21世纪高等学校规划教材

# 概率论与数理统计
## ——实训教程

纪楠 等 编著

清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材

# 概率论与数理统计
## ——实训教程

纪楠　袁书娟　杨亚锋　编著

清华大学出版社

## 内容简介

《概率论与数理统计实训教程》与《概率论与数理统计基础教程》互为姐妹篇。

《概率论与数理统计基础教程》是课内“学数学”的理论教学篇，《概率论与数理统计实训教程》是课外“用数学”的实训教学篇。实训教程针对基础教程中的章节内容相应地给出了知识网络图、精品课堂、达标实训、拓展实训、应用实训及数学实验6个版块的补充和拓展。本书是《概率论与数理统计基础教程》的拓展，两个教程内容协调一致，配合使用可实现课上与课下、课内与课外的相辅相成。

本书内容丰富、逻辑清晰、通俗易懂，便于读者自学，可作为高等院校工学、经济学等各专业的辅助教材，也可作为报考工科研究生的参考书，并可供工程技术人员参考。



**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计——实训教程/纪楠等编著. —北京：清华大学出版社，2014
(21世纪高等学校规划教材)
ISBN 978-7-302-37071-0

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①纪…　Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材
Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第146038号

**责任编辑**：魏江江　薛　阳
**封面设计**：常雪影
**责任校对**：梁　毅
**责任印制**：杨　艳

**出版发行**：清华大学出版社
**网　　址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质 量 反 馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**课 件 下 载**：http://www.tup.com.cn，010-62795954
**印 装 者**：北京鑫海金澳胶印有限公司
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：185mm×260mm　　**印　　张**：22.25　　**字　　数**：553千字
**版　　次**：2014年8月第1版　　**印　　次**：2014年8月第1次印刷
**印　　数**：1～3500
**定　　价**：45.00元

产品编号：059253-01

# 本书编委会

主　任：吴印林

副主任：屈　滨　刘春凤

编　委：肖继先　何亚丽　杨爱民　闫　焱

# FOREWORD 前言

数学不仅是一些知识，也是一种素质，即数学素质；数学不仅是一种工具，也是一种思维，即理性思维；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即数学文化。如今，人类已进入信息时代，数学无声无息地走进了人们的生活，引领着科技的发展，把握着社会的命脉，几乎所有的工作都与数学相关，追求科学的、可持续发展的工作目标，越来越多地需要数学的描述，需要使用数学工具进行定量分析，可以说信息时代本质上是数学时代，信息技术本质上是数字技术，使用数学的程度甚至成为衡量国家科学进步的主要标志。大学数学课程因其在培养大学生理性思维、计算能力、创新意识等方面具有不可替代的作用，而成为大学课程中最重要的公共必修课，因此学好数学既是学者进取之道，也是人生智慧之举。

在我国从精英教育到大众化教育的转型过程中，高等教育发生了一系列的变化，伴随着变化也产生了诸多前所未有的问题。几十年，甚至上百年一贯制大学数学的教育问题首当其冲受到影响。尽管大学数学教学内容和课程体系改革方兴未艾，面向重点大学的具有新思路且含有数学实验的新教材陆续出现，对数学教学改革起到了推动和引领作用。然而对于普通院校，尤其是独立学院，由于缺乏与本校人才培养目标高度适应的新教材，选用教材时多倾向于与重点大学保持一致，培养目标及学生的差异使普通院校呈现传授与接受的“脱节”，教师教得辛苦，学生学得艰难，有相当比例的学生“学不会，用不了”，教学效果事倍功半。

