



2014硕士学位研究生入学资格考试

GCT

数学

快速通关

刘庆华 扈志明 编

清华大学出版社



2014 硕士学位研究生入学资格考试



刘庆华 扈志明 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据硕士学位研究生入学资格考试指南的要求,安排算术、代数、几何与三角、一元函数微分学、一元函数积分学、线性代数6章内容。在每章中,以历年考试真题为范本,剖析了各部分的常考题型、各题型涉及的考点和这些考点在试题中的出现方式,然后对所涉及的考点内容加以汇总、讲解。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

2014 硕士学位研究生入学资格考试 GCT 数学快速通关/刘庆华, 扈志明编.--北京:清华大学出版社,2014

ISBN 978-7-302-36424-5

I. ①2… II. ①刘… ②扈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 096402 号

责任编辑:刘颖

封面设计:傅瑞学

责任校对:刘玉霞

责任印制:王静怡

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:三河市君旺印装厂

装 订 者:三河市新茂装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm 印 张:10.5 字 数:232 千字

版 次:2014 年 6 月第 1 版 印 次:2014 年 6 月第 1 次印刷

印 数:1~6000

定 价:25.00 元

FOREWORD

前言

2014 硕士学位研究生入学资格考试

国务院学位办颁布的《硕士专业学位研究生入学资格考试指南》中指出：“数学基础能力测试，旨在考查考生所具有的数学方面的基础知识、基本思想方法，考查考生逻辑思维能力、数学运算能力、空间想象能力以及运用所掌握的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力。”

“基础”体现在 3 个方面：一个基础反映在所考查的知识上，有小学学习的算术，中学学习的代数、几何与三角，再有就是大学一年级学习的一元微积分和线性代数，而且小学和中学所学的知识不是点缀，这两部分内容所涉及的题目分别为 5 道和 10 道，占比分别为 20% 和 40%，大学所学部分只占 40%；另一个基础反映在测试的题型上，25 道题目都是四选一的单项选择题，因此也就没有计算题目中的步骤要求，也没有证明题目中的推理要求；第 3 个基础反映在试题难易程度的控制上，容易题、一般题和较难题 3 个等级题目的题量之比大致为 1 : 4 : 1。

但基础并不等于简单。从历年的考试结果来看，数学基础能力测试的区分度还是比较高的，比较好地反映出一个考生的四种“能力”。分析数学基础能力测试的试题，可以发现两个特点：一是题目活，体现在对知识点的考查是比较隐含的，大多不是直接的方式，而需要转个弯；二是题量大，在 45 分钟内完成这样的 25 道四选一的单项选择题，时间是非常紧张的。

因为所考查的知识点比较基础，一些考生对它们的掌握比较扎实，但对于考点以及考点在题目中的体现方式等内容不太清楚，因此，根据我们对 GCT 数学基础能力测试的认识，以历年数学基础能力测试真题为范本，按照小学、中学、大学的知识体系，安排了算术、代数、几何与三角、一元函数微分学、一元函数积分学、线性代数 6 章内容，在归纳和分类的基础上，剖析了各部分的常考题型、各题型涉及的考点和考点在测试题中的出现方式。同时，为了便于回顾或复

习所考查的知识点,在每章后,设置了“知识点精讲”部分。

希望考生通过本书的学习,在短时间内掌握和运用高效快速的解题方法与技巧,从而有效地提高解题速度和准确率,顺利地夺得数学高分。

编 者

2014 年 4 月

CONTENTS

目 录

2014 硕士学位研究生入学资格考试

第 1 章 算术	1
1.1 常考题型与例题	1
1.2 知识点精讲	17
第 2 章 代数	19
2.1 常考题型与例题	19
2.2 知识点精讲	39
第 3 章 几何与三角	46
3.1 常考题型与例题	46
3.2 知识点精讲	67
第 4 章 一元函数的微分学	73
4.1 常考题型与例题	73
4.2 知识点精讲	92
第 5 章 一元函数的积分学	99
5.1 常考题型与例题	99
5.2 知识点精讲	111
第 6 章 线性代数	115
6.1 常考题型与例题	115
6.2 知识点精讲	149
附录 数学基础能力测试介绍	159

算 术

1.1 常考题型与例题

题型1 考查数的概念与性质

例1 已知正整数 a, b 满足 $3a+2b=29$, 则[].

