 $a \leqslant b$, 则 $b' = b' \wedge 1 = b' \wedge (a \vee a') = (b' \wedge a) \vee (b' \wedge a')$. 因为 $a \leqslant b, a \wedge b' \leqslant b \wedge b' = 0$, 所以 $a \wedge b' = 0$. 因此 $b' = 0 \vee (b' \wedge a') = b' \wedge a'$, 所以 $b' \leqslant a'$.

(4) 由 $a \vee b \geqslant a, a \vee b \geqslant b$, 得 $(a \vee b)' \leqslant a', (a \vee b)' \leqslant b'$. 因此 $(a \vee b)'$ 是 $\{a', b'\}$ 的一个下界. 因为 $a' \wedge b'$ 是最大下界, 所以 $(a \vee b)' \leqslant a' \wedge b'$.

此外, 由 $a' \wedge b' \leqslant a', a' \wedge b' \leqslant b'$ 知 $(a' \wedge b')' \geqslant (b')' = b$ 及 $(a' \wedge b')' \geqslant a$, $(a' \wedge b')$ 是 $\{a, b\}$ 的一个上界, 得 $(a' \wedge b')' \geqslant a \vee b \Rightarrow a' \wedge b' \leqslant (a \vee b)'$, 所以 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$. 用 a', b' 代替等式 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ 中的 a, b, 则可得 $(a' \vee b')' = (a')' \wedge (b')' = a \wedge b$. 即 $(a \wedge b)' = ((a' \vee b')')' = a' \vee b'$. □

假设 L 是布尔代数, 则 $\forall\, a,b\in L$, 由 $a\leqslant b$ 得 $a'\geqslant b'$. 但是, 若 L 不是布尔代数, 更一般地, 若 L 不是分配格, 则对于 L 的元素 a, a 不一定存在补元, 即使存在补元, 则补元也不一定唯一. 但是我们可将性质 1.30 中的 (2) 和 (3) 一般化.

设 $\varphi: L\longrightarrow L$ 满足条件:

(i) 若 $a\leqslant b$, 则 $\varphi(a)\geqslant\varphi(b)$;

(ii) $\varphi(\varphi(a))=a, \forall a\in L$,

则称 φ 是 L 上的逆序对合对应. 习惯上, 我们记 $\varphi(a)=a'$, 易见, 此时等式

$$(a\vee b)'=a'\wedge b',\qquad (a\wedge b)'=a'\vee b'$$

仍成立.

(5) 必要性. 设 $a\wedge b=0$, 则 $(a\wedge b)'=0'$, 即 $a'\vee b'=1$. 故 $a=a\wedge 1=a\wedge(a'\vee b')=(a\wedge a')\cup(a\wedge b')=0\vee(a\wedge b')=a\wedge b'$. 所以 $a\leqslant b'$.

充分性. 设 $a\leqslant b'$, 则 $a\wedge b\leqslant b'\wedge b=0$, 即 $a\wedge b=0$.

1.6 完备格 等价关系 代数格

定义 1.31 偏序集 P 称为是完备的, 若对 P 的任一个子集 A, $\vee A$ 和 $\wedge A$ 都存在 (即 $\vee A$ 及 $\wedge A$ 是 P 中的元素). 一个格 L 是完备的, 若 L 作为偏序集, 它是完备的.

注 1 所有的完备的偏序集一定是格. 实际上, 在判断一个偏序集 P 是否是完备格时, 我们只需判断对任意的子集 A, $\vee A$ 是否存在或者 $\wedge A$ 是否存在即可. 下面的定理将证明这一结论.

注 2 对于空集 $\varnothing\subset P$, 约定 P 的每一个元素都是 $\varnothing$ 的上界及下界. 若 P 有最大元 1 及最小元 0, 则 $\vee\varnothing$ 及 $\wedge\varnothing$ 存在, 且 $\vee\varnothing=0$ 及 $\wedge\varnothing=1$.

定理 1.32 若对偏序集 P 的任何一个子集 A, $\vee A$ 存在或者 $\wedge A$ 存在, 则 P 就是一个完备格.

证明 若 P 的任一子集 A, $\vee A$ 存在, 则记 $A^c=\{x\in p|x$ 是 A 的下界 $\}$, 则 $\vee A^c=\wedge A$. 由假设条件知 $\vee A^c$ 存在, 所以 $\wedge A$ 也存在, 即 $\vee A$ 和 $\wedge A$ 都存在, 因此 P 是一个完备格. 同理, 若 $\wedge A$ 存在, 则 P 是一个完备格. □

例 1 (1) 实数集 $\mathcal{R}=(-\infty,+\infty)$ 以实数的大小关系为偏序关系构成一个完备格.

(2) 拓扑空间的开子集以集合的包含关系为偏序关系构成一个完备格.

注 若偏序集 P 有最大元 1 及最小元 0, 则约定 $\vee\varnothing=0$ 及 $\wedge\varnothing=1$.

定义 1.33 设 A 是一个非空集合, R_1 与 R_2 是 A 上二元关系. R_1 与 R_2 的复合关系, 记为 $R_1\circ R_2$, 定义为 $(a,b)\in R_1\circ R_2$ 当且仅当存在 $c\in A$ 满足