GOUZAOFA JIE SHUXUETI

构造法解数学题

气象出版社

构造法解数学题

主　编： 李学高　李正春　胡淮宁

副主编： 叶　诚　程根荀　周建平

编　委： 陈宏锦　石和富　田　新　杨万权
汤大炳　蒋芳顺　柴时钟　方圣君
朱兆林　章跃潮　杨金喜　黄金贵
刘平三　何寅基　胡安礼　杨　磊
杨绍业　张　驰　刘梦中　梁俊奇
翁忠杰　喻秋生　杨玉联　王春鸣
伍友平　彭水金　孙荣春　龚荣玉
刘琨仿

主　审： 黄　华

气　象　出　版　社

(京)新登字046号

构造法解数学题

李学高　李正春　胡淮宁主编

气象出版社出版发行

(北京西郊白石桥路46号)

建南科教印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：8　字数：180千字

1993年3月第一版　1993年3月第一次印刷

印数：1—9000　定价：4.00元

ISBN7—5029—1119—7/O·0023

编者的话

根据我国改革开放，建设具有中国特色的社会主义精神。我们的教学要求培养学生的独立工作能力，培养处理自然、社会问题的能力。这是我们当前教学改革的重点和方向。为此，我们特编写了《构造法解数学题》一书。

我国的社会主义建设，需要大批具有各种专业文化科学知识，具有较强的独立工作能力的人才。这种人才的基础在于中等教育。因此，在中学阶段，研究对学生能力的培养，就具有十分重要的意义。

构造法是在观察图形或数量关系的基础上运用学过的基础知识，构造出新的空间(或平面)图形、数量关系，从而使问题获解。这种方法新颖，是培养创造性工作人才的重要途径。

本书结合中学教材，从基本图形、合同图形、相似图形、等积图形、特殊图形、数形结合、物理模型等方面，较详细的分析了构造法的主要方式及应用。这对开拓学生的思维，培养灵活性、创造性具有极大的作用。

本书还搜集了一些实际问题，而这些实际问题的解答过程，对我们把实际问题抽象为数学问题的能

力，得到了训练和锻练，提高了分析问题和解决问题的实际能力。

干社会事业，方法多样，道路千万条。“敢问路在何方？路在脚下！”

读者若能通过阅读本书，学到干一番事业的方式，从而能干一番大事业，且走向辉煌的人生，则是我们所庆幸的。预祝大家事业成功！

由于水平有限，错漏难免，恳请读者批评指正。

编　者

1993.1

目　录

第一章　构造性解题方法

§1　构造性解题方法的意义

苏联数学家C·A·娅诺夫斯卡亚在题为《解题意味着什么》的演讲中精辟地指出：解数学题，“意味着将所要解的问题转化为已经解过的问题”。

在数学解题中，利用观察和联想，恰当地构造出一个(或几个)与原问题有关的辅助问题，从而将原问题转化为比较简单或易于求解的新问题，并通过对新问题的求解使原问题获解。这种以“构造”为主要特点的解题方法，称为“构造性解题方法”。

例如：在证明勾股定理$a^2+b^2=c^2$时，如果我们把a^2、b^2、c^2分别看成是边长为a、b、c的正方形面积，则自然会想到能否把欲证的线段关系转化为面积关系来研究呢？

我们构造了一个几何图形(见图1-1-1)。这个图形的整体与各部分的面积之间有：

$$(b-a)^2+4ab/2=c^2$$

的关系也即有$a^2+b^2=c^2$的关系，因此定理成立。

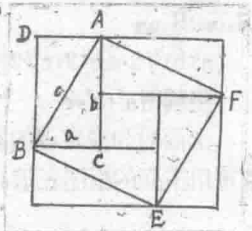


图1-1-1

由一类线段关系的问题，通过联想，与另一类面积关系的问题发生联系，构造出一个崭新的数学模型，使问题借助所构造的数学模型得以解决。这种解决问题的思想，就是属于构造的思想。