面对当前普通高校的大学数学教育，笔者认为张景中院士提出的教育数学的观点颇有启发意义。学数学好比吃核桃，核桃仁美味而富有营养，但要完整地砸开吃到它却非易事，“数学教育要研究的是如何砸核桃吃核桃，教育数学则是要研究改良核桃的品种，让核桃更美味更营养，更容易砸开吃净。”为此，我们组织多年从事概率论与数理统计教学的一线教师，遵循教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学的基本要求”，立足普通高等院校应用型人才培养目标的需要，融入张景中院士“想的是教育，做的是数学”的思想，编写了概率论与数理统计系列教材。本套教材旨在让更多的学子在轻松学习概率论与数理统计知识的同时，掌握数学本质，培养数学素质，提高数学能力，感受数学魅力，自觉走进数学，自由享用数学。

概率论与数理统计教材包括《概率论与数理统计基础教程》和《概率论与数理统计实训教程》(以下分别简称《基础教程》和《实训教程》)，本套教材有以下三个显著特点：

(1) 调整结构，增加实训。新编《概率论与数理统计基础教程》包括概率论的基本概

念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征与极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。《基础教程》是课内“学数学”的理论教学篇,《实训教程》是课外“用数学”的实训教学篇。

(2) 分层布局,梯次渐进。考虑到不同专业的学生对数学需求的差异,《实训教程》由以下6个版块组成:知识网络图、精品课堂、达标实训、拓展实训、应用实训和数学实验,知识网络图给读者全面再现了本章的知识结构和概念间的相互关系,使读者能够更好地把握全章的知识脉络;精品课堂以还原课堂的形式呈现给读者全章的主要精彩内容,使读者能够以全新的视角解读该章的内容;达标实训作为基础教材课后习题的详细解答,使读者可以解决其课后习题中的问题;拓展实训给出该章在考研数学中出现的题目,使读者的学习提升到研究生考试的水平;应用实训针对该章在实际问题中的应用给出精彩的应用案例,使读者感受概率统计的广泛应用,提高读者解决实际问题的能力;数学实验介绍 Mathematica 统计工具箱中部分函数及应用程序,以提高读者概率统计的实践能力。配合基础教材使用真正实现课上与课下、课内与课外的相辅相成。

(3) 融入实验,学以致用。长期以来,数学给一些人们的印象就是凭大脑、纸、笔进行推理、证明和计算,抽象的推理和繁琐的计算使一些学生对数学兴趣索然。计算机科技的迅速发展,优秀的数学软件为用数学方法解决复杂的实际问题提供了良好的平台,使数学教学如有神助,过去学生由于计算技术的局限只能“望洋兴叹”的问题,如今可以通过数学实验轻松解决,数学实验使数学计算变得轻松,数学形象变得直观,数学奥妙变得美丽,数学推理变得自然。引数学实验入大学数学教学是我们近十年的举措,本套教材嵌入的概率统计实验在实训教程中,这一部分的教与学教师可酌情安排。

本书由纪楠、袁书娟、杨亚锋编著,全书由纪楠总体策划,袁书娟、杨亚锋负责组织,具体编写责任人为:袁书娟(第1章、第6章、第8章),崔玉环(第2章),纪楠(第3章),杨亚锋(第4章),李冬梅(第5章),刘晓红(第7章)。教材融合了河北联合大学编写团队多年的教学经验,注重直观简约,对繁琐的理论推导进行了适度的约简,对数学的理论和概念,尽可能地通过几何直观地解释其抽象和深刻的内涵,内容由浅入深,层层渐进,通俗易懂,既宜于教师因材分层讲授,也便于读者循序渐进自学。

本书得以出版,要特别感谢河北联合大学教材编委会的指导和支持以及清华大学出版社的精心设计和悉心编辑。

由于本书对概率论与数理统计内容调整幅度较大,前后呼应未必贴切,章节衔接未必自然,书中不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2013年冬

