高等学校“十二五”规划教材——测绘地理信息类

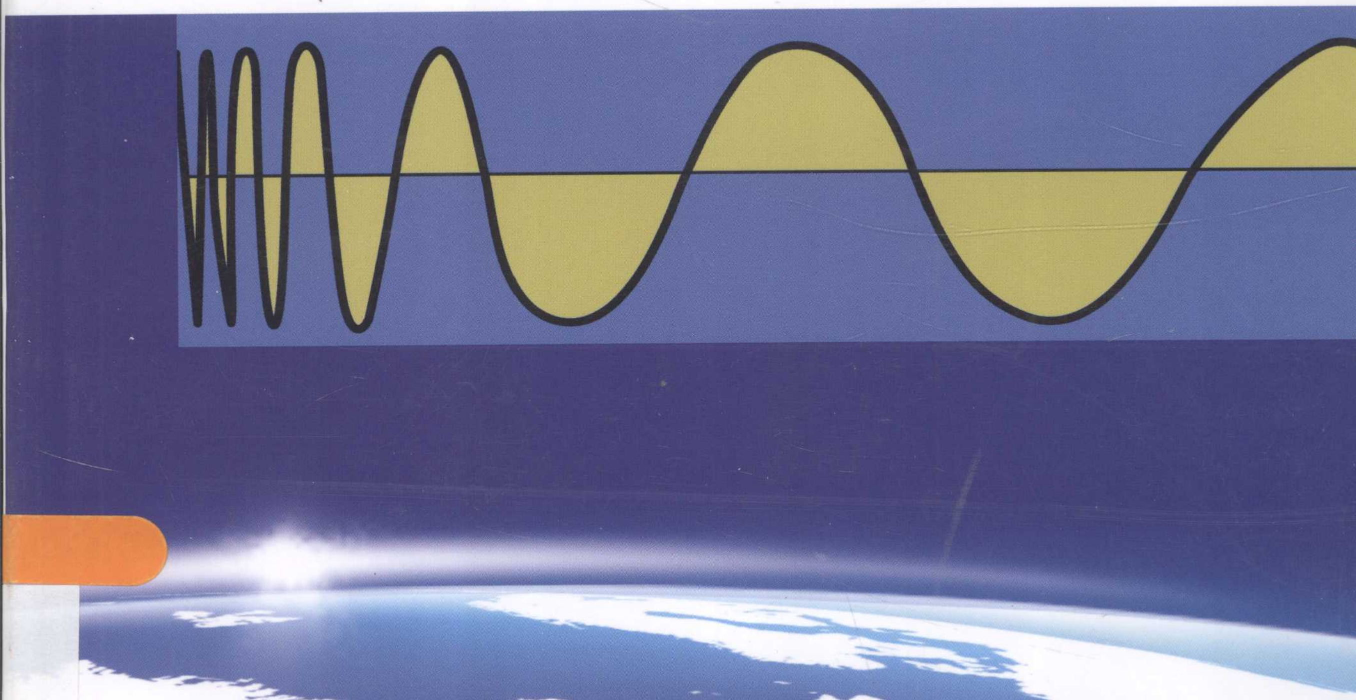
# 拓扑学及在GIS中的应用

编　著

周秋生　刘丹丹　梁　欣

主　审

曲建光



HEUP 哈尔滨工程大学出版社

黑龙江省自然科学基金项目(项目编号:E201203)资助
黑龙江工程学院教育教学改革工程项目(工程编号:JG2012028)

# 拓扑学及在 GIS 中的应用

周秋生　刘丹丹　梁　欣　编著
曲建光　主审



HEUP 哈尔滨工程大学出版社

## 内容简介

本书是用直观、通俗的方法介绍拓扑学的基本思想、知识及其应用，内容包括引言、集合与映射、直观拓扑学、网络与地图、空间闭曲面的拓扑特性、度量空间、拓扑空间、几个重要的拓扑性质、地理信息系统中的拓扑、拓扑学在地理信息系统中的应用。

本书可作为普通高等院校地理信息系统、测绘、城市规划、市政管理、资源与环境等专业本科生和研究生的教材使用，也可供从事地理信息系统、城市规划、市政管理、资源与环境等相应工作的科技人员和管理人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

拓扑学及在 GIS 中的应用/周秋生，刘丹丹，梁欣编著. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2014.2
ISBN 978－7－5661－0754－1

Ⅰ. ①拓… Ⅱ. ①周… ②刘… ③梁… Ⅲ. ①拓扑—应用—地理信息系统 Ⅳ. ①P208

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 016945 号

---

**出版发行** 哈尔滨工程大学出版社
**社　　址** 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
**邮政编码** 150001
**发行电话** 0451－82519328
**传　　真** 0451－82519699
**经　　销** 新华书店
**印　　刷** 黑龙江省地质测绘印制中心
**开　　本** 787mm×1 092mm　1/16
**印　　张** 13.5
**字　　数** 337 千字
**版　　次** 2014 年 3 月第 1 版
**印　　次** 2014 年 3 月第 1 次印刷
**定　　价** 28.00 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