上面的证法，是我国古代数学家赵爽在他所著的《勾股方圆图注》一节中提出来的，这个图形通常也称为勾股方圆图。

以后，我国古代的另一数学家刘徽也利用“青出朱入”图给出了勾股定理的又一构造性证法。

在外国，对勾股定理的许多证法大多也是属于构造性的。

例如：二千多年前古希腊几何学家欧几里德对勾股定理的证明，12世纪印度数学书中出现的一些证明方法，也都是属于构造性的。

有趣的是，1876年，美国的第二十届总统加菲尔德也利用构造梯形，给出了勾股定理又一个巧妙的构造性证法。加菲尔德的证明方法是这样的：

在直角三角形ABC的斜边BC上，作等腰直角三角形BCE(图1-1-2)，过E作ED⊥AC，交AC于D。因△CDE≌△BAC，所以AB=DC，AC=DE。如果AB，AC，BC分别用a、b、c表示，则

$S_{梯形ABCD}=(a+b)^2/2$，

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DCE}=ab/2$，

而$S_{梯形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CBE}+S_{\triangle DCE}$

$\therefore\ (a+b)^2/2=ab/2+c^2/2+ab/2$

整理得$a^2+b^2=c^2$

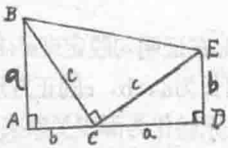


图1-1-2

上面对勾股定理的证明方法虽然各种各样，但其解题思想，都可用下面的框图表示。

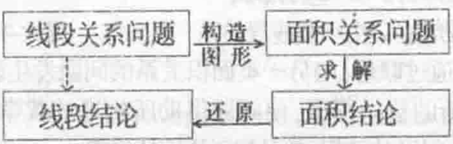


图1-1-3

从上面的框图可以看出，用构造性解题方法解答几何问题，

其基本思想,是从题中的数量关系及图形特点出发，构造一个(或几个)与原题有关的辅助问题,这里构造的辅助问题并不是为了它本身,而是希望通过对所构造的问题的解决原题获解。一般说来,如果辅助问题比原题更简单、更直观,这种方法就可能获得成功。

§2 构造性解题方法的基本思想

构造性解题方法的基本思想是转化。其基本出发点是化繁为简,化难为易。在具体运用这种思想方法处理问题时,要注意遵循熟悉化、简单化、具体化、和谐化和反向思维等原则。

(一)熟悉化原则

熟悉化原则是指在转化时,要注意把比较陌生的问题,转化为比较熟悉的问题,以便充分利用已有的知识和经验。

例1 在任意四边形ABCD中,E、F分别是边AD和BC的中点,求证:$EF \leqslant (AB+CD)/2$。

分析:这是一个涉及线段关系的几何不等式,由于题设图形是任意四边形,其证法是我们比较陌生的。如果我们利用题中的中点这一条件,构造恰当的三角形,使欲证的线段关系集中到所构造的三角形中,则原不等式就可以转化为我们比较熟悉的三角形不等式了。

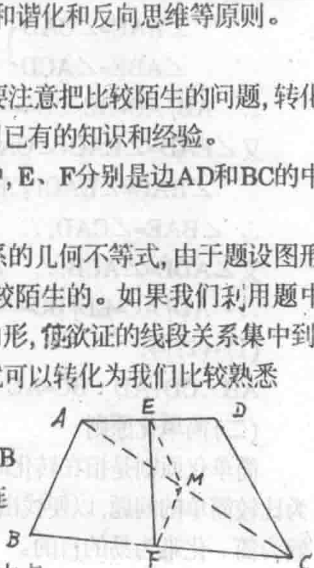


图1-2-1

证明:如图1-2-1,在四边形ABCD中,连结AC,取AC的中点M,连ME,MF,得△MEF。

∵E、F分别是边AD、BC的中点,

则:

ME平行且等于CD/2,MF平行且等于AB/2。

在△MEF中，有：EF≤ME+MF。故　EF≤(AB+CD)/2。

例2 (托勒密定理)若凸四边ABCD为圆内接四边形，求证：AB·CD+AD·BC=AC·BD。

分析：由于对结论所及的线段关系式我们比较生疏，不易入手，而对形如ad=bc这一类线段关系式的証法比较熟悉。因此，自然希望能把结论变更为若干个形如ad=bc的线段关系式，从而使原题化难为易，基于这一想法，可得如下证法。

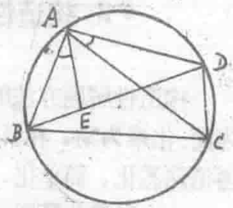


图1-2-2

证明：如图1-2-2，在∠BAD内作∠BAE=∠CAD，设AE交BD于E，则有：

$$\left.\begin{aligned}\angle BAE=\angle CAD\\ \angle ABE=\angle ACD\end{aligned}\right\}$$