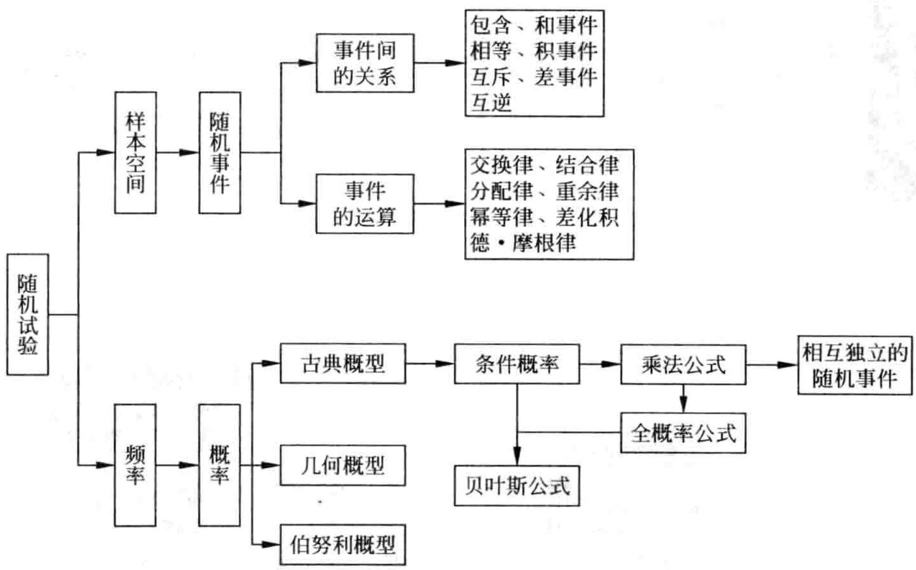
CONTENTS

# 目录

# 第1章

# 概率论的基本概念

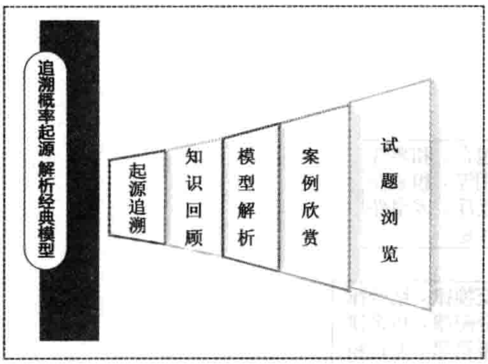
## 1.1 知识网络图

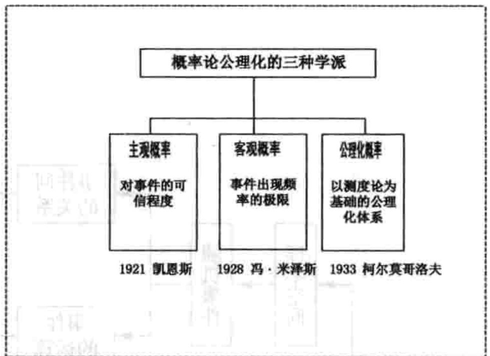


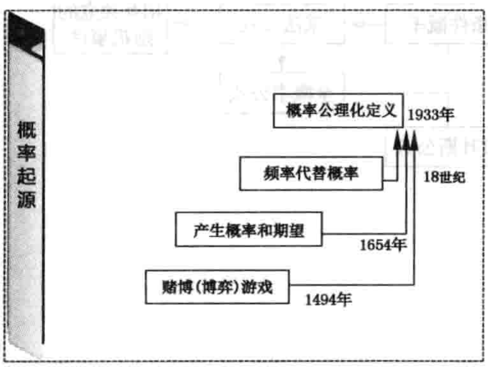
## 1.2 精品课堂

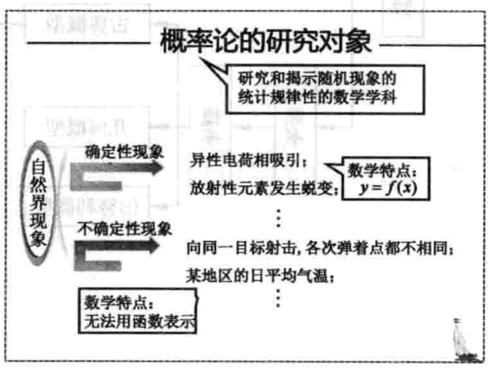

精品课堂
追溯概率起源，解析经典模型


拉普拉斯
雅各布·伯努利
切比雪夫
贝叶斯
李雅普诺夫
棣莫弗
概率论中做出重要贡献的数学家
高斯
泊松


追溯概率起源 解析经典模型
起源追溯
知识回顾
模型解析
案例欣赏
试题浏览


概率论公理化的三种学派
主观概率
对事件的可信程度
客观概率
事件出现频率的极限
公理化概率
以测度论为基础的公理化体系
1921 凯恩斯
1928 冯·米泽斯
1933 柯尔莫哥洛夫


概率起源
概率公理化定义
1933年
频率代替概率
18世纪
产生概率和期望
1654年
赌博(博弈)游戏
1494年


概率论的研究对象
研究和揭示随机现象的统计规律性的数学学科
自然界现象
确定性现象
异性电荷相吸引；
放射性元素发生蜕变；
数学特点：$y=f(x)$
不确定性现象
向同一目标射击，各次弹着点都不相同；
某地区的日平均气温；
数学特点：无法用函数表示

## 概率论的应用


工农业生产


气象、水文、地震预报


精度评估

生产自动化控制
优化试验方案


社会、经济、医学、生物

## 事件的关系

| 集合的关系 | 事件的关系 |
|---|---|
| $\omega \in A$ | 事件 $A$ 发生 |
| $A \subset B$ | 事件 $A$ 发生则事件 $B$ 必发生 |
| $A \cup B$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生 |
| $\bigcup_i A_i$ | 事件 $A_i$ 中至少有一个发生 |
| $A \cap B(AB)$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生 |