PRAFACE

# 前言

拓扑学是一门年轻而富有生命力的学科，它萌发于 17～18 世纪，但到 19 世纪末才开始得到发展。20 世纪以来，拓扑学是数学中发展最迅猛、研究成果最丰富的研究领域，成为十分重要的数学基础学科。拓扑学的方法和结果日益地渗透到分析、代数、几何、计算等学科中，且在物理学、地学、信息学等领域均得到广泛应用。

拓扑学的思想、方法和结果在地理信息系统的数据模型构建、空间拓扑关系建立、空间查询与空间分析、智能空间决策支持系统等方面，越来越显现出其重要作用。各高校的地理信息系统专业已把拓扑学列为必修课或选修课。

目前，有关拓扑学的教材都是为理科院校的数学或物理专业的学生而编写的，注重的是理论上的严密性和系统性，并且需要有较多的相关数学知识背景。这类教材对于工科院校的学生，特别是应用型工科院校的学生是不适合的，现在还没有一本适合于工科学生学习的"拓扑学及其应用"方面的教材。因此，编写一本介绍拓扑学的基本概念、基本思想、基本方法和结论，以及在某个学科中的应用的教科书是很有必要的，也是教学中所必需的。

本教材编写的基本思想为：通过一些典型的问题，用直观的、通俗的方法，引入拓扑学的基本思想和知识，结合地理信息系统中遇到的实际问题和具体应用，介绍如何应用拓扑学的观点和方法来分析问题和解决问题。

本教材是作者在参阅了有关拓扑学、图论、地理信息系统等方面的教材基础上，结合地理信息系统专业的教学实践编写的。全书由 10 章组成。第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章、第 5 章由周秋生编写，第 6 章、第 7 章、第 8 章由刘丹丹编写，第 9 章、第 10 章由梁欣编写。全书由周秋生统稿和校对，曲建光主审。

本书在编写过程中，参考了大量国内外有关参考书和文献，未及一一注明，请有关作者谅解。由于作者水平所限，书中不妥之处在所难免，希望读者批评、指正。

编著者

2013 年 5 月

CONTENTS

# 目录

# 第1章 引 言

## 1.1 拓扑学的由来

拓扑学是19世纪形成的一门数学分支学科，它属于几何学的范畴。有关拓扑学的一些内容早在18世纪就出现了，那时候发现的一些孤立的问题，后来在拓扑学的形成中占据重要的地位。

关于哥尼斯堡七桥问题、多面体的欧拉定理、四色问题等都是拓扑学发展史的重要问题。哥尼斯堡(今俄罗斯的加里宁格勒)是东普鲁士的首都，普莱格尔河横贯其境内。18世纪在这条河上建有七座桥，将河中间的两个岛和河岸连接起来，如图1－1所示。人们闲暇时经常在岛上散步。一天有人提出：能不能每座桥都走一遍最后又回到原来的位置？这个看起来很简单，但很有趣的问题吸引了大家，很多人尝试了各种各样的走法，但谁也没有达到目的。看来要得到一个明确的、理想的答案还不那么容易。

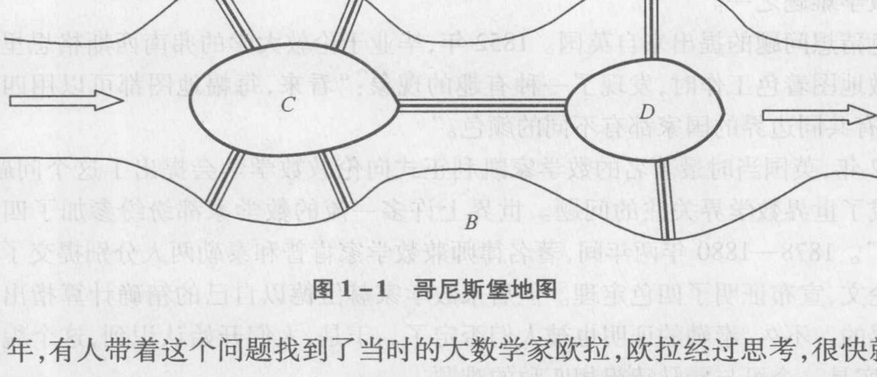



**图1－1 哥尼斯堡地图**

1736年，有人带着这个问题找到了当时的大数学家欧拉，欧拉经过思考，很快就用一种独特的方法给出了答案。欧拉首先把这个问题简化，他把两座小岛和河的两岸分别看成四个点$A,B,C,D$，而把七座桥看做这四个点之间的连线，将哥尼斯堡七桥问题转化为图形问题，如图1－2所示。那么这个问题就简化成：能不能用一笔就把这个图形画出来。经过进一步的分析，欧拉得出结论：不可能每座桥都走一遍，最后回到原来的位置，并且给出了所有能够一笔画出来的图形所应具有的条件。