- A. a 为奇数 B. a 为偶数 C. b 为奇数 D. b 为偶数

解析 由 $3a+2b=29$, 可得 $3a=29-2b$. 由于 $2b$ 是偶数, 所以 $29-2b$ 是奇数, 即 $3a$ 是奇数, 从而 a 也必是奇数. 故正确选项为 A.

例2 已知 m, n 是正整数, 若 $3m^2+2n^2$ 是偶数, 则[].

- A. m 是偶数 B. m 是奇数 C. n 是偶数 D. n 是奇数

解析 由 $3m^2+2n^2$ 及 $2n^2$ 是偶数, 可知 $3m^2$ 是偶数, 因此 m^2 是偶数, 故得 m 也是偶数. 故正确选项为 A.

例3(2003) A, B, C, D, E 五支篮球队相互进行循环赛, 现已知 A 队已赛过 4 场, B 队已赛过 3 场, C 队已赛过 2 场, D 队已赛过 1 场, 则此时 E 队已赛过[]场.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析 由于是进行循环赛, 故 A, B, C, D, E 五支队总的比赛场次一定是 2 的倍数, 即为偶数, 已知 A, B, C, D 四队的比赛场次之和为 $4+3+2+1=10$, 所以 E 队的比赛场次只能是偶数, 这样就排除了选项 A, C. 又因为 A 队已赛过 4 场, 说明 A 队已赛完, 即 A 队与 E 队已经赛完, 所以 E 队的比赛场次不能是 4, 这样选项 D 也被排除. 故正确选项为 B.

例4(2009) 若将正偶数 $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots$ 依次排成一行:

246810121416...

则从左向右数的第 101 个数码是[].

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

解析 前 100 个正整数中有 50 个偶数, 其中一位数字的有 4 个、三位数字的有 1 个、两位数字有 45 个, 将它们按要求排成一行共有 $4+3+2 \times 45=97$ 位, 所以后面几位应是 102104..., 故第 101 个数码是 1.

故正确选项为 A.

例 5 (2011) 设 $S=3-3^2+3^3-3^4+3^5-3^6+3^7$, 则 S 被 4 除的余数是[].

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

解析 由于

$$\begin{aligned} S &= 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + 3^5 - 3^6 + 3^7 = 3 + (-3^2 + 3^3) + (-3^4 + 3^5) + (-3^6 + 3^7) \\ &= 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3^6, \end{aligned}$$

且 $3^2, 3^4, 3^6$ 除以 4 的余数均为 1, 所以 S 除以 4 的余数也为 1. 故正确选项为 C.

例 6 如果正整数 n 的 15 倍除以 10 的余数为 5, 那么 n 的最末一位数字不可能为[].

A. 1

B. 3

C. 5

D. 6

解析 根据题中条件可知, $\frac{15n}{10} = k + \frac{5}{10}$, 即 $15n = 10k + 5$. 由于 $10k + 5$ 的个位数是 5,

所以 n 的个位数与 5 相乘所得数的个位数也是 5. 在题中所给的 4 个数目中, 只有 6 与 5 相乘所得数的个位数不是 5. 故正确选项为 D.

例 7 在 1 到 100 的整数中, 能被 3 或 5 整除的数共有[]个.

A. 6

B. 33

C. 47

D. 53

解析 在 1 到 100 的整数中, 能被 3 整除的有 33 个, 能被 5 整除的有 20 个, 既能被 3 又能被 5 整除的有 6 个, 所以能被 3 或 5 整除的共有 $33+20-6=47$ (个). 故正确选项为 C.