∴　AB/AC=BE/CD ⟹ AB·CD=AC·BE。　(1)

又∠EAD=∠EAC+∠CAD，

∠BAC=∠EAC+∠BAE，

∴ ∠BAE=∠CAD，∴　∠EAD=∠BAC。

又∠ADE=∠ACB，∴　△ADE∽△ACB。

∴　AD/AC=ED/BC ⟹ AD·BC=AC·ED　(2)

(1)+(2)得：

AB·CD+AD·BC=AC·BE+AC·ED=AC·BD。

(二)简单化原则

简单化原则是指在转化时，要注意把比较复杂的问题转化为比较简单的问题，以便找出薄弱环节，各个击破，从而达到化繁为简、化难为易的目的。

例3　$\odot O_1$和$\odot O_2$相交，过一交点P任作一直线交两圆于A、B，A在$\odot O_1$上，B在$\odot O_2$上，分别过O_1、O_2作$O_1C\perp AB$于C，$O_2D\perp AB$于D。求证：CD=AB/2.

分析：题中P、A、B三点的相关位置有多种，关系比较复杂，因此，可以先对P、A、B三点的相关位置适当分类，构造相应的子命题，把原命题转化为三个比较简单的子命题。

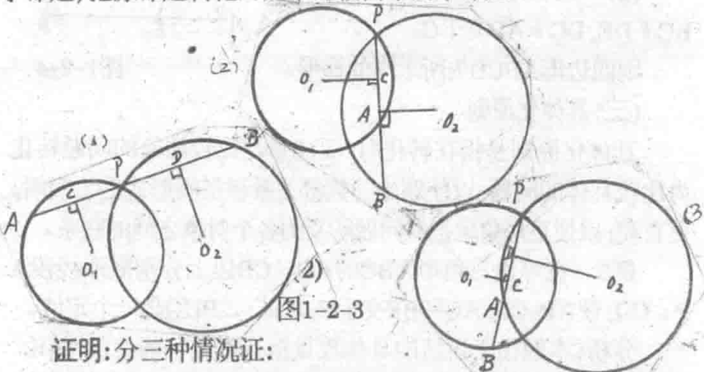


图1-2-3

证明：分三种情况证：

(1)　点P介于点A和点B之间(图1-2-3(1))，有$O_1C\perp AB$，
$\therefore$ AC=PC，从而CP=AP/2。

同理PD=PB/2。

$\therefore$　CD=CP+PD=(AP+PB)/2=AB/2。

(2)　点A介于点P和点B之间(图1-2-3(2))，有

$O_1C\perp AB$，$\therefore$　PC=CA，PC=PA/2，

同理PD=PB/2。

$\therefore$　CD=PD−PC=(PB−PA)/2=AB/2。

(3)　点B介于点P和点A之间(图1-2-3(3))，同(2)可证，有

CD=AB/2　。

综合上面三种情形，命题得证。

例4　已知梯形的两底边长a、b及两腰c、d，求作这个梯形

分析：直接根据题设条件作出梯形并不容易，因此可把求作一梯形问题转化为先求作一个三角形，再在此基础上作出所求梯形，从而使问题化繁为简。

解 (1)如图1-2-4,作$\triangle ADE$,使$AD=c$, $DE=d$, $AE=a-b$。

(2) 延长AE到B,分别过B、D作$BC \parallel DE$, $DC \parallel AD$交于C。

则四边形ABCD为所求作的梯形。

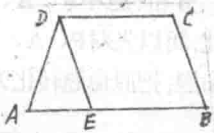


图1-2-4

(三)具体化原则

具体化原则是指在转化时,要注意把比较抽象的问题转化为比较具体的问题,以使题中的数量关系和空间形式更为明朗,更直观;以便更形象地把握问题所及的各个对象之间的联系。

例5 在等边三角形ABC的AC、CB边上分别截取线段AP、CQ,使$AP=CQ$, AQ和BP交于H,求证:$\angle PHQ$是一个定值。

分析:本题由于定值的具体数量指标未作明确交待,结论若明若暗。因此,使定值的数量指标具体化,有利于启发我们的思维。注意到$\angle PHQ$是定值。这表明:不论P、Q取在AC、BC的任何位置,只要有$AP=CQ$, $\angle PHQ$的大小总是保持不变的。因此,我们可选择一种特殊的情况,不妨把P、Q分别取在AC、BC的中点上,这时易知有$AQ \perp BC$, $BP \perp AC$,又$\angle C=60°$,故$\angle PHQ=120°$。于是,原问题的结论变为:求证$\angle PHQ=120°$,这显然比原题的结论明确具体多了。至此,原题就不难证明了,有兴趣的读者不妨一试。

