湖南大学出版社
图书出版基金资助项目

弹性动力学

戴宏亮 编著

湖南大学出版社

湖 南 大 学 出 版 社
图书出版基金资助项目

弹性动力学

戴宏亮 编著

湖南大学出版社

内 容 简 介

弹性动力学是固体力学的重要分支学科之一，主要任务是研究在动荷载作用下，弹性体内各点的位移、应力和应变随位置和时间变化而变化的规律，已被广泛应用于结构损伤监测、地震勘探、海洋勘测、建筑工程、爆炸技术及军事等众多领域。本书共10章，在由浅入深地、系统地阐述弹性动力学基本理论的基础上，着重讨论了弹性波在传播过程中的重要规律，弹性波在杆、板中的传播规律，再进而讨论了粘弹性介质中的波传播、弹性动力系统的稳定性和弹性动力学有限元法等内容。同时，结合典型应用问题，提供处理弹性动力学问题的一些数学方法。

本书可作为机械、土木、力学、地球物理学等专业本科生和研究生教材，也可供高等院校和科研单位相关专业的科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

弹性动力学/戴宏亮编著．—长沙：湖南大学出版社，2014.7
（土木工程“十二五”规划教材）
ISBN 978－7－5667－0721－5

Ⅰ.①弹…　Ⅱ.①戴…　Ⅲ.①弹性动力学—高等学校—教材
Ⅳ.①O347

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第178392号

弹性动力学
TANXING DONGLI XUE

作　　者：戴宏亮　编著
策划编辑：卢　宇
责任编辑：黄　旺　责任校对：全　健　责任印制：陈　燕
印　　装：长沙利君漾印刷厂
开　　本：787×1092　16开　印张：11　字数：289千
版　　次：2014年8月第1版　印次：2014年8月第1次印刷
书　　号：ISBN 978－7－5667－0721－5/O・89
定　　价：28.00元

出 版 人：雷　鸣
出版发行：湖南大学出版社
社　　址：湖南・长沙・岳麓山　　邮　　编：410082
电　　话：0731－88822559(发行部),88821315(编辑室),88821006(出版部)
传　　真：0731－88649312(发行部),88822264(总编室)
网　　址：http://www.hnupress.com
电子邮箱：pressluy@hnu.edu.cn

目 次

第 1 章　绪　论

1.1　引　言

弹性动力学是固体力学的一个重要分支学科，主要研究弹性体在动荷载作用下，弹性体内各点的位移、应力和应变随着位置和时间变化而变化的规律，已被广泛应用于地球物理、海洋勘探、损伤监测、机械工程、生物医学、爆炸技术、材料科学及建筑工程等众多领域。弹性动力学属于经典力学的范畴，它是研究运动速率远低于光速的宏观物体的运动，所以牛顿定律是建立动力学支配方程的基础。弹性动力学是在经典的弹性力学基础上发展起来的，属于连续介质力学的一个组成部分，即认为物质是运动着的质子（或粒子）的连续集合，所以连续性假设仍然是弹性动力学的分析基础。

弹性体的动力效应主要取决于扰动作用的时间及扰动在弹性体中传播的特征时间。如果弹性体的外部扰动作用时间同扰动在物体中传播的特征时间是同一数量级，则动力学效应尤显重要；如果扰动时间远远大于扰动在物体中传播的特征时间，问题是准静态，此时惯性作用可以忽略；如果弹性体外部的扰动随时间迅速变化，即频率较高时，则也需考虑动力效应。

弹性动力学的主要任务就是从连续介质最基本的定律出发，建立描述物体运动的支配方程，并由此求解物体的动力响应。显然在弹性动力学问题中，各类场量（位移场、应力场和速度场等）不仅是空间位置的函数，而且是时间的函数，如位移场量可用 $u(x,y,z,t)$ 来描述，像这样的一些函数，常称为波函数。可见求解动力响应是处理可变场的问题，通常归结为双曲-扩散型方程的初值或初值-边值问题。

1.2　动荷载

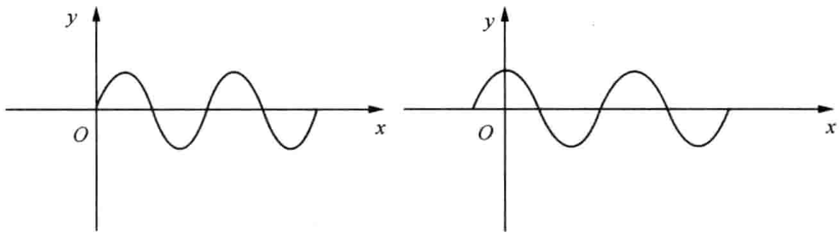
一个物体对于所考虑物体的作用称之为荷载，根据引起物体响应的不同，可将荷载分为静荷载和动荷载。静荷载与动荷载并没有严格的分界线，静荷载是指加载缓慢，以致物体由此产生的加速度很小，从而惯性效应可以略去不计，因而在此加载过程中可以认为物体的各部分随时都处于静力平衡状态，使物体变形的应变率在 10^{-1}/s 以下为准静态加载。动荷载指加载过程中能使物体产生显著的加速度，且由加速度所引起的惯性力对物体的变形和运动有着明显的影响。