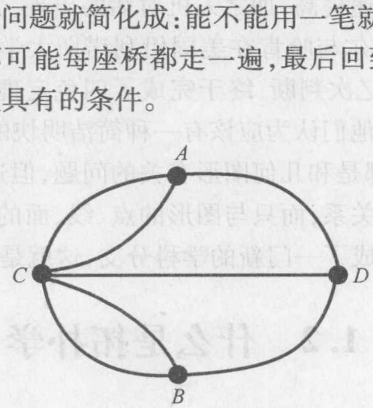



**图1－2 哥尼斯堡七桥问题示意图**

虽然哥尼斯堡七桥问题属于几何图形问题，但又不能用传统的几何学方法加以解决，因为该问题与图形的形状没有关系，而只与图形的点与线之间的关联关系有关，必须采用新的概念和方法来解决，这就是拓扑学的“先声”。

在拓扑学的发展历史中，还有一个著名而且重要的关于多面体的定理也和欧拉有关。这个定理的内容是：如果一个凸多面体的顶点数是 $V$、棱数是 $E$、面数是 $F$，那么它们总有这样的关系：$V-E+F=2$。

根据多面体的欧拉定理，可以得出这样一个有趣的事实：只存在 5 种正多面体，它们是正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体，如图 1－3 所示。

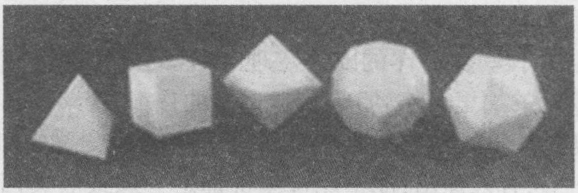


**图 1－3　5 种正多面体**

著名的“四色问题”也是与拓扑学发展的有关问题。四色问题又称四色猜想，是世界近代三大数学难题之一。

四色猜想问题的提出来自英国。1852 年，毕业于伦敦大学的弗南西斯格思里到一家科研单位做地图着色工作时，发现了一种有趣的现象：“看来，每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家都有不同的颜色。”

1872 年，英国当时最著名的数学家凯利正式向伦敦数学学会提出了这个问题，于是四色猜想成了世界数学界关注的问题。世界上许多一流的数学家都纷纷参加了四色猜想的“大会战”。1878—1880 年两年间，著名律师兼数学家肯普和泰勒两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理。但后来数学家赫伍德以自己的精确计算指出肯普的证明是错误的。不久，泰勒的证明也被人们否定了。于是，人们开始认识到，这个貌似容易的题目，其实是一个可与费马猜想相匹敌的难题。

进入 20 世纪以来，科学家们对四色定理的证明基本是按照肯普的想法进行。电子计算机问世以后，由于计算速度迅速提高，加之人机对话的出现，大大加快了四色猜想的证明进程。1976 年，美国数学家阿贝尔与哈肯在美国伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上，用了 1 200 个小时，作了 100 亿次判断，终于完成了四色定理的证明。不过，不少数学家并不满足于计算机取得的成就，他们认为应该有一种简洁明快的书面证明方法。

上面的几个例子所讲的都是和几何图形有关的问题，但这些问题又与传统的几何学不同，都与图形的几何形状没有关系，而只与图形的点、线、面的关联关系有关，这就需要一个新的几何概念和方法，于是形成了一门新的学科分支，这就是拓扑学。

## 1.2　什么是拓扑学

拓扑学的英文名是 Topology，直译是地志学，也就是和研究地形、地貌相类似的有关学科。我国早期曾翻译成“形势几何学”“连续几何学”“一对一的连续变换群下的几何学”，

但是,这几种译名都不太好理解。1956 年,《数学名词》把它确定为拓扑学,这是音译过来的。

拓扑学是几何学的一个分支,但是这种几何学又和通常的平面几何、立体几何不同。通常的平面几何或立体几何研究的对象是点、线、面之间的位置关系以及它们的度量性质,而拓扑学的研究与研究对象的长短、大小、面积、体积等度量性质和数量关系都无关。

举例来说,在通常的平面几何里,把平面上的一个图形搬到另一个图形上,如果完全重合,那么这两个图形叫做全等形。但是,在拓扑学里所研究的图形,在运动中无论它的大小还是形状都会发生变化。在拓扑学里没有不能弯曲的元素,每一个图形的大小、形状都可以改变。例如,前面讲的欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题的时候,他画的图形就不考虑它的大小、形状,仅考虑点和线的个数,以及它们之间的关联关系。这些就是拓扑学思考问题的出发点。

拓扑性质有哪些呢? 首先我们介绍拓扑等价,这是比较容易理解的一个拓扑性质。在拓扑学里不讨论两个图形全等的概念,但是讨论拓扑等价的概念。比如,尽管圆形、方形、三角形的形状、大小不同,但在拓扑变换下,它们都是等价图形。图 1-4 所示的三样东西就是拓扑等价的,换句话讲,就是从拓扑学的角度看,它们是完全一样的图形。拓扑学研究的图形就像是橡皮一样,形状可以任意变化,因此称为橡皮几何学。