| $\bigcap_i A_i$ | 所有事件 $A_i$ 都同时发生 |
| $A\|B(A-B)$ | 事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生 |

## 近百年世界重大地震

"重大"的标准 ① 震级 7 级左右 ② 死亡 5000人以上

| 时 间 | 地 点 | 级别 | 死亡人数/万 |
|---|---|---|---|
| 1905.04.04 | 克什米尔地区 | 8.0 | 88 |
| 1906.08.17 | 智利瓦尔帕莱索港地区 | 8.4 | 2 |
| 1920.12.16 | 中国甘肃 | 8.6 | 10 |
| 1923.09.01 | 日本关东地区 | 7.9 | 14.2 |
| 1935.05.30 | 巴基斯坦基达地区 | 7.5 | 5 |
| 1948.06.28 | 日本福井地区 | 7.3 | 0.51 |
| 1970.01.05 | 中国云南 | 7.7 | 1 |

## 事件的运算

设 $A,B,C$ 为事件，则有：

交换律 $A\cup B=B\cup A; A\cap B=B\cap A$

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C)$

德•摩根律 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

| 时 间 | 地 点 | 级别 | 死亡人数/万 |
|---|---|---|---|
| 1976.07.28 | 中国唐山 | 7.8 | 24.2 |
| 1978.09.16 | 伊朗塔巴斯镇地区 | 7.9 | 1.5 |
| 1995.01.17 | 日本阪神工业区 | 7.2 | 0.6 |
| 1999.08.17 | 土耳其伊兹米特市 | 7.4 | 1.7 |
| 2003.12.26 | 伊朗克尔曼省 | 6.8 | 3 |
| 2004.12.26 | 印尼苏门答腊岛 | 9.0 | 15 |
| 2008.05.12 | 中国四川汶川 | 8.0 | 9 |
| 2010.04.14 | 中国青海玉树 | 7.1 | 0.27 |
| 2010.01.12 | 海地 | 7.0 | 20 |
| 2011.03.11 | 日本本州岛近海 | 9.0 | 1.5 |