例6 求凸n边形的内角和($n \geqslant 3$)。

分析:“凸n边形”,这是一个比较抽象的东西,它的内角和是多少?难以一下想出来。为了探寻原题的一般规律,我们可以对n取一些特殊值,即从一些特殊多边形入手进行考察。

当$n=3$时,有三角形内角和等于$180°$;

当$n=4$时,可把四边形分割成二个三角形,从而有四边形的内角和为$2 \times 180°$;

当n=5时,可从凸五边形的一个顶点出发,引二条对角线,把五边形分割成三个三角形,从而有五边形的内角和等于3×180°。

通过上面几个特殊情况的考察,我们可归纳如下一般规律:从凸n边形的一个顶点出发,引(n-2)条对角线把凸n边形分成(n-2)个三角形,从而可求得凸n边形分成(n-2)·180°。

上面两例表明:当遇到一个比较抽象的、一般性问题难以解决时,一般可从它的特殊情形入手,探明解题途径,上例的"特殊位置法"和本例的"特殊值法",都是通过构造相应的特殊情形,藉以探明结论的具体数量指标,化抽象问题为具体问题,从而较快地找到原题的解题途径。

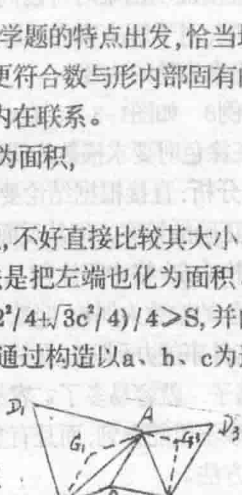
(四)和谐化原则

和谐化原则是指在转化时,要从数学题的特点出发,恰当地变更问题的条件或结论的表现形式,使其更符合数与形内部固有的和谐统一的特点,以突出问题本身固有的内在联系。

例7 设a、b、c是△ABC的三边,S为面积,

求证: $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\ 3S$。

分析: 由于左端是线段,右端是面积,不好直接比较其大小。为了使题中关系和谐化,一个自然的想法是把左端也化为面积。于启发我们把原结论变形为$(\sqrt{3}a^2/4+\sqrt{3}b2^2/4+\sqrt{3}c^2/4)/4 \geqslant S$,并由此联想到正三角形的面积。这样,就可以通过构造以a、b、c为边的三个正三角形,把原题转化为证明:



以a、b、c为边的三个正三角形的面积和的1/3不小于以a、b、c为边的三角形面积。

证明: 分别以△ABC的三边a、b、c为边向外作正△ABD,正△BCD和正△CAD,它们的中心分别是G_1、G_2

图1-3-1

和G_3，则：

$(\sqrt{3}a^2/4+\sqrt{3}b^2/4+\sqrt{3}c^2/4)/3$

$=(S_{\triangle ABD_1}+S_{\triangle BCD_2}+S_{\triangle CAD_3})/3$

$=S_{\triangle ABG_1}+S_{\triangle BCG_2}+S_{\triangle CAG_3}$。

在$\triangle ABC$内一点O，使$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$。由$\triangle ABG_1$与$\triangle ABO$的底边与顶角为定值，而$\triangle ABG_1$为等腰三角形，所以有$S_{\triangle ABG_1}>S_{\triangle ABO}$。

同理　$S_{\triangle BCG_2}>S_{\triangle BCO}$，$S_{\triangle CAG_3}>S_{\triangle CAO}$。

从而　$S_{\triangle ABG_1}+S_{\triangle BCG_2}+S_{\triangle CAG_3}>S_{\triangle ABC}$，

$\therefore$　$a^2+b^2+c^2>4\sqrt{3}S$。

(五)反向思维原则

反向思维原则是指在转化时，从正面入手不易时从反面入手，直接证明困难时可以间接解决。这种从反面考虑问题的思维原则，对于解决那些不易直接求解的问题，常常能发挥化隐为显，化难为易的功效。