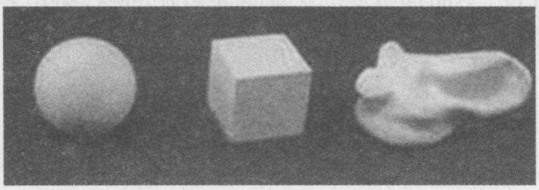


**图 1-4 橡皮几何学举例**

在一个球面上,任何一条简单闭曲线都可以将球面分割为两个部分或两块,在拓扑变换下所分割的块的数目应和原来数目一样,这就是拓扑性质。

应该指出,环面不具有这个性质。虽然环面上存在简单闭曲线,但它不能将环面分割成两块。对于这种情况,我们就说球面不能经过拓扑变换而变成环面,所以球面和环面在拓扑学中是不同的曲面。

直线上的点和线的结合关系、顺序关系,在拓扑变换下是不变的,这是拓扑性质。在拓扑学中曲线和曲面的闭合性质也是拓扑性质。

对于一般的图形而言,有关图形的大小、形状等度量是图形的几何性质,而图形的点、线、面、体之间的关联、相交、相邻、包含等关系属于图形的拓扑性质。拓扑学就是研究图形的拓扑性质的学科。

## 1.3 拓扑学的发展及应用

拓扑学建立后,由于其他数学学科的发展需要,它也得到了迅速的发展。特别是黎曼创立黎曼几何以后,他把拓扑学概念作为分析函数论的基础,更加速了拓扑学的进展。

20 世纪以来,集合论被引进了拓扑学,为拓扑学开创了新的领域,将图形视为由点构成的集合(称为点集),图形的形状变化就是点集的映射(图形的变换),因此,拓扑学的研究变

成了关于任意点集的对应的概念。拓扑学中一些需要精确化描述的问题都可以应用集合和映射来论述。

因为大量自然现象具有连续性，所以拓扑学具有广泛联系各种实际事物的可能性。通过对拓扑学的研究，可以阐明空间的集合结构，从而掌握空间之间的函数关系。20 世纪 30 年代以后，数学家对拓扑学的研究更加深入，提出了许多全新的概念。比如，一致性结构概念、抽象距和近似空间概念，等等。有一门数学分支叫做微分几何，是用微分工具来研究曲线、曲面等在一点附近的弯曲情况，因此，这两门学科应该存在某种本质的联系。1945 年，美籍中国数学家陈省身建立了代数拓扑和微分几何的联系，并推进了整体几何学的发展。

拓扑学发展到今天，在理论上已经十分明显地分成了两个分支：一个分支是偏重于用分析的方法来研究的，叫做点集拓扑学，或者叫做分析拓扑学；另一个分支是偏重于用代数方法来研究的，叫做代数拓扑学。现在，这两个分支又有统一的趋势。

拓扑学的方法和结果日益地渗透到分析、代数、几何、计算等学科中，且在物理学、地学、信息学等领域均得到广泛应用。

拓扑学的思想、方法和结果在地理信息系统的数据模型构建、空间拓扑关系建立与表达、空间查询与空间分析、智能空间决策支持系统等方面，越来越显现出其重要作用。

本书是拓扑学的入门教材，重点介绍拓扑学中最简单的内容和一些基础知识，通过介绍网络、平面图、地图着色、闭曲面分类、多面体等拓扑问题，给出拓扑学的直观描述，便于在地学、信息学科中应用。

## 习 题 1

1. 什么是拓扑学？
2. 什么是拓扑性质？
3. 下列汉字哪些能一笔写出来，哪些不能一笔写出来？

日　田　白　几　电　中　串

4. 如图 1－5 所示，试计算正四面体、正六面体的顶点数、棱数和面数的关系，并验证欧拉定理。

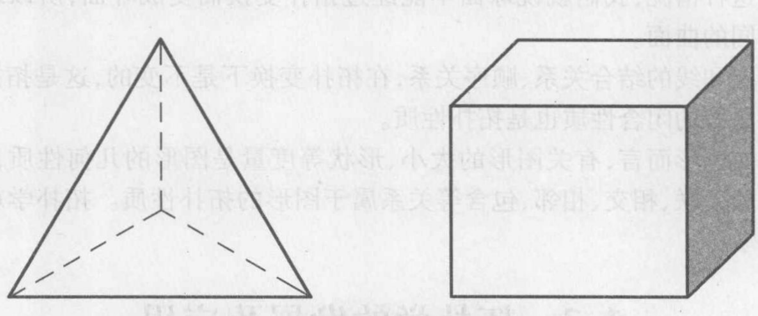


**图 1－5　正四面体与正六面体示意图**

# 第2章 集合与映射

## 2.1 集 合

集合论是现代数学各分支的共同基础,它给予了近代数学一种共同的语言,因此拓扑学也是建立在这一基础之上的。本节将本教材中要用到的有关集合论的部分内容列出,作为预备知识,供读者参考。

### 2.1.1 集合的基本概念

集合是当代数学中的一个原始概念,一般认为,没有必要、也没有可能用更简单的概念来定义它。

实际上,如果某个概念 $D$ 是用较简单的概念 $C$ 来定义的,那么概念 $C$ 本身也需要用更简单的概念 $B$ 来定义。如此连续推下去,最后势必要遇到一个最基本、最简单的概念 $A$,不能用更为简单的概念来定义 $A$。到了这层地步,我们所能做的,仅仅是用例子来说明这一概念 $A$ 的含义而已。集合就是这样一个最基本、最简单的概念。