世界每年发生大地震概率约为14%。

**例1** 设 $A,B,C$ 是某个随机现象的三个事件，则

（1）事件 $A$ 与 $B$ 发生，但 $C$ 不发生可表示为 $AB\bar{C}$。

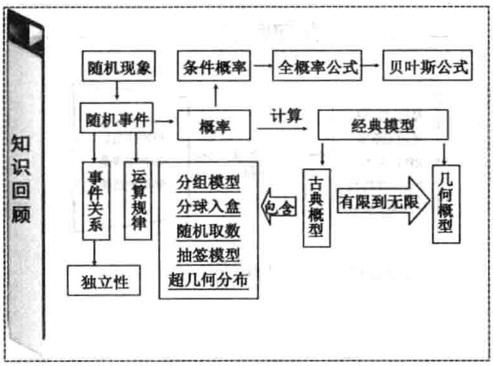
（2）事件 $A$、$B$、$C$ 中至少有一个发生可表示为 $A\cup B\cup C$。

（3）事件 $A$、$B$、$C$ 中至少有两个发生可表示为 $AB\cup AC\cup BC$。

（4）事件 $A$、$B$、$C$ 中恰好有两个发生可表示为

$$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$$

## 知识回顾




## 概率的性质

**性质1** $P(\phi)=0$

**性质2** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容事件，

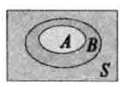
$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

上式称为概率的有限可加性。

**性质3** 设 $A$、$B$ 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

$$P(B)\geqslant P(A)$$

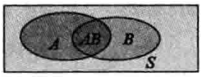


**性质4** 对于任一事件$A$, $p(A)\leq 1$。

**性质5** 对于任一事件$A$，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

**性质6** 对于任意两个事件 $A$、$B$，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad \text{(加法公式)}$$




**例2** 事件$A$、$B$为对立事件，则（ B ）不成立。

A. $P(AB)=0$　　B. $P(\overline{A}\overline{B})=0$

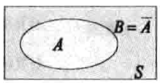
C. $P(A\cup B)=1$　　D. $P(\overline{A\cup B})=1$

【解析】 $P(A\cup B)=P(S)=1$

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\varnothing)=0$

$P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\overline{B})=0$




**例3** 对于任意两个事件$A$、$B$，有$P(A-B)=$( C )。

A. $P(A)-P(B)$　　B. $P(A)-P(B)+P(AB)$

C. $P(A)-P(AB)$　　D. $P(A)+P(AB)$

【解析】 对于任意两个事件$A$、$B$，都有

$$A-B=A\overline{B}=A-AB$$

则 $P(A-B)=P(A\overline{B})$

$=P(A-AB)$

$=P(A)-P(AB)$

**例4** 设 $P(A)=a, p(B)=b, p(A+B)=c$,

$P(A\overline{B})$ 为（ C ）。

A. $a(1-b)$　B. $a-b$　C. $c-b$　D. $a(1-c)$

【解析】 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=a+b-c$

$P(A\overline{B})=a-(a+b-c)=c-b$

**例5** 已知事件$A$与$B$的概率都是 0.5，则下列结论肯定正确的是（D）。

A. $P(A\cup B)=1$　B. $P(\overline{A}\overline{B})=0.25$

C. $P(AB)=0.5$　D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

【解析】 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$\overline{A}\overline{B}=\overline{A\cup B}$, $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$

因此 $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)$

于是有 $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

所以 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

**例6** 设 $A$、$B$为事件，$P(A)=0.6$, $P(B)=0.7$,

求$P(AB)$的最大值与最小值。

【解析】 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

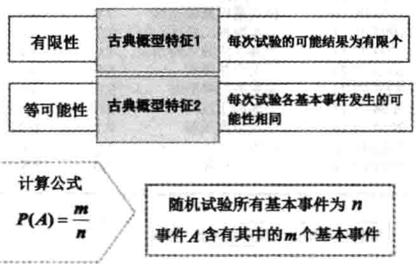
$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geq P(A)+P(B)-1=0.3$