动荷载是指随时间而变化的荷载。这种变化有的是周期性的变化，有的是无规则、无规律变化的荷载，只要随时间变化而变化都属于动荷载。动荷载随时间变化的规律常分为：

- 动荷载
  - 确定
    - 周期
      - 简谐荷载
      - 非简谐荷载
    - 非周期
      - 冲击荷载
      - 突加荷载
      - 其他确定规律的动荷载
  - 不确定
    - 风荷载
    - 地震荷载
    - 其他无规律的动荷载

1. 简谐荷载

简谐荷载是最简单也最重要的一类动荷载,其变化规律可用正弦或余弦函数表示。一般有旋转的设备(如水轮机、电机、风扇等)在运转时都会产生这种荷载,如图 1.1(a)、1.1(b)所示。



(a) (b)

图 1.1 简谐荷载

2. 非简谐荷载

非简谐荷载是一类呈现周期性的确定动荷载,例如有曲柄连杆的机器(如活塞式压缩机、柴油机、锯机等)在运转时都会产生这种荷载,如图 1.2 所示。

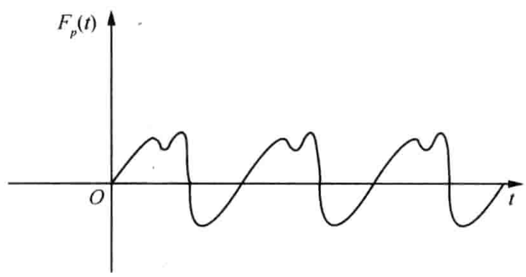
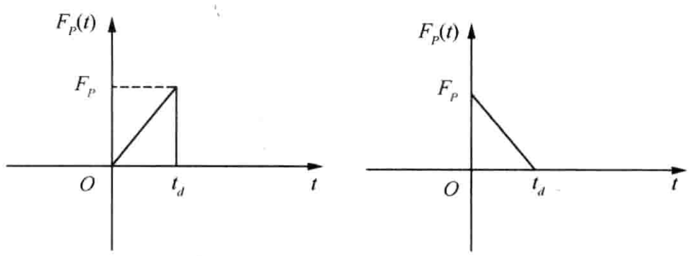


图 1.2 周期非简谐荷载

3. 冲击荷载

冲击荷载作用时间很短,荷载值急剧减小(或增大),如爆炸荷载就属于这类,如图 1.3(a)、1.3(b)所示。



(a) (b)

图 1.3 冲击荷载

4. 突加荷载

突加荷载是以某一恒值突然施加于结构上并保持不变的一类荷载。例如锻锤和打桩机所产生的荷载，在结构上突然施加（或卸除）重物，吊车制动力对厂房的作用等，如图 1.4 所示。

5. 随机荷载

随机荷载表示在任一时刻的数值无法事先确定的一类荷载，不能用数学式定义，但不能理解为无规律、杂乱无章，应采用概率论和数理统计的方法，从统计方面来进行定义。地震荷载和风荷载是其典型例子，如图 1.5 所示为地震时记录到的地震加速度 $\ddot{u}(t)$。

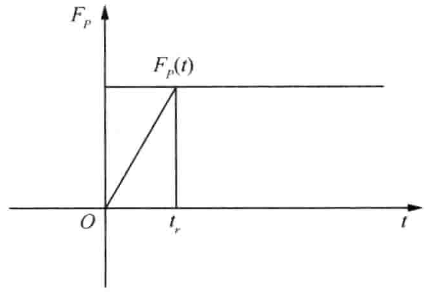


图 1.4　突加荷载

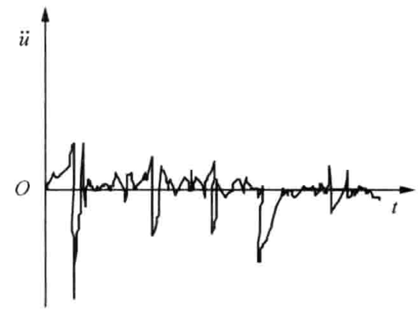


图 1.5　随机荷载

同静荷载情况相比，弹性体对动荷载的响应在性质上存在着较大的差异。在静力学问题中，对于给定的荷载，响应具有单一的解答，即求解静态的响应只需考虑加载前与加载后的变形状态之间的差异。这是由于略去了惯性效应，使得物体在局部受到扰动后，整个物体所有各部分的响应立即完成，而不需要任何时间过程。然而，在动荷载的响应问题中，物体中每一点处的响应也将随时间而变化，需建立某一时间过程上的一系列的解答。动荷载的响应不仅与扰动源的性质有关，如荷载的强度、频谱成分、持续时间等，且还与物体的材料本身的固有动力学特征密切相关。另外，物体的几何特征、边界条件等对动荷载的响应也有直接的影响。