因此,我们不想去寻求“集合”这个词的定义,而是用一些例子来说明什么是集合。例如,我们能够说“正在这里听课的全体学生的集合”“一个书柜中的所有书的集合”等。一般地,把某些具有某种共同特性的个体作为一个整体来考虑时,这个整体就叫做一个集合。集合(即整体)是由它的成员(即个体)构成的。例如正在这里听课的全体学生的集合是由正在听课的每个学生为其成员组成的,所有整数的集合是以每一个整数为其成员组成的。集合的成员也常称为集合的元素或点。

### 2.1.2 集合的表示方法

通常用大写英文字母 $A,B,\cdots$ 表示集合,用小写英文字母 $a,b\cdots$ 表示集合的元素。如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素,就记为 $a\in A$,读为“$a$ 属于集合 $A$”。如果 $a$ 不是 $A$ 的元素,就记为 $a\notin A$,读为“$a$ 不属于集合 $A$”。

对于集合,除了像前面那样用文字描述某一个集合是由一些什么样的成员构成外,我们也常用下列两种表示集合的方法。

第一种表示方法称为列举法,即把集合的元素按任意的顺序逐一地写在一个花括号里,并用逗号分开。例如 $A=\{0,1\}$,表示0和1这两个元素组成的集合。这种表示法对于由有限个元素组成的集合是很方便的,使人易于区别出任一对象是否为某一集合的元素。如果一个集合有许多元素或无限多个元素,则把这个集合的元素完全列出来是既不可能,又不实用的。在这种情况下,可列举出集合的部分元素,而省略掉的元素可由列举出的元素以及它们前后的关系所确定,使人们一看就明白。例如

$$A=\{3,4,5,\cdots,498\}$$

表示恰有496个元素,它们是从3到498的所有整数,而集合

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$$

则表示所有自然数的集合。

用来表示集合的第二种方法称为描述法。它是利用详细说明元素 $a \in A$ 的定义条件描述出的，即给定一个条件 $p(x)$，当且仅当 $a$ 使条件 $p(a)$ 成立时，$a \in A$，其一般形式为

$$A = \{a \mid p(a)\}$$

读为"$A$ 是使 $p(a)$ 成立的所有元素 $a$ 的集合"。实际上，$p(a)$ 是描述了一个规则或者公式，它使得我们有可能确定 $a$ 是否在 $A$ 中。例如

$$\mathbf{R} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$$

表示全体实数构成的集合。例如

$$A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

表示实数轴上的闭区间$[0,1]$。例如

$$B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

表示平面上以原点为中心，半径为 1 的一个圆周。

集合的元素的个数可以是有限的，也可以是无限的。前者称为有限集合，后者称为无限集合。如果集合仅有一个元素，我们常称其为单点集。集合也可以没有元素，例如

$$A = \{x \mid x^2 = -1 \text{ 的实数解}\}$$

就没有任何成员。这种没有元素的集合我们称之为空集，记为$\varnothing$。

还可以有更复杂的集合，也可以把一些集合汇合起来组成新的集合，例如

$$S = \{\mathbf{N}, \mathbf{R}\}$$

这个集合含有两个元素，即 $\mathbf{N} \in S$ 和 $\mathbf{R} \in S$，$\mathbf{N}$ 为自然数的集合，$\mathbf{R}$ 为实数的集合。虽然有 $2 \in \mathbf{N}$，$\sqrt{2} \in \mathbf{R}$，但是$\sqrt{2} \notin S$，$2 \notin S$。如果 $S_1 = \{2, \mathbf{N}\}$，则有 $2 \in \mathbf{N}$，$\mathbf{N} \in S_1$，并且$2 \in S_1$。

### 2.1.3 集合的基本关系

上述"$\in$"是集合的一个基本关系，它表示元素与集合之间的从属关系。显然，对于任何一个集合 $A$ 和任一元素 $a$，$a \in A$ 和 $a \notin A$ 这两者必有且仅有一个成立。

由于 $S_1 \in S_2$ 且 $S_2 \in S_3$，不一定就有 $S_1 \in S_3$，即从属关系不一定具有传递性。在有的情况下，$S_1 \in S_3$ 成立；在另外的情况下，可能 $S_1 \notin S_3$。究竟如何，要看具体集合 $S_1, S_2, S_3$ 是什么及它们含有哪些元素而决定。

由于一个集合是由它的元素完全决定，而不管它的其他任何性质，那么对于两个集合 $A$ 与 $B$，如果集合 $A$ 与集合 $B$ 的元素完全相同，我们就说集合 $A$ 与集合 $B$ 相等；反之，如果集合 $A$ 与集合 $B$ 的成员不完全相同，我们就说集合 $A$ 与集合 $B$ 不相等。

显然，集合 $A$ 与集合 $B$ 相等意味着：$A$ 的每一个元素都是 $B$ 的元素，并且 $B$ 的每一个元素也都是 $A$ 的元素。由此，我们给出如下定义：