例 8 如果几个质数的乘积为 650, 那么它们的平方之和为[].

A. 25

B. 26

C. 223

D. 224

解析 因为 $650 = 2 \times 5 \times 5 \times 13$, 故所求之和为 $2^2 + 5^2 + 5^2 + 13^2 = 223$. 故正确选项为 C.

题型 2 考查数的四则运算

1. 分数运算问题

例 1 从不超过 10 的质数中任取两个分别相乘和相除, 不相等的积和商个数分别是[].

A. 6, 12

B. 12, 6

C. 10, 20

D. 20, 10

解析 不超过 10 的质数共有 2, 3, 5, 7 四个, 由于乘法运算满足交换律, 所以任取两个相乘共得到 $C_4^2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ 个不同乘积. 由于除法运算没有交换律, 所以两个不同的数作除

法运算会得到两个不同的商,因此从 2, 3, 5, 7 中任取两个数相除共得到 $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ 个不同的商. 综上可知正确选项为 A.

例 2(样题) 方程 $\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 0$ 的根的个数为 [].

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

解析 由于 $\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{1+2(x-1)-2(x+1)}{x^2-1} = \frac{-3}{x^2-1} \neq 0$, 所以方程 $\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 0$ 没有解, 即其根的个数为 0. 故正确选项为 A.

例 3 设 a, b, m 均为大于零的实数, 且 $b > a$, 则 [].

A. $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$

B. $\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$

C. $\frac{a+m}{b+m} = \frac{a}{b}$

D. $\frac{a+m}{b+m}$ 与 $\frac{a}{b}$ 的大小关系与 m 有关

解析 方法 1 由于 $\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} = \frac{m(b-a)}{b(b+m)}$, 根据题中条件可知 $\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} > 0$, 即 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$. 故正确选项为 A.

方法 2 由于 $\frac{a+m}{b+m}$ 与 $\frac{a}{b}$ 都大于零, 且 $\frac{a+m}{b+m} \times \frac{b}{a} = \frac{ab+bm}{ab+am}$, 所以在题中条件下有 $\frac{a+m}{b+m} \times \frac{b}{a} > 1$, 即 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$. 故正确选项为 A.

例 4(2003) 已知 $a = \frac{2001}{2002}, b = \frac{2002}{2003}, c = \frac{2003}{2004}$, 则 [].

A. $a > b > c$

B. $b > c > a$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

解析 方法 1 由于 $\frac{b}{a} = \frac{2002^2}{2001 \times 2003} = \frac{2002^2}{(2002-1)(2002+1)} = \frac{2002^2}{2002^2-1} > 1$, 所以 $b > a$. 类似地可以得到 $c > b$. 故正确选项为 D.

方法 2 $a = 1 - \frac{1}{2002}, b = 1 - \frac{1}{2003}, c = 1 - \frac{1}{2004}$, 因为 $\frac{1}{2002} > \frac{1}{2003} > \frac{1}{2004}$, 所以 $c > b > a$. 故正确选项为 D.

例 5(2008) 设 $\frac{a}{b} = -\frac{3}{5}, \frac{b}{c} = -\frac{7}{9}, \frac{d}{c} = -\frac{5}{2}$, 则 $\frac{a}{d} = []$.

A. $-\frac{14}{75}$

B. $\frac{14}{75}$

C. $\frac{75}{14}$

D. $-\frac{75}{14}$

解析 因为 $\frac{a}{b} = -\frac{3}{5}, \frac{b}{c} = -\frac{7}{9}, \frac{d}{c} = -\frac{5}{2}$, 所以 $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{7}{9}\right) \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{14}{75}$. 故正确选项为 A.

例 6(2011) 若 $\frac{a}{b}=20, \frac{b}{c}=10$, 则 $\frac{a+b}{b+c}$ 的值为 [].