1.3　振动与波

对于弹性体来说，动力学特征主要是指介质的弹性和惯性性质，这两种性质能够使得系统的能量得以保持和传递，构成了波动和振动的机制。如果介质不能变形，则在局部激励作用下介质的任何一部分将立即受到内力或加速度形式的扰动。同样，如果一种弹性介质假想不具有惯性，即没有不同质点位移的滞后，从质点到质点的扰动，瞬间便达到最远处的质点。当然，一切实际材料都是可变形且有质量，故一切实际材料都能传递机械波。

振动是指物体的全部或一部分沿直线或曲线往返颤动，具有一定的时间规律和周期的运动。当一个系统的平衡被破坏，并且这个力在破坏平衡后有一个与末状态相同方向的回复力，则形成振动效应。一般来说振动的基础是一个系统在两个能量形式间的能量转换。

波动是物体运动的重要表现形式，由于物体特征和结构的不同，波在其内部传播具有不同的特征，包含的信息也不尽相同。从物理的角度看，波就是扰动或能量的传播。实际上，若在物体的某一局部受到突加的扰动，则受扰动点立即将这种扰动传递到与之相邻的质点，即扰动质点将所携带的能量传递给它的邻域，依此传开，这种扰动就通过波的形式以有限的速度向远处传播，称为波动现象。波的传播只是扰动的传递，并没有介质的传动，波只在介质内部运动，而不可能跑到介质外。现有的研究成果表明，初始扰动、传播介质的性质及结构的几何形式等对波传播过程中的波形、波速特征和传播特点都有较大的影响。

在弹性介质中传播的波是弹性波。弹性波是指当物体某部分突然受到扰动时，该处将产

生弹性变形，并以波的形式向周围传播，使整个物体产生弹性变形，这种波称为弹性波。

弹性动力学主要目标是在给定扰动源信息、边界条件和初始条件下求解弹性体的动力响应。从数学角度看，运动方程的解常可分为两种形式：一种是波动解，一种是振动解；前者描述行波在弹性介质中的传播过程，后者描述弹性体的振动。

如果介质是无界的，扰动将一直传播出去。然而，实际的物体总是有界的，当扰动达到边界时，将与边界发生相互作用而产生反射。由于多次的来回反射，使得整个物体呈现出在其平衡位置附近的一种周期性的振荡现象，对弹性体来说，这就是物体的弹性振动。由此可见，振动和波动存在着本质的内在联系，可以看成是同一物理问题在不同条件下不同结果的表现形式。为了说明两者的联系与差异，首先考察波动与振动两个物理现象。

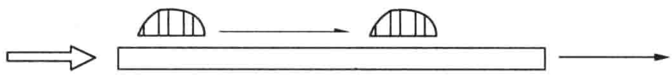


图 1.6　无限长杆端部受力时的扰动信号传播

一个原来处于静止的物体，当其局部受到突然施加的扰动，并不能立即引起物体各部分的运动。如图 1.6 所示的一根半无限长杆杆端受到力作用时，远离杆端的区域并不能立即感受到端部的扰动信号，而要经过一定的时间后才能接受这个信号。这是动力问题和静力问题最根本的区别。实际上，由于连续介质中的各个质点由某种约束力而彼此联系起来，在未受到扰动之前，质点之间的相互作用力处于平衡状态。当某一质点受到扰动以后，它就要偏离原来的平衡位置而进入运动状态。由于质点间相对位置的变化，使得受扰动质点同其周围质点之间增加了附加的弹性力，从而与受到扰动质点相邻的质点也必然受到影响而进入运动状态。

弹性波和弹性体的振动之间存在着本质的内在联系。这两种现象的形成有着相同的机制，它们都是由介质的弹性和惯性两个基本性质决定的。弹性性质有使发生了位移的质点回复到原来平衡位置的作用，而运动质点的惯性有使当前的运动状态持续下去的作用，或者说弹性是贮存势能的要素，惯性是维持动能的表征。正是由于这两种特性的存在，系统的能量才能得以保持和传递，外部的扰动才能激发起弹性波的传播和弹性体的振动。