**定义 2-1** 如果集合 $A$ 的每一个元素都是集合 $B$ 的元素，并且集合 $B$ 的每一个元素也是 $A$ 的元素，则称集合 $A$ 与集合 $B$ 相等，记为 $A = B$；否则称集合 $A$ 与集合 $B$ 不相等，记为 $A \neq B$。

集合的相等关系显然有如下性质：

**定理 2-1** 若 $A, B, C$ 为集合，则

(1) $A = A$（反身性）；

(2) 若 $A = B$，则 $B = A$（对称性）；

(3) 若 $A = B$，$B = C$，则 $A = C$（传递性）。

满足定理中三个条件的关系也称为等价关系。

如果 $A \neq B$,则可能存在如下包含关系：

**定义 2－2**　如果集合 $A$ 的每一个元素也是集合 $B$ 的一个元素,则称 $B$ 包含 $A$,或称 $A$ 包含于 $B$ 中,记为

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

否则称 $B$ 不包含 $A$,记为

$$A \not\subset B$$

**例 2－1**　设 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{a,b,x,y\}$,$C=\{a,x\}$,则有 $C \subset B$,但 $C \not\subset A$。

这里要注意区别从属关系和包含关系。从属关系 $a \in A$ 指 $A$ 的元素 $a$ 与集合的关系,即个体与集体的关系。而包含关系 $A \subset B$ 则是两个集合的关系,即部分与整体的关系。从属关系和包含关系是不同的概念,但并不排斥它们同时成立的可能性。

**例 2－2**　设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{A,1,2,3\}$,则显然有 $A \in B$,又有 $A \subset B$。

关于集合的包含关系有下列重要性质。

**定理 2－2**　若 $A,B,C$ 为集合,则

(1) $\varnothing \subset A$（$\varnothing$ 表示空集）;

(2) $A \subset A$　(反身性);

(3) 若 $A \subset B$,$B \subset C$,则有 $A \subset C$（传递性）;

(4) 若 $A \subset B$,$B \subset A$,则 $A=B$。

以上性质(2)(3)(4)是明显的,要说明性质(1),首先说明空集可表示为

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$$

若有元素 $x \notin A$,则 $x \notin \varnothing$（因为空集不含任何元素）,所以有 $\varnothing \subset A$。

设 $A,B$ 为两个集合,如果 $A \subset B$,则我们称 $A$ 为 $B$ 的子集;如果 $A \subset B$,但 $A \neq B$,则称 $A$ 是 $B$ 的真子集,即 $A$ 的每个元素都是 $B$ 的元素,但 $B$ 中至少有一个元素不是 $A$ 的元素。

### 2.1.4　几个相关的数学符号

为了叙述简单起见,引入如下数学符号:

(1) 用“$\forall a$”表示“对于每一个 $a$”,如 $\forall a \in A$ 表示对于 $A$ 中每一个元素 $a$。

(2) 用“$\exists a$”表示“存在一个 $a$”,如 $\exists a \in A$ 表示 $A$ 中存在一个元素 $a$。

(3) 用“$p \Rightarrow q$”表示“如果 $p$ 成立,则 $q$ 也成立”,这是一种逻辑推理的表达方法。其中 $p$,$q$ 表示某个条件或命题。

(4) 用“$p \Leftrightarrow q$”表示“如果 $p$ 成立,则 $q$ 也成立,反之亦然”,这表示 $p$ 与 $q$ 是两个等价的条件或命题。

利用以上数学符号,集合 $A$ 与集合 $B$ 相等关系可以写成:

$$\forall a \in A \Rightarrow a \in B,\text{并且 } \forall b \in B \Rightarrow b \in A$$

或者

$$\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

这也是说明(或证明) $A=B$ 的方法。

同样,$A \neq B$ 意味着 $A$ 中至少有一个元素不是 $B$ 的元素,或者 $B$ 中至少有一个元素不是 $A$ 的元素,即

$$\exists x \in A \Rightarrow x \notin B \text{ 或者 } \exists x \in B \Rightarrow x \notin A$$

对于集合的包含关系$A\subset B$,需要证明下式

$$\forall a\in A\Rightarrow a\in B$$

成立。要证明$A\not\subset B$,需要证明下式

$$\exists x\in A\Rightarrow x\notin B$$

成立。

### 2.1.5 幂集与集族

**定义 2-3** 设$X$是任一集合,$X$的所有子集组成的集合,叫做$X$的幂集。记为$\rho(X)$或$2^X$,即$\rho(X)=\{A\mid A\subset X\}$。

**例 2-3** 设$X=\{0,1\}$,则

$$\rho(X)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$$

**例 2-4** 设$X=\{a\}$,则$\rho(X)=\{\varnothing,\{a\}\}$。

**例 2-5** 对于任意集合$A$,有$\varnothing\in\rho(A)$,$A\in\rho(A)$。

**例 2-6** $B\subset A$等价于$B\in P(A)$。

**定义 2-4** 若对非空集合$A$的每一个元素$a$,都对应一个集合$A_a$。则所有这些$A_a$的全体称为一个集族,记为$\{A_a\mid a\in A\}$。集合$A$称为指标集。指标集$A$可以有限,也可以无限,并且是不可数的。