所以最小值为0.3。

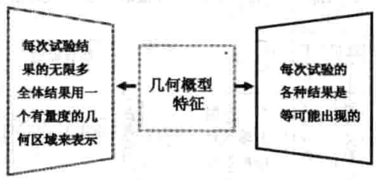
由 $AB\subset A$得 $P(AB)\leq P(A)=0.6$

所以最大值为0.6。

## 古典概型




## 几何概型




计算公式 $P(A)=\dfrac{A}{\Omega}$

**注 意** 几何概型的解题步骤

(1) 根据问题选取合适的参数；

(2) 用参数表示出样本空间和所求事件的取值范围；

(3) 建立适当的坐标系；

(4) 在坐标系上找出样本空间和所求事件对应的几何区域，根据几何概率公式求解。

## 抽签模型

◆ 袋中有$a$只白球，$b$只红球，它们除颜色外无差别，现有$a+b$个人无放回地去摸球，求第$k$个人取到白球的概率。

【解】任取一球，共有$(a+b)!$种取法，第$k$个人抽到白球，可以是$a$只白球中的任意一只，有$a$种取法，其余的共有$(a+b-1)!$种取法。

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

## 条件概率及三大公式

条件概率公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

乘法公式 $P(AB)=P(B|A)P(A)$

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

**注 意**

本题结果告诉我们每个人取到白球的概率与抽的先后次序无关，大家机会相同，所以进行分组的时候采用抽签或抓阄的方法是公平的。

$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)}\boxed{=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$ 全概率公式

$$P(B_k|A)=\boxed{\frac{P(AB_k)}{P(A)}}=\boxed{\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}}$$ 贝叶斯公式

## 超几何分布模型

◆ 一批产品共有$N$个，其中$M$个不合格品，$N-M$个合格品，从中抽取$n$个，求取出的$n$个产品中有$m$个不合格品的概率。

【解】 $P(A)=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

**经典模型解析**

古典概型：

- 抽签模型
- 超几何分布模型
- 分球入盒模型
- 随机取数模型
- 分组模型
- 真假钞票模型
- 购票模型

几何模型：

- 等车模型
- 会面模型
- 三角形构成模型

## 分球入盒模型

◆ 将$n$只球随机地放入$N(N>n)$个盒子中，试求

(1) 指定的$n$个盒子中各有一球的概率；

(2) 每个盒子至多有一个球的概率。

（设盒子的容量不限。）

【解】(1) 每个球都可以放入$N$个盒子中的任一个中，故共有

$N\times N\times\cdots\times N=N^n$ 种不同的放法。

指定的$n$个盒子中各有一球的分配方法相当于把$n$个球做一个全排列，所以事件包含的基本事件数为

$n!$，于是$P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$。

(2) 每个盒子至多放一只球共有$N\times(N-1)\times\cdots\times[N-(n-1)]$种放法，则

$$P=\frac{N\times(N-1)\times\cdots\times[N-(n-1)]}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}$$

（3）1恰好出现2次，这2次可以是5次中的任意2次，

有 $C_5^2$ 种可能，其他3次中，每次只能取剩下的8个数中的某一个，共有 $8^3$ 种取法，$P(A_3)=\dfrac{8^3C_5^2}{9^5}$。