扰动一开始总是以行波的方式将能量传播出去，当物体有边界时，由于行波的来回反射，最终使物体趋于定常的运动状态，则表现为振动现象。弹性体的振动是波动过程的一种特殊表现形式，并不意味着波动过程已经消失，而是一种在有界物体中长时间范围内的波动过程。在实际的弹性动力学问题中，有时需要考察波动过程，有时则对振动现象更感兴趣。对应于这两种情况，分别采用波动解和振动解。波动解具有行波的形式，如在一维情况下其波函数形如 $F(x\pm ct)$，这种解能给波动过程以直观形象的描述，在第一时刻可以清晰地看到扰动传播的形状和所到达的位置。在振动解中，波函数可以表达为 $\Phi(x)q(t)$ 的分离变量的形式。由数量方程理论可知，振动解一般为一无穷级数 $\sum_n \Phi_n(x)q_n(t)$，级数中的每一项代表了一个在空间具有固定模式并按一定频率振动的驻波。可以看出，振动解是用无穷多个驻波的叠加描述了行波的传播，而驻波是由相同频率的简谐波的叠加得到。这两种解答可以由 Fourier 级数联系起来，这恰好反映了波动与振动之间的本质联系。这两个解答也有各自的特点，在波动解中，空间坐标为 x_1 和 x_2 的两点存在着相位差 $|x_2-x_1|/c$，此处 c 是波传播的速度。而在振动解中，则是把整个物体看作是一个大的振子，各点作同步的运动，而不存在相位上的差别，各点振动的幅值在空间按函数 $\Phi(x)$ 确定的模式分布。

对某个特定的动力响应过程，解的形式的选择，要视实际问题的需要来确定。这既取决于扰动源的性质，又取决于所考虑物体的相对尺寸，同时还与研究者所关心的问题等诸多因素有关。一般来说，当荷载作用时间极为短促或变化极为迅速的情况下，如经受撞击、爆炸等荷载作用时，了解物体的瞬态变形和应力变化的规律是重要的，这时宜采用波动解。如用振动解，则由于其频带较宽，尽管级数中取很多项，往往也难给出满意的解答。又当物体尺寸很大时，弹性波通过物体所需的时间就显得非常重要而必须加以考虑，在此情况下局部的扰动主要激发起波动过程，而整个物体的振动则是比较微弱的，显然采用波动解是合适的，如研究地震作用下地球内部的应力场的变化，爆炸后的应力波的传播，用超声波进行无损探伤，声发射监测断裂等。在一般的机械振动和工程结构的动力响应问题中，由于所研究对象的几何尺寸相对来说比较小，则可不考虑波动过程，而直接作为振动问题来分析。然而，如果我们的兴趣在于了解在动荷载作用下物体的拐角或介质内部的孔洞、裂缝等部位的局部信息时，则应作为波动问题处理，通过分析波通过障碍物时的绕射或散射过程将能给出这些细部的应力和变形的变化以详尽地描述。

一般地讲，波动解能从数学上给出动力学过程的完美解答，但相对于振动解来说，其求解过程往往比较繁难。关于振动问题，已有很多的教材和专著出版，而本书则重点只介绍弹性动力学中的波动问题。

1.4 波动特征及波动方程

1.4.1 波动特征

波动现象是自然界很常见的现象，几乎存在于所有学科和工程技术领域，如声波、水波、电磁波、固体中的应力波，化学反应、生命过程、经济现象、人口迁移以及交通流等过程中都涉及波动现象。尽管这些系统或过程彼此相互独立，所考察的现象和所关心的结果也毫不相干，但却表现出许多极为相似的规律。在所有这些不同类型的波中，人们对机械波、声波和电磁波等的认识和利用是最早的，也是最广泛的，这些波在不同介质的交界面发生反射和折射，波在传播过程中可以聚焦和发散，可以叠加，遇到障碍时产生衍射并且遵守能量守恒等诸多共同特性。

波是由介质的一部分向另外一部分传递的可以鉴别的信号，这个信号可以理解为某种性质的扰动，它可以是某个量的极大值或突变，能清楚地被识别，任何时候能确定它的位置，且在传播过程中允许改变其强度、形状和速度。简单地说，波动就是扰动在介质中的传播，扰动总是具有某种能量，因此，波的基本特征之一是能量在介质中的传递。显而易见，一个均匀场是可变的，故不会有波动现象存在。另外，一个信号的传递若没有可以识别的速度也不称其为波动过程。

一个波动总是受到扰动源的激发而产生并通过介质而传递的，所以它既携带着扰动源的信息，又包含着介质本身的特征。如果我们的兴趣在于了解介质本身的一般的波动性质，这类问题常属于波的传播问题；如果我们关心的是某一特定扰动的传播规律，则属于波的激发问题。这两类问题的研究是相辅相成的，而且往往是耦合的。

到目前为止，研究波动现象的数学概念和技巧取得了极为丰富的研究成果和进展，已形成一套相当完善的理论和方法。近年来，非线性效应日益被人们所关注，这给波动理论的研究开辟了更为广阔的前景。