A. $\frac{11}{21}$

B. $\frac{21}{11}$

C. $\frac{110}{21}$

D. $\frac{210}{11}$

解析 因为 $\frac{a}{b}=20, \frac{b}{c}=10$, 所以

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{1 + \frac{c}{b}} = \frac{20+1}{1+\frac{1}{10}} = \frac{210}{11}.$$

故正确选项为 D.

2. 表达式求值问题

例 7(2003) $\frac{\sum_{i=1}^{11} i}{\sum_{i=1}^{11} (-1)^{i-1} i} = []$.

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

解析 因为

$$\sum_{i=1}^{11} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = \frac{1}{2} \times 11 \times (11 + 1) = 66,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{11} (-1)^{i-1} i &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 \\ &= (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + (7 - 8) + (9 - 10) + 11 \\ &= 6, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\sum_{i=1}^{11} i}{\sum_{i=1}^{11} (-1)^{i-1} i} = \frac{66}{6} = 11.$$

故正确选项为 B.

例 8(2004) 设 $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1} n$, 则 $S_{2004} + S_{2005} = []$.

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

解析 由于 $S_{2004} = (1 - 2) + (3 - 4) + \cdots + (2003 - 2004) = -1002$,

$$S_{2005} = S_{2004} + 2005,$$

所以

$$S_{2004} + S_{2005} = 2S_{2004} + 2005 = 2 \times (-1002) + 2005 = 1.$$

故正确选项为 B.

例 9(2006) $11+22\frac{1}{2}+33\frac{1}{4}+44\frac{1}{8}+55\frac{1}{16}+66\frac{1}{32}+77\frac{1}{64}=[\quad]$.

A. $308\frac{15}{16}$

B. $308\frac{31}{32}$

C. $308\frac{63}{64}$

D. $308\frac{127}{128}$

解析 方法 1 $11+22\frac{1}{2}+33\frac{1}{4}+44\frac{1}{8}+55\frac{1}{16}+66\frac{1}{32}+77\frac{1}{64}$
 $= (11+22+33+44+55+66+77) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right)$
 $= \frac{(11+77) \times 7}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 308 + \frac{63}{64} = 308\frac{63}{64}.$

故正确选项为 C.

方法 2 考虑到选择题的特点,该备选答案中整数部分相同,分数部分不相同,因此只需计算各项的分数部分之和即可

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{64}.$$

故正确选项为 C.

例 10(2007) $\frac{1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2-10^2}{2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7}$ 的值是 $[\quad]$.

A. $\frac{11}{51}$

B. $-\frac{11}{51}$

C. $\frac{22}{51}$

D. $-\frac{22}{51}$

解析 因为 $k^2 - (k+1)^2 = -2k - 1 = -(2k+1)$, 所以
 $\frac{(1^2-2^2) + (3^2-4^2) + (5^2-6^2) + (7^2-8^2) + (9^2-10^2)}{2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7} = -\frac{3+7+11+15+19}{2^8-1}$
 $= -\frac{55}{255} = -\frac{11}{51}.$

故正确选项为 B.

例 11(2008) 请你想好一个数,将它加 5,将其结果乘以 2,再减去 4,将其结果除以 2,再减去你想好的那个数,最后的结果等于 $[\quad]$.

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 3

解析 方法 1 设所想的数为 x ,则根据题意得 $\frac{2(x+5)-4}{2} - x = (x+5) - 2 - x = 3$. 故正确选项为 D.

方法 2 取所想的数为 0,按题目所给的运算次序,得

$$\frac{(0+5) \times 2 - 4}{2} - 0 = 3.$$

故正确选项为 D.

例 12(2009) $\frac{2010 \times 2008 + 1}{(1+3+5+7+9+11+13)^2} = [\quad]$.

A. 41

B. 49

C. 1681

D. 2401

解析 $\frac{2010 \times 2008 + 1}{(1+3+5+7+9+11+13)^2} = \frac{(2009+1)(2009-1)+1}{(7 \times 7)^2} = \left(\frac{2009}{49}\right)^2 = (41)^2 =$

1681. 故正确选项为 C.