（4）5个数字看作5个位置，先在5个位置中任意选一个，

放上那个单个的数字有$C_5^1C_9^1$。

在其余的4个位置任意取出两个有$C_4^2$种方法，

然后从其他的8个数中，任意取出2个数有$C_8^2$ 种方法。

推广 “分球入盒模型”可应用于很多类似场合。

“球”可视为：人，人，信，钥匙，男舞伴，⋮

“盒子”视为：房子，生日，信封，门锁，女舞伴，⋮

在刚才取出的两个位置上放较小的一个数，在另两个位置上放较大的一个数，则

$$P(A_5)=\frac{C_5^1C_9^1C_4^2C_8^2}{9^5}$$

## 随机取数模型

◆ 从$1,2,\cdots,9$中任取一个数，取后放回，先后取出5个数，求下列事件的概率。

（1）最后取出的数字是奇数；

（2）5个数字全不相同；

（3）1恰好出现2次；

（4）恰好出现不同的2对数字。


## 分组模型

◆ 将15名飞行员随机地平均分配到三个机场实习，这15名飞行员中有3名是优秀飞行员，问：(1)每个飞机场各分配一名优秀飞行员的概率是多少？(2)3名优秀飞行员分配到同一个机场的概率是多少？

【解】（1）最后取出的数字可能是9个数字中的任何一个，共9种可能结果，而最后取出的数字是奇数，有5种可能，所以$P(A_1)=\dfrac{5}{9}$。

（2）5个数字全不同的每一种取法相当于从9个数字中任取5个数的一个选排列，所以包含的基本事件数为$A_9^5$，故$P(A_2)=\dfrac{A_9^5}{9^5}$。

【解】 15名飞行员分配到三个机场中的分法总数为

$$C_{15}^5\cdot C_{10}^5\cdot C_5^5=\frac{15!}{5!\times10!}\times\frac{10!}{5!\times5!}\times\frac{5!}{5!\times0!}=\frac{15!}{5!\times5!\times5!}$$

每一种分配法为一基本事件。

(1)将3名优秀飞行员分配到三个机场，使每个机场都有一名优秀飞行员的分法共3!种。

对于每一种分法，其余12名飞行员平均分配到3个机场的分法共有 12 ! / (4!×4!×4!) 种，

因此，每个机场各分配到一名优秀飞行员的分法共有 (3!×12! ) / (4!×4!×4!) 种。于是

所求概率为

$$P_1=\frac{3!\times12!}{4!\times4!\times4!}\Big/\frac{15!}{5!\times5!\times5!}=\frac{25}{91}=0.2747$$

(2)　将3名优秀飞行员分配在同一个机场的分法共有3种。对于每一种分法，其余12名飞行员的分法(一个飞机场2名，另两个飞机场各5名)，共有12! /(2!×5!×5! )种。因此3名优秀飞行员分配在同一飞机场的分法共有 (3×12! ) / (2!×5!×5! )种，

于是，所求概率为

$$P_2=\frac{3\times12!}{2!\times5!\times5!}\Big/\frac{15!}{5!\times5!\times5!}=\frac{6}{91}=0.0659$$

## 真假钞票模型

◆ 从混有5张假钞的20张百元钞票中任意抽出2张，将其中1张放到验钞机上检验发现是假钞，求2张都是假钞的概率。

【解】令$A$表示“抽到2 张都是假钞”，

$B$表示“2 张中至少有1张假钞”，

则所求概率为 $P(A|B)$，而不是 $P(A)$，

$$P(AB)=P(A)=C_5^2/C_{20}^2$$

$$P(B)=(C_5^2+C_5^1C_{15}^1)/C_{20}^2$$

所以 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$$=\frac{C_5^2}{(C_{20}^2+C_5^1C_{15}^1)}$$

$$=\frac{10}{85}=0.118$$

## 购票模型

◆某人欲从甲地到丙地，途经乙地。在甲地每天有30个人买票去丙地，但只有20张去丙地的票；已知在甲地没有买到票的乘客中有70%选择去乙地买票，乙地每天有200张去丙地的票，有300人要买票到丙地，求该乘客在甲地没有买到票，到乙地又没有买到票的概率。

【解】　设$A$事件表示在甲地没有买到车票，

$B$事件表示从甲地到乙地去，

$C$事件表示在乙地没有买到车票，

由已知得　$P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B|A)=\dfrac{7}{10}$

代入乘法公式得

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\times\frac{100+10\times0.7}{300+10\times0.7}$$

$$=\frac{7}{30}\times\frac{107}{307}$$

**思　考**

17世纪，法国的 Chevalies De Mere注意到在赌博中一对骰子抛25次，把赌注押到 “至少出现一次双六” 比把赌注押到“完全不出现双六”有利，但他本人找不出原因。后来请当时著名的法国数学家帕斯卡(Pascal)才解决了这一问题。

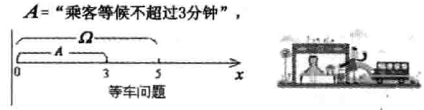
这问题是如何解决的呢?