1.4.2 简单的波动方程

最简单波的传播是扰动沿一个方向，以固定的速度 c 并保持扰动原来形状的传播过程。例如，沿笛卡尔直角坐标系的 x 轴正方向传播的一个扰动，如图 1.7 所示。

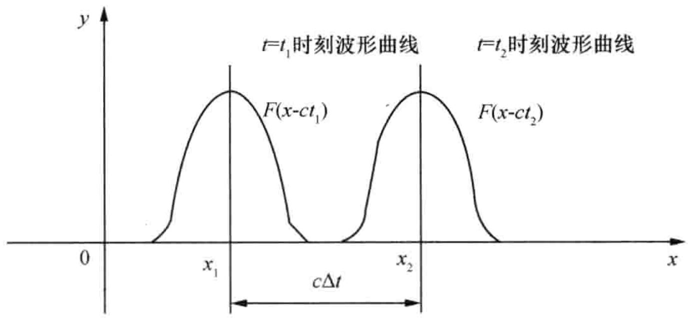


图 1.7　简单波的传播

如果这个扰动的波形用 $\psi(x,t)$ 来表示，那么在 $t=0$ 时刻，该扰动的波形只是该时刻的一个空间分布，用函数 $F(x)$ 来表示。由于该扰动沿 x 正方向以固定的速度 c 并保持扰动原来的形状向前传播，因此对于 $t>0$，扰动的传播可以表示为 $\psi(x,t)=F(\xi)$，此处 $\xi=x-ct$。对于一个沿 x 正方向以固定的速度 c 与扰动同时向前行时，其扰动波形 $\psi(x,t)$ 是不变的。按照这种规律随时间在空间变化的量 $\psi(x,t)$ 代表了一个沿 x 正方向进行的波，简称行波，其中 $\psi(x,t)$ 和 ξ 分别称为波函数 ψ 和相位。当 ξ 为常数时，则 $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t=0$，即 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=c$，可见 c 是恒定相位沿 x 轴的正方向传播的速度，称为相速度。在现在的例子中，由于相位 ξ 为常数时，扰动 ψ 就保持为常数，所以 c 也就是扰动传播的速度，即波速。

下面分析 $F(\xi)=F(x-ct)$ 的物理意义。对于某一特定时刻 t_1，$F(x-ct_1)$ 仅是 x 的函数，它表示 t_1 时刻扰动 ψ 沿 x 轴的分布，经过一个时间增量 Δt 以后，函数的自变量变成了 $x-c(t_1+\Delta t)$，显然，这时 x 点处的函数随着时间的变化而发生改变。如果将空间坐标 x 增加了一个 $c\Delta t$，函数自变量为 $(x+c\Delta t)-c(t_1+\Delta t)=x-ct_1$，和 t_1 时刻函数的自变量一样，于是 t_1 时刻扰动的分布经过一个时间增量 Δt 以后沿 x 正方向平移一个距离 $c\Delta t$。由此可见，$F(x-ct)$ 代表了沿 x 轴正方向以速度 c 传播的行波。x_2 处所经历的扰动将完全重复 x_1 处所经历的扰动过程，只是在时间上推迟了 $\Delta t=(x_2-x_1)/c$。

类似地，对于沿 x 负方向保持形状不变以速度 c 传播的扰动，若 $t=0$ 的扰动空间分布为 $\psi=G(x)$，则 $t>0$ 以后的扰动可以表示为 $\psi(x,t)=G(\eta)$，其中 $\eta=x+ct$。

对于上述沿 x 轴正方向进行的波 $\psi(x,t)=F(x-ct)$，由于 $\partial\psi/\partial t=-cF'$，$\partial\psi/\partial x=F'$，可见波函数满足微分方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+c\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \tag{1.4.1}$$

同理，沿 x 轴负方向进行的波，其波函数满足微分方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-c\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \tag{1.4.2}$$

式(1.4.1)和式(1.4.2)是两个一阶的波动方程，它们是描述波动现象最简单的数学模型。显然沿 x 轴正向或负向进行的波，应同时满足二阶微分方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0 \tag{1.4.3}$$

式(1.4.3)常称为一维波动方程，以后将看到它的解是两个反向行波的叠加，具有以下形式

$$\psi(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct) \tag{1.4.4}$$

推广式(1.4.3)可以得到三维的波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0 \tag{1.4.5}$$

式中，$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$，式(1.4.5)有如下形式的解

$$\psi(x,y,z,t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z \pm ct) \tag{1.4.6}$$

式中，f 是任意函数，α、β 和 γ 是常数，且满足 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$。式(1.4.6)的解代表了三维介质中沿某一方向传播的平面波，即在特定时刻垂直于波传播方向的同一平面上各点感受到的扰动均相同。以后将会看到除平面波形式的解外，式(1.4.5)还有其他形式的解。

式(1.4.3)和式(1.4.5)在经典波动理论中起着相当重要的作用，它们能给出许多物理现象很好的近似描述。在弹性动力学问题中，经线性化后的波动方程基本上都可化为这两个方程。

1.5 弹性动力学的发展简史

波动和振动现象的研究可以追溯到几百年以前，早期的研究常常关心的是音乐的音调或水波等问题，而且多半是凭借于感性观察而未能进入定量的分析。19 世纪初，关于光的波动性质被揭示后，有力地推动了弹性波传播理论的研究。