例 13(2010) $\frac{2^3-4^3+6^3-8^3+10^3-12^3}{3^3-6^3+9^3-12^3+15^3-18^3} = [\quad]$.

A. $\frac{8}{27}$ B. $\frac{27}{8}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{9}{4}$

解析 由于 $(ab)^k = a^k b^k$, 所以

$$\frac{2^3-4^3+6^3-8^3+10^3-12^3}{3^3-6^3+9^3-12^3+15^3-18^3} = \frac{2^3(1-2^3+3^3-4^3+5^3-6^3)}{3^3(1-2^3+3^3-4^3+5^3-6^3)} = \frac{8}{27}.$$

故正确选项为 A.

题型 3 关于比与百分数的问题

例 1(2004) 甲、乙两种茶叶以 $x:y$ (重量比) 混合配制成一种成品茶, 甲种茶 100 元/kg, 乙种茶 80 元/kg. 现甲种茶价格上涨 10%, 乙种茶价格下降 10% 后, 成品茶的价格恰好仍保持不变, 则 $x:y$ 等于 [].

A. 1:1

B. 5:4

C. 4:5

D. 5:6

解析 甲、乙两种茶的价格变化前后每千克成品茶的价格分别为 $\frac{100x+80y}{x+y}$ (元) 和 $\frac{(100+100 \times 10\%)x + (80-80 \times 10\%)y}{x+y} = \frac{110x+72y}{x+y}$ (元), 根据题意可知

$$100x + 80y = 110x + 72y, \quad \text{即} \quad 50 \frac{x}{y} + 40 = 55 \frac{x}{y} + 36,$$

解得 $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$. 故正确选项为 C.

例 2 如果甲、乙两座水库的存水量之比为 2:1, 要使两座水库的水量相等, 甲水库向乙水库的输水量占甲水库存水量的 [].

A. 16.6%

B. 25%

C. 33%

D. 50%

解析 设乙水库的存水量为 a , 则甲水库的存水量为 $2a$, 要使两座水库的水量相等 (都为 $\frac{3a}{2}$), 则甲水库向乙水库的输水量为 $2a - \frac{3a}{2} = \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : 2a = \frac{1}{4} = 25\%$, 故正确选项为 B.

例 3(2010) 若某单位员工的平均年龄为 45 岁,男员工的平均年龄为 55 岁、女员工的平均年龄为 40 岁,则该单位男、女员工人数之比为[].

A. 2 : 3

B. 3 : 2

C. 1 : 2

D. 2 : 1

解析 假设男员工人数为 x ,女员工人数为 y ,根据题意可知

$$45(x+y) = 55x + 40y.$$

得 $y=2x$,即 $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$,所以男、女员工的人数之比为 1 : 2. 故正确选项为 C.

例 4(2003) 某工厂产值二月份比一月份增加 10%,三月份比二月份减少 10%,那么[].

A. 三月份与一月份产值相等

B. 一月份比三月份产值增加 $\frac{1}{99}$ C. 一月份比三月份产值减少 $\frac{1}{99}$ D. 一月份比三月份产值减少 $\frac{1}{100}$

解析 设一月份的产值为 a ,二月份的产值为 b ,三月份的产值为 c ,则 $\frac{b-a}{a}=10\%$, $\frac{b-c}{b}=10\%$,即 $b=a(1+10\%)=1.1a$, $c=(1-10\%)b=0.9b=0.99a$,所以一月份的产值比三月份的产值多

$$\frac{a-0.99a}{0.99a} = \frac{1}{99}.$$

故正确选项为 B.

例 5 一个分数,若分子减少 30%,分母增加 40%,则新分数比原分数减少[].

A. 20%

B. 30%

C. 40%

D. 50%

解析 设原分数为 $\frac{b}{a}$,则新分数为 $\frac{0.7b}{1.4a}=\frac{b}{2a}$,新分数比原分数减少的百分比为

$$\frac{\frac{b}{a}-\frac{b}{2a}}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

故正确选项为 D.