**例 2-7** 设$A=\{1,2,3\}$为指标集,$A_a=\{x\mid 0<x<a\}$,则构成的集族$X$为

$$X=\{A_1,A_2,A_3\}$$

## 2.2 集合的运算

在定义集合的运算之前,先介绍一个特殊集合,它包含某个问题所讨论的每一个集合,我们称它为该问题的全域集合,简称为全集。

全集的引进,使得我们能够利用图示的方法来研究全集中各子集之间的关系,从而讨论集合的运算,所用的图称为文氏图(John Venn,英国数学家,1834—1883 年)。文氏图是用点的集合作为一个集合的示意图。在文氏图中我们用一个矩形区域表示全集,全集中某个子集$A$用此矩形内一简单曲线包围的区域来表示,集合的元素用区域内的点表示。

如图 2-1 所示,集合$A$是全集$X$中的一个子集:$A\subset X$,点$a$表示$A$的一个元素,即$a\in A$;而点$b$表示不是$A$的元素,则有$b\notin A$。

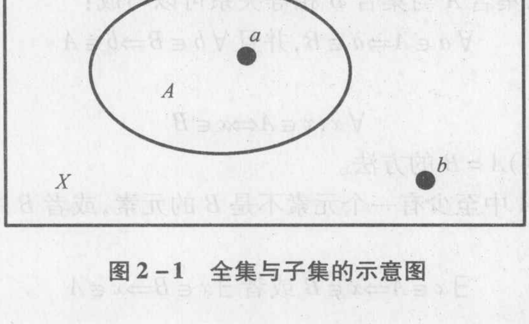



图 2-1 全集与子集的示意图

下面定义集合的基本运算，并用文氏图说明它们。

### 2.2.1　集合的基本运算

集合的基本运算包括：集合的并、交、差和余运算，具体定义如下。

**定义 2－5**　两集合 $A$ 与 $B$ 的并集记为 $A\cup B$，定义为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

如图 2－2 所示。

**定义 2－6**　两集合 $A$ 与 $B$ 的交集记为 $A\cap B$，定义为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

如图 2－3 所示。

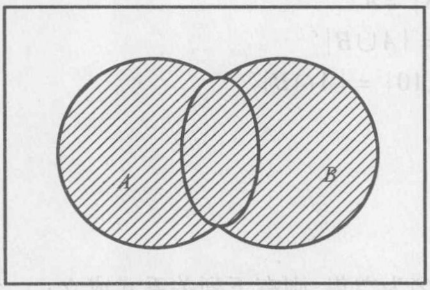



**图 2－2　集合的并运算示意图**

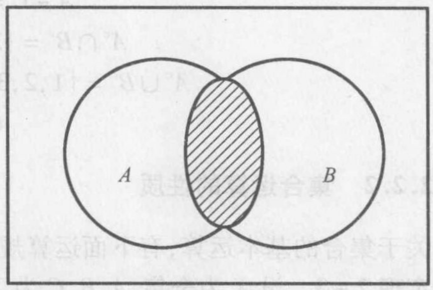



**图 2－3　集合的交运算示意图**

集合的“交”运算可以用来定义集合间的一种重要关系：相交关系。

**定义 2－7**　如果 $A\cap B\neq\varnothing$，则称集合 $A$ 与 $B$ 相交，否则称为不相交。

例如，平面里一个圆周的内部与外部就是不相交的。

**定义 2－8**　由集合 $A$ 中减去集合 $B$ 而得到的差集记为 $A-B$，定义为

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

如图 2－4 所示。

值得注意的是，集合的减运算可以在任意两个集合中进行。为了形成集合 $A-B$，并不要求 $B$ 必包含于 $A$ 中。

**定义 2－9**　集合 $A$ 的余集记为 $A^c$，定义为

$$A^c=\{x\mid x\notin A\}$$

如图 2－5 所示。

显然，对于任意一个集合 $A$，有 $A\cap A^c=\varnothing$，即 $A$ 与 $A^c$ 永不相交。

**例 2－8**　设 $X=\{1,2,\cdots,10\}$ 为全集，$A=\{2,5,7,8\}$，$B=\{1,5,8,10\}$，$C=\{3,6,9\}$，则有

$$A\cup B=\{1,2,5,7,8,10\}$$

$$A\cap B=\{5,8\}$$

$$A\cap C=\varnothing$$

$$A-B=\{2,7\}$$

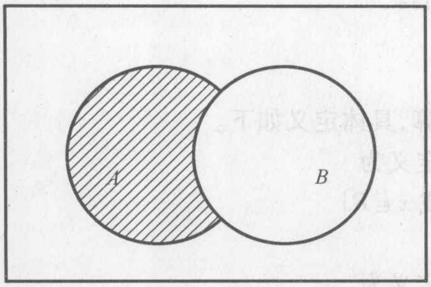



图 2-4 集合的差运算示意图

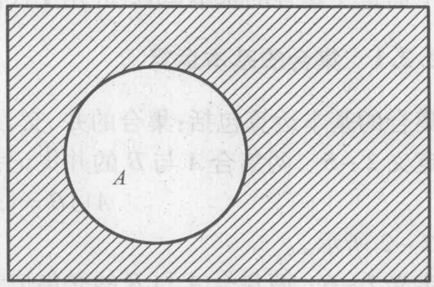



图 2-5 集合的余运算示意图

$$A-C=\{2,5,7,8\}=A$$
$$A^c\cap B^c=\{3,4,6,9\}=\{A\cup B\}^c$$
$$A^c\cup B^c=\{1,2,3,4,6,7,9,10\}=\{A\cap B\}^c$$
$$C\subset A^c\cap B^c$$