弹性动力学的基本理论研究是从 19 世纪开始的。1821 年著名的物理学家 Fresnel 用横向振动的假设解释了偏振光干涉的实验事实，并证明了以中心力相联结的分子所组成的介质可以用实验实现这种横向振动并传播这种横波。在当时的自然科学界还从没有在介质内部可以传播横波的概念，这一问题引起两位数学家 Cauchy 和 Poisson 的注意，1822 年 Cauchy 对包括动力学方程在内的经典弹性理论作了许多奠基性的贡献，从而为弹性动力学的发展奠定了基础。1829 年 Poisson 首先指出了位移波动方程的解由两部分组成，一部分是一个标量势函数的梯度，另一部分代表了一个旋转场，这就揭示了在弹性介质内部扰动的传播由两类基本的位移波所组成，就是大家现在熟知的膨胀波和等容积波。此后，弹性固体中波的传播成为一个广泛研究的课题，强烈地吸引着广大研究者的兴趣。在此基础上，Lame 于 1852 年明确地提出了标量势和矢量势的概念，他给出一般的弹性动力位移场可表示为一个标量势函数的梯度与一个矢量势函数的旋度之和，且这两个势函数满足两个非耦合的波动方程，分别具有膨胀波和等容积波的传播速度。位移场这种分解的引入，对于位移波动方程的求解提供了极为有用的知识。在这个时期，弹性波传播的研究取得了许多重大进展，如 Cauchy(1830)研究了晶体介质中平面波的传播，得到了波前传播的速度方程。一般情况下有三个波速值，在各向同性的情况下，有两个是重合的，它们与平面横波相对应。接着 Poisson 等(1831)处理了初值问题，Stokes(1849)研究了由于体积力引起的波动问题，并对于突加点荷载导出了基本奇异解，后来 Love 对 Stokes 解进行了某些推广。Christoffel(1877)讨论了间断面传播的有关问题。Kirchhoff(1882)得到了由非齐次波动方程支配的势的积分表达式，这时对各向同性、均匀和无限弹性介质中波的研究已相当完善。

1887 年 Rayleigh 有个重大发现，这就是众所周知的 Rayleigh 面波，这种波以略小于等容积波速的速度沿界面传播，它在研究具有自由表面的弹性半空间的波动问题中起着极为重要的作用。Lamb(1904)研究了表面源和埋入源产生的扰动传播问题，他指出对于面源的反应是由膨胀波前和跟在后面的等容积波与 Rayleigh 面波所组成，并指出随着距扰动源距离的增加而增加。Knott 在 1899 年首先研究了波在两个弹性半空间交接面处的反射和折射问题，后来还有许多人进行了这方面的研究工作。在均匀介质内部，由扰动激发起的膨胀波和等容积波以不同速度独立地传播。然而，在介质性质不连续的交界面处，无论是反射波还是折射波都可能出现波型的转换。在两个弹性半空间的交界面处，也可能存在一种与 Rayleigh 波相似的交界面波，这类面波称为 Stonely 行波。在一个弹性半空间表面具有覆盖层时，则在层内除了有 Rayleigh 型的面波存在外，还可能存在另外一种称为 Love 波的面波，在这种波中，质点运动方向平行于界面。由于引入了覆盖层的厚度这个特征尺寸，使得 Love 波具有几何弥散效应。

关于杆、板和壳等结构的振动和波动问题的研究比较早。早期的研究大都属于初等理论的范畴，即沿用了材料力学的手法，引进一些近似假定来建立动力问题的支配方程。Euler(1744)和 Bernoulli(1751)最早导出了梁的弯曲振动方程，并得到了各种边界条件下的正则振动模态和频率方程，Navier(1824)导出了杆的纵向振动方程。1821 年 Ger-main 建立了薄板振动的偏微分方程。初等理论的这些结果，在杆、板横向尺寸远比波长小的情况下是适用的。Poisson(1829)证明细杆的振动理论被包括在精确的线弹性体的运动方程之中。Pochhammer(1876)对无限长圆柱一般振动的精确理论分析是一个重大进展，至今它仍是研究弹性圆杆波动问题的基础。Rayleigh (1894)和 Timoshenko(1921)分别考虑了杆单元的转动效应和剪切变形效应，对 Bernoulli-Euler 梁的弯曲波理论进行了修正，这两种效应的近似理论在近代的杆弯曲波理论中起着重要的作用。