例 6 若某公司 2014 年 6 月份的产值是 1 月份产值的 $k(k>1)$ 倍,则该公司上半年的月产值平均增长率是[].

A. $\sqrt[6]{k}$ B. $\sqrt[6]{k}-1$ C. $\sqrt[5]{k}$ D. $\sqrt[5]{k-1}$

解析 设该公司一月份的产值为 a ,上半年的月产值平均增长率是 x ,则该公司二月份的产值为 $a+ax=(1+x)a$. 类似地可以得到其六月份的产值为 $(1+x)^5a$,根据题意可知

$$(1+x)^5a = ka,$$

解得 $x=\sqrt[5]{k}-1$. 故正确选项为 D.

例 7(2005) 2005 年,我国甲省人口是全国人口的 $c\%$,其生产总值占国内生产总值的 $d\%$;乙省人口是全国人口的 $e\%$,其生产总值占国内生产总值的 $f\%$,则 2005 年甲省人均生产总值与乙省人均生产总值之比是[].

A. $\frac{cd}{ef}$

B. $\frac{ce}{df}$

C. $\frac{cf}{de}$

D. $\frac{de}{cf}$

解析 方法 1 设 2005 年全国人口为 p ,全国国内生产总值为 h ,则甲省人口是 $pc\%$ 、生产总值是 $hd\%$,乙省人口是 $pe\%$,生产总值是 $hf\%$,所以甲省人均生产总值为 $\frac{dh}{cp}$,乙省人均生产总值为 $\frac{fh}{ep}$,从而甲省人均生产总值与乙省人均生产总值之比是 $\frac{de}{cf}$. 故正确选项为 D.

方法 2 由于甲省与乙省的生产总值之比是 $\frac{d}{f}$,而人口之比是 $\frac{c}{e}$,所以人均生产总值之比是 $\frac{d}{f} : \frac{c}{e} = \frac{de}{cf}$. 故正确选项为 D.

例 8(2006) 某型号的变速自行车主动轴有 3 个同轴的齿轮,齿数分别为 48,36 和 24,后轴上有 4 个同轴的齿轮,齿数分别是 36,24,16 和 12,则这种自行车共可获得[]种不同的变速比.

A. 8

B. 9

C. 10

D. 12

解析 记主动轴的齿数分别为 $4a, 3a, 2a(a=12)$,后轴的齿数分别为 $9b, 6b, 4b, 3b(b=4)$.

由于 $\frac{4a}{6b} = \frac{2a}{3b}, \frac{4a}{4b} = \frac{3a}{3b}, \frac{3a}{6b} = \frac{2a}{4b}, \frac{3a}{9b} = \frac{2a}{6b}$,所以这种自行车共可获得 $3 \times 4 - 4 = 8$ 种不同的变速比. 故正确选项为 A.

例 9(2007) 图 1.1 中,大长方形被平行于边的直线分成了 9 个小长方形. 其中位于角上的 3 个长方形的面积已经标出,则右下角上第 4 个小长方形面积等于[].

A. 22

B. 20

C. 18

D. 11.25

9		15
12		?

图 1.1

解析 设第 4 个角上的小长方形面积为 x ,则有比例关系式

$$\frac{9}{12} = \frac{15}{x}. \text{ 解得 } x=20. \text{ 故正确选项为 B.}$$

例 10(2006) 一个容积为 10L 的量杯盛满纯酒精,第一次倒出 a L 酒精后,用水将量杯注满并搅拌均匀,第二次仍倒出 a L 溶液后,再用水将量杯注满并搅拌均匀,此时量杯中的酒精溶液浓度为 49%,则每次的倒出量 a 为[]L.

A. 2.55

B. 3

C. 2.45

D. 4

解析 第一次倒出 a L 酒精后剩余的纯酒精是 $(10-a)$ L,而第二次倒出的 a L 溶液中含有的纯酒精是 $\frac{10-a}{10}a$ L,根据题意,有

$$\frac{(10-a) - \frac{10-a}{10}a}{10} = 0.49,$$

即 $(10-a)^2 = 49$. 解得 $a=3$. 故正确选项为 B.