### 2.2.2 集合运算的性质

关于集合的基本运算，有下面运算规律。

**定理 2-3** 设 $X$ 为全集，$A,B,C$ 为 $X$ 的子集，$\varnothing$为空集，则有下列关系式成立：

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

幂等律 $A\cup A=A, A\cap A=A$

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

De Morgan 律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

对合律 $(A^c)^c=A$

互补律 $A\cap A^c=\varnothing, A\cup A^c=X$

同一律 $A\cup\varnothing=A, A\cap X=A$

$\varnothing^c=X, X^c=\varnothing$

$A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup X=X$

对于差集有：

$$A-B=A\cap B^c$$

**证明** 以一个 De Morgan 律$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ 为例，证明如下：

$$\forall x\in(A\cup B)^c\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A \text{ 且 } x\notin B\Rightarrow x\in A^c \text{ 且 } x\in B^c$$
$$\Rightarrow x\in A^c\cap B^c\Rightarrow(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$$

另一方面

$$\forall x\in A^c\cap B^c\Rightarrow x\in A^c \text{ 且 } x\in B^c\Rightarrow x\notin A \text{ 且 } x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B$$
$$\Rightarrow x\in(A\cup B)^c\Rightarrow A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$$

两方面结合起来得$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，证毕。

定理的其余各规律的证明都是类似的。

**定理2-4**　设$A,B$为任意集合，下列三个条件等价：

(1)$A\subset B$；

(2)$A\cap B=A$；

(3)$A\cup B=B$。

**证明**　只需要证明(1)⇒(2)（即已知条件(1)，可导出条件(2)）、(2)⇒(3)和(3)⇒(1)即可，证明过程如下。

(1)⇒(2)　已知$A\subset B$，即$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$，故$x\in(A\cap B)$，这说明$A\subset A\cap B$；另一方面$\forall x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$且$x\in B$，这说明$A\cap B\subset A$，综合两者便有$A=A\cap B$。

(2)⇒(3)　已知$A=A\cap B$，则$\forall x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$或$x\in B$，若$x\in A=A\cap B$，则$x\in B$，即$A\cup B\subset B$；另一方面，显然$B\subset A\cup B$，这说明$A\cup B=B$。

(3)⇒(1)　已知$A\cup B=B$，则$\forall x\in A\Rightarrow x\in A\cup B=B$，即$A\subset B$。

### 2.2.3　集族的运算

对于集族$\{A_\alpha\mid\alpha\in A\}$，也可以定义它们的并与交，具体如下：

集族的并定义为集族的所有元素的并集，即

$$\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha=\{x\mid\exists\alpha\in A,\text{使得 }x\in A_\alpha\}$$

集族的交定义为集族的所有元素的交集，即

$$\bigcap_{\alpha\in A}A_\alpha=\{x\mid\forall\alpha\in A,\text{使得 }x\in A_\alpha\}$$

例如，对任意一集合$A$，有$A=\bigcup_{a\in A}\{a\}$，即任一集合$A$可以看作是由所有包含$A$中一个元素的集合组成的集族的并，这个集族表示为

$$\{\{a\}\mid a\in A\}$$

指标集是$A$。

集族的运算性质如下：

**定理2-5**　集族的运算适合下列运算律：

(1)$\bigcup_{\alpha\in A}$和$\bigcap_{\alpha\in A}$都适合交换律和结合律；

(2)$\cap$对$\bigcup_{\alpha\in A}$及$\cup$对$\bigcap_{\alpha\in A}$都适合分配律，即，若$B$为一个集合，则

$$B\cap(\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in A}(B\cap A_\alpha)$$

$$B\cup(\bigcap_{\alpha\in A}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in A}(B\cup A_\alpha)$$

(3)De Morgan律　若$A_\alpha$都是全集$X$的子集，余集都是相对于$X$取的，则

$$(\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in A}(A_\alpha^c)$$

$$(\bigcap_{\alpha\in A}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in A}(A_\alpha^c)$$

(4)幂等律　若对于$\forall\alpha\in A$，有$A_\alpha=B$，则

$$\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A}A_\alpha=B$$

当集族的指标集$A=\varnothing$时（一般情况下$A\neq\varnothing$），则规定

(1)$\bigcup_{\alpha\in\varnothing}A_\alpha=\varnothing$；

(2)$\bigcap_{\alpha\in\varnothing}A_\alpha=X$。