弹性波动方程有多种求解方法，20 世纪 50 年代初，Thomson(1950)和 Haskell (1953)提出了传播矩阵法；1968 年 Alterman 和 Karal 提出了数值求解弹性波动方程的有限差分法；1970 年 Aki 和 Larner 提出了谱分析法；1975 年 Smith 提出了有限元法；1978 年 Hong 和 Helmberger 提出了横向非均匀介质中的 Glorified optics 方法；1983 年 Lee 和 Largstort 提出了处理三维问题的 Principal curvatures 方法；1989 年 Michel Bouchon 等人提出了边界积分方程—离散波数法，且研究了具有非均匀界面的多层介质中的传播；1990 年 Berg 等人提出了谱方法，且模拟波在弹性介质中的传播。基于有限元法和边界元法来计算波动问题，其优点在于稳定性、收敛性及边界适应性，但计算量大，使用不是很广泛。因此，发展网格划分灵活、复杂模型适应性强和计算精度高的有限差分法，已成为力学、地球物理学等领域的国内外学者研究的热点。

除以上经典理论工作外，弹性动力学的其他课题，如冲击问题、散射问题、动力实验技术以及求解各类问题的数学方法，近百年来也进行了广泛的研究，并取得了许多重大进展。二次世界大战期间，由于军事方面的特殊原因，要求了解高速撞击下物体的承载能力，使得波动问题研究更加强烈。最近几十年中，由于空间技术的发展、复合材料的广泛应用、地震工程和石油工业等重要问题的需要，动力学问题愈来愈为更多的学科和工程部门所关心。随着电子技术的发展，容易用实验的方法来产生和检测高频率的弹性波，再加上电子计算机的广泛使用，使许多复杂的问题能借助于数值方法得以求解。所有这些都极大地推动了弹性动力学的发展。

到目前为止，弹性动力学已形成一套相当完善的经典理论和方法，并在近代科学和工程技术许多领域中获得广泛应用。随着科学技术的迅速发展，弹性动力学正不断在有限变形、非线性弹性理论、非均匀及各向异性弹性介质中的波动等方面有许多新的课题亟待研究。

第 2 章　弹性动力学的基本理论

弹性动力学是以经典的弹性理论为基础，它是连续介质力学的一个组成部分。本章将对弹性动力学的基本理论进行介绍，首先对弹性力学的基本理论进行简要回顾，然后针对动力学问题建立基本方程，并对弹性动力学的基本定理和弹性波的能流密度等做一简要介绍。以后各章的讨论是在这些理论基础上进行阐述，并引用了波动方程的表示。本章所用到的张量表示法在附录 I 有简要介绍。

2.1　弹性力学简要回顾

弹性力学又称弹性理论，是固体力学的一个分支。物体在外力作用下发生形状改变，当作用力消失后，物体的形变也将完全消失，这种物体称为完全弹性体。物体完全恢复原来形状的能力称为弹性。弹性力学的研究对象是实际物体经过抽象处理后的完全弹性体，其主要任务就是要解决完全弹性体在外界因素（如外力、温度变化等）作用下应力和变形问题。在弹性力学中，为了能通过已知量（如物体的几何形状和尺寸、物体所受的外力或几何约束）求出位移、应力和应变等未知量，首先要从静力学、几何学和物理学三方面出发，建立这些未知量所满足的弹性力学的基本方程和相应的边界条件。

2.1.1　弹性力学假设

由于实际问题是极为复杂的，如果不分主次地考虑全部因素，势必会造成数学上推导的困难，而且由于导出的方程过于复杂，实际上也不可能求解。因此，通常必须按照物体的性质，以及求解的范围，去忽略一些可以不考虑的因素，而提出一些假定，使所研究的问题限制在一个方便可行的范围以内。弹性力学的理论基于以下几个基本假定建立。

1. 连续性假设

弹性力学是连续介质力学的一部分，它的基本前提是将可变形的固体看做是连续密实的物体，即组成物体的质点之间不存在任何空隙。从这条假设出发，可以认为一些物理量如位移、应力和应变是连续坐标的连续函数，因而在进行数学推导时可方便地运用连续和极限的概念。

2. 均匀性假设

假定所研究的物体是由同一类型的均匀材料组成，因此它的各部分的物理性质都是相同的，且不会随着坐标位置的变化而发生变化。根据这条假设，在处理问题时可取出物体内的任一部分进行分析，然后将分析的结果作用于整个物体。

3. 各向同性假设

假定物体在不同方向上具有相同物理性质，因而物体的弹性常数不随坐标方向的改变而改变。

4. 完全弹性假设

假定物体存在着应力和应变之间的一一对应的关系，与时间和加载路径无关。本书只研究应力和应变呈线性关系的情况，此时，各个弹性常数就不随应力或应变的大小而改变，并且可以运用叠加原理。

5. 小变形假设

假定物体在外界因素作用下所产生的位移远小于物体原来的最小尺寸。应用这条假设，可以使问题大为简化。例如，在研究物体的平衡时，可不考虑由于变形所引起的尺寸和位置的变化，在建立几何方程和物理方程时，可以略去应变、转角的二次幂或二次乘积以上的项，从而使得到的基本方程是线性偏微分方程组。