例 11 (2008) 把浓度为 50% 的酒精溶液 90kg 全部稀释为 30% 的酒精溶液, 需要加水 [] kg.

A. 60

B. 70

C. 85

D. 105

解析 设需要加水 x kg, 则根据题意可知 $90 \times 50\% = (90+x) \times 30\%$, 解得 $x=60$. 故正确选项为 A.

例 12 (2010) 若某公司有 10 个股东, 他们中任意 6 个股东所持股份的和都不少于总股份的 50%, 则持股最多的股东所持股份占总股份的最大百分比是 [].

A. 25%

B. 30%

C. 35%

D. 40%

解析 方法 1 将 10 个股东所持股份占总股份的百分比按从小到大的顺序排为 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_9 \leq a_{10}$, 因为 $a_1 + a_2 + \dots + a_6 \geq 50\% = \frac{1}{2}$, 所以 $a_6 \geq \frac{1}{12}$, $a_7 + a_8 + a_9 \geq \frac{3}{12} = 25\%$, $a_1 + a_2 + \dots + a_9 \geq 75\%$, 从而 $a_{10} \leq 25\%$. 故正确选项为 A.

方法 2 (特殊方法) 设 $a_1 = a_2 = \dots = a_9 \leq a_{10}$, 因为 $a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 6a_1 \geq 50\% = \frac{1}{2}$, 所以 $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 9a_1 \geq 75\%$, 从而 $a_{10} \leq 25\%$. 故正确选项为 A.

例 13 (2011) 某股民用 30000 元买进甲、乙两种股票, 在甲股票下跌 10%, 乙股票升值 8% 时全部卖出, 赚得 1500 元, 则该股民原来购买的甲、乙两种股票所用钱数的比例为 [].

A. 2 : 3

B. 3 : 2

C. 1 : 5

D. 5 : 1

解析 设甲、乙两种股票用的钱数分别为 x, y , 则

$$x + y = 30000, \quad 0.9x + 1.08y = 31500.$$

所以 $\frac{90x + 108y}{x + y} = 105$, 即 $90x + 108y = 105x + 105y$. 解得 $\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$. 故正确选项为 C.

例 14 设 $y = y_1 - y_2$, 其中 y_1 与 x^2 成正比, y_2 与 $x-1$ 成反比. 当 $x=2$ 时, $y=1$, 当 $x=-1$ 时, $y=\frac{11}{2}$, 那么可用来表示 y 的式子是 [].

A. $y = \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x-1}$

B. $y = \frac{2}{x^2} - \frac{7}{x-1}$

C. $y = 2x^2 + \frac{7}{x-1}$

D. $y = 2x^2 - \frac{7}{x-1}$

解析 设 $y_1 = ax^2$, $y_2 = \frac{b}{x-1}$, 则

$$y = ax^2 - \frac{b}{x-1}.$$

分别代入 $x=2, y=1; x=-1, y=\frac{11}{2}$, 得

$$4a - b = 1, \quad a + \frac{b}{2} = \frac{11}{2},$$

解得 $a=2, b=7$. 故正确选项为 D.

例 15 设 $(x+y):(y+z):(z+x)=4:2:3$, 则 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right):\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=[\quad]$.

A. $4:3:2$

B. $4:8:9$

C. $4:9:10$

D. $4:10:9$

解析 设 $x+y=4a, y+z=2a, z+x=3a$, 则

$$x+y+z=\frac{9}{2}a,$$

求得 $x=\frac{5}{2}a, y=\frac{3}{2}a, z=\frac{1}{2}a$, 于是 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right):\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=\frac{8}{15}:\frac{4}{3}:\frac{6}{5}$. 故正确选项为 D.