例8　如图1-3-2。在4×6=24的方格内的18个格中涂上黑色，在涂色时要求横数为偶数，竖数也为偶数，这件能办到吗？

分析：直接根据结论要求入手，因为黑色的格数较多，很难得到正确的答案。但从反面考虑思路清晰。即在4×6=24的方格内6个格中不涂色，要求横不涂色的格数为偶数，竖数也为偶数，这件事能办到吗？显然只考虑6个格子　就容易多了。容易看出，这件事不仅能办到，而且有多种的涂色方法。

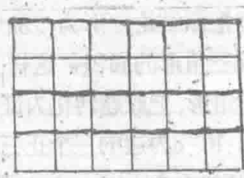
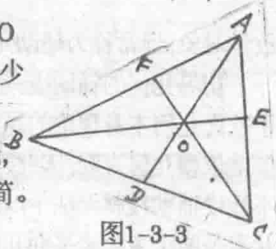


图1-3-2

例9　如图1-3-3，设O是$\triangle ABC$内的一点，AO、BO、CO延

长后分别交对边于D、E、F,试证：AO/CO, BO/OE和 CO/OF三个比值中至少有一个不大于2。



分析:本题从正面考虑有三种情况,很繁;若从反面考虑问题,则可化繁为简。

图1-3-3

证明:假设三个比值都大于2,

即 $AO/DO>2$; $BO/OE>2$; $CO/OF>2$。由$AO/OD>2$有: $AO>2OD$。

$\therefore$ $AD>3OD$,即$OD/AD<1/3$。

同理 $OE/BE<1/3$; $OF/CF<1/3$。 故 $S_{\triangle AOB}/S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle AOC}/S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle BOC}/S_{\triangle ABC}$都小于1/3.

$\therefore$ $(S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC})/S_{\triangle ABC}<1/3+1/3+1/3=1$.

这与$S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=S_{\triangle ABC}$相矛盾,故知假设错误,因而原题得证。

§3 构造性解题方法的主要方式

构造性解题方法是一种创造性的解题方法,在几何解题中有广泛的应用。运用这一方法解题,关键和难点都在于如何“构造”。一些表面上看起来似乎难以求解的几何问题,一旦构造得当,问题就迎刃而解。

构造性解题方法主要方式有构造辅助元素,构造结论和构造矛盾三种。

(一)构造辅助元素

在几何解题中,为了实现条件向结论的转化,常常需要从题设之外引进某些数学对象为中介,藉以沟通几何题的内在联系,帮助我们克服解题障碍。这种从题设之外引进的作为中介物的

数学对象，通常称为辅助元素。

初等几何的辅助线，是每个人都通晓的最普通的辅助元由于欧氏几何本身理论的局限性，在推理和论证过程中不得不较多地依赖几何直观，因此除少数几个简单的命题外，大多数命题不添设辅助线就无法予以证明。可以毫不夸张地说，构造辅助元素是两千多年来平面几何的最基本的解题方法。

例10　已知$\odot O_1$和$\odot O_2$相交于P、Q两点，过P和Q作割线PAB和PCD分别交$\odot O_1$于A、C，交$\odot O_2$于B、D. 求证：AC // BD.

分析：要证明AC // BD，只须证明∠A=∠B(图1-3-4)。而∠A和∠B是两个图中的圆周角，要使它们之间产生联系，必须通过两圆之间的关系进行过渡。于是考虑添设辅助线PQ，构造辅助角∠PQD为中介，把∠A与∠B的关系联系起来。

证明：连结PQ,

∵ ∠PQD=∠B,

又∠PQD为圆内接四边形ACQP的外角。

∴　∠PQD=∠A, ∴　∠A=∠B.

故AC // BD。

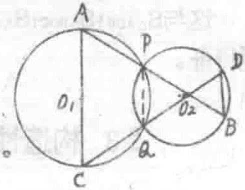


图1-3-4

例11　四边形的对角线长分别为a、b，对角线的夹角为α；求证：这个四边形的面积S=absinα /2。

分析：由于ABCD是一个任意四边形，难于直接由条件推证其面积关系式。怎样进行转化呢？通常的思路是利用添加辅助线转化为特殊的四边形来计算，于是可考虑对原四边形补形，构造相应的平行四边形，再研究所构造的平行四边形与原四边形之间的面积关系。

证明：如图1-3-5，过A点作PAS // BD;
过C点作QCR // BD；过B点作PBQ // AC；过D点作PBQ // AC，这