6. 无初应力假设

假定物体在变形前处于自然状态，即在外界因素作用之前，物体内部没有应力。根据这个假设，由弹性力学方法求得的应力仅仅是由于荷载或温度变化的作用产生的。若物体内有应力存在，则当物体受外界因素作用时，其实际存在的应力等于初应力加上用弹性力学方法所求得的应力。

2.1.2 弹性力学的一般问题及求解

在连续介质力学中，仅考虑低速（与光速相比）情形，考虑到物理和介质场的非均匀性，常采用取微元法研究问题。在这里，对于选取的微元体多为平行正六面体，如图 2.1 所示。其中外法线与坐标轴 $x_i(i=1,2,3)$ 同向的三个面元称为正面，它们的单位法向矢即坐标轴的单位矢 $\boldsymbol{e}_i$。另三个外法线与坐标轴反向的面元称为负面，它们的法向单位矢为 $-\boldsymbol{e}_i$。图中 σ_{ij} 的第一个指标 i 表示面元的法线方向，称面元指标；第二个指标 j 表示应力分解的方向，称方向指标。当 $i=j$ 时，应力分量垂直于面元，称为正应力；当 $i\neq j$ 时，应力分量作用在面元平面内，称为剪应力。

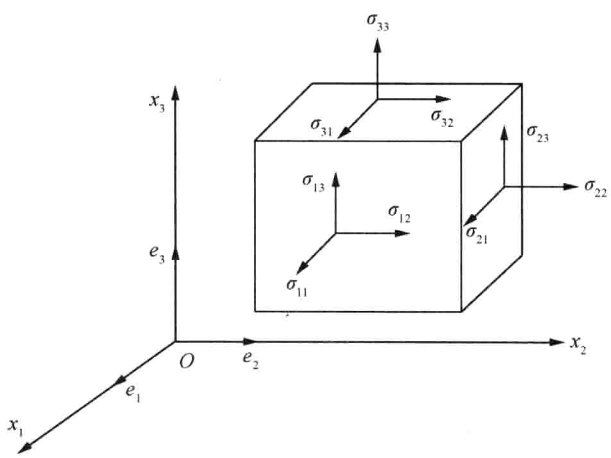


图 2.1 微元体

下面对微元体进行受力分析，在以上基本假设的基础上，从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发，可以建立位移、应力和应变等未知量所满足的弹性力学的基本方程和相应的边界条件，以下是弹性力学的基本方程。

1. 平衡微分方程

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0 \tag{2.1.1}$$

式中，$\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$为应力张量，下标“,”表示求导，ρ为弹性体质量密度，$f_i(i=1,2,3)$是给定的体力。

2. 位移与应变之间的关系—几何方程

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.1.2}$$

式中，$\varepsilon_{ij}(i,j=1,2,3)$和$u_i(i,j=1,2,3)$分别表示应变分量和位移。

应变协调方程

$$\varepsilon_{ij,kl}e_{ikm}e_{jln} = 0 \tag{2.1.3}$$

3. 应力与应变关系—广义 Hooke 定律

(1)用应力表示应变的关系式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \tag{2.1.4a}$$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{kk} \tag{2.1.4b}$$

式中，E和ν分别为弹性模量和 Poisson 比，δ_{ij}为单位脉冲函数，可以表示为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.1.5}$$

上式即克罗内克(Kronecker)符号的定义式。

(2)用应变表示应力的关系式

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2.1.6a}$$

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{kk} \tag{2.1.6b}$$

式中，λ和μ是 Lame 系数。

4. 边界条件

若物体表面处面力已知，则有

$$\overline{X}_i = \sigma_{ij}n_j \tag{2.1.7}$$

若物体表面处位移已知，则有

$$u_i = \overline{u}_i \tag{2.1.8}$$

式(2.1.7)和式(2.1.8)分别是弹性力学的基本方程和边界条件。

平衡方程、几何方程和物理方程(广义 Hooke 定律)共计 15 个方程，其中包含位移、应力和应变等共计 15 个未知量，如配以给定的边界条件，就可以求得相应的位移分量、应力分量和应变分量。实际上是在给定的边界条件下求解偏微分方程组，称为偏微分方程组的边值问题。弹性力学按题设条件不同，分三类边值问题。

第一类边值问题：已知作用在弹性体内的体力$f_i(i=1,2,3)$，及其表面处的面力$\overline{X}_v$、$\overline{Y}_v$和$\overline{Z}_v$，求平衡状态下弹性体内各点的应力分量和位移分量，此时边界条件取式(2.1.7)的形式。

第二类边值问题：已知作用在弹性体的体力$f_i(i=1,2,3)$，及其表面处的位移$\overline{u}$、$\overline{v}$和$\overline{w}$，求平衡状态下弹性体内各点的应力分量和位移分量，此时边界条件取式(2.1.8)的形式。

第三类边值问题：已知作用在弹性体内的体力$f_i(i=1,2,3)$，在物体表面处，一部分上的面力分量是已知的，而另一部分上位移是已知的，求平衡状态下弹性体内各点的应力分量和位