题型 4 运动问题(典型应用问题之一)

1. 相遇与追及问题

例 1 运动场的跑道周长 400m, 甲、乙两名运动员从起跑点同时同向出发. 甲每分钟跑 390m, 乙每分钟跑 310m, 则 $[\quad]$ min 后甲超过乙一圈.

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

解析 所求时间为 $\frac{400}{390-310}=5$. 故正确选项为 C.

例 2 快、慢两列车的长度分别为 160m 和 120m, 它们相向行驶在平行轨道上. 若坐在快车上的人看到整列慢车驶过的时间是 3s, 那么坐在慢车上的人见整列快车驶过的时间是 $[\quad]$ s.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

解析 设两列车的速度之和为 v , 则坐在快车上的人看到整列慢车驶过的时间是 $\frac{120}{v}=3(\text{s})$, 所以 $v=40(\text{m/s})$, 从而坐在慢车上的人见整列快车驶过的时间是 $\frac{160}{40}=4(\text{s})$. 故正确选项为 C.

例 3 一辆卡车从甲地驶向乙地, 速度为 60km/h, 另一辆卡车从乙地驶向甲地, 速度为 55km/h. 两车同时出发, 在离中点 10km 处相遇, 则甲、乙两地之间的距离是 $[\quad]$ km.

A. 230

B. 345

C. 460

D. 575

解析 根据题意可知两辆卡车驶过的距离差为 20km, 所以从开始行驶到相遇所用的时间为 $\frac{20}{60-55}=4(\text{h})$, 从而甲、乙两地之间的距离为 $4 \times (60+55)=460(\text{km})$. 故正确选项为 C.

例 4(2004) 在一条公路上, 汽车 A, B, C 分别以 80, 70, 50km/h 的速度匀速行驶, 汽车 A 从甲站开向乙站, 同时车 B, 车 C 从乙站出发与车 A 相向而行开往甲站, 途中车 A 与车 B 相遇 2h 后再与车 C 相遇, 那么甲乙两站相距 [] km.

A. 2010

B. 2005

C. 1690

D. 1950

解析 设甲、乙两站相距 l km, 则 A, B 两车从开始行驶到相遇所用的时间为 $\frac{l}{80+70}$ h, 而 A, C 两车从开始行驶到相遇所用的时间为 $\frac{l}{80+50}$ h. 根据题意可知

$$\frac{l}{80+70} + 2 = \frac{l}{80+50},$$

解得 $l=1950(\text{km})$. 故正确选项为 D.

例 5(2007) 甲、乙两人沿同一路线骑车(匀速)从 A 区到 B 区, 甲要用 30min, 乙要用 40min. 如果乙比甲早出发 5min 去 B 区, 则甲出发后 [] min 可以追上乙.

A. 10

B. 15

C. 20

D. 25

解析 设由 A 区到 B 区的路程为 1, 则甲每分钟走全程的 $\frac{1}{30}$, 乙每分钟走全程的 $\frac{1}{40}$. 甲每分钟比乙多走 $\frac{1}{30} - \frac{1}{40} = \frac{1}{120}$.

乙比甲先出发 5min, 则乙已走了路程的 $5 \times \frac{1}{40} = \frac{1}{8}$. 因此, 甲追上乙需要用时 $\frac{1}{8} \div \frac{1}{120} = 15(\text{min})$. 故正确选项为 B.

例 6(2009) 甲、乙两车分别从 A, B 两地同时相向开出, 甲车的速度是 50km/h, 乙车的速度是 40km/h. 当甲车驶到 A, B 两地路程的 $\frac{1}{3}$, 再前行 50km 时与乙车相遇. A, B 两地的路程是 [] km.

A. 225

B. 220

C. 215

D. 210

解析 设两地的距离是 x km, 根据题意可知甲、乙两车到达相遇处所用的时间可分别表示为 $\frac{\frac{x}{3}+50}{50}$ 及 $\frac{\frac{2x}{3}-50}{40}$, 于是得

$$\frac{\frac{x}{3}+50}{50} = \frac{\frac{2x}{3}-50}{40},$$