## 等车模型

◆ 公共汽车站每隔5分钟有一辆汽车通过，乘客到达汽车站的时刻是等可能的，求乘客等候不超过3分钟的概率。

【解】设乘客提前的时间为$x$分钟，

$A$=“乘客等候不超过3分钟”，




等车问题

$\Omega=\{x|0<x<5\}$　　$A=\{x|0<x<3\}$

$P(A)=\dfrac{3}{5}$

## 会面模型

◆ 两个大学生约定周末12点到13点之间在南湖公园门口见面先到者等待20分钟后离去，假定他俩在12点到13点之间到达的时刻是任意的，求他们能相见的概率。

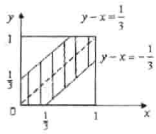
【解】设这两个人到达公园门口的时刻分别为12点 $x, y$ 小时

$A$ =“他俩能相见”

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x,y<1\}$$

$$A=\left\{(x,y)\mid 0<x,y<1, |x-y|<\frac{1}{3}\right\}$$

$$P(A)=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1}=\frac{5}{9}$$



会面问题

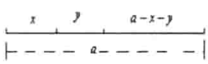
**注　意**

求几何概率的关键是对样本空间和所求事件用图形描述清楚（一般用平面或空间图形），然后计算出相关图形的量度（一般为面积或体积）。

## 三角形构成模型

◆ 在长度为 $a$ 的线段内任取两点，将其分为三段，求它们可以构成一个三角形的概率。

【解析】令被截成的三段线段长度分别为 $x, y, a-x-y$,

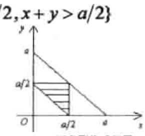


三角形构成问题

设 $A$ =“截成的三线段能构成三角形”，则

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<a, 0<y<a, 0<a-x-y<a\}$$
$$=\{(x,y)\mid 0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}$$
$$A=\{(x,y)\mid 0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a, x+y>a-x-y, a-x>x, a-y>y\}$$
$$=\{(x,y)\mid x<a/2, y<a/2, x+y>a/2\}$$

所以 $P(A)=\frac{1}{4}$


三角形构成问题

案例欣赏

## 敏感性问题调查

中学生阅读黄色书刊和观看黄色影像会严重影响身心健康的发展。但这些都是避着老师和家长进行的，属个人行为。现在要设计一个调查方案，从调查数据中估计学生阅读黄色书刊和观看黄色影像的比例 $P$。

◆被调查者独自一个人回答问题。

◆被调查者从一个罐子中随机抽一个球，看过颜色放回。

•抽到红球 ······ 回答问题2

•抽到白球 ······ 回答问题1

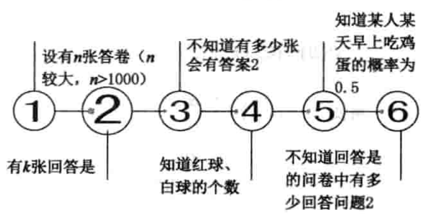
无论回答问题1或问题2，只需在下面答卷上认可的方框内打勾，然后把答案放入一只密封的投票箱内即可。

被调查者只需回答以下两个问题，只需回答“是”或“否”。

| 问题1 | 问题2 |
|---|---|
| 你今天早上吃鸡蛋了吗？ | 你看过黄色书籍或影像吗？ |

为了消除被调查者的顾虑，确信他（她）参加这次调查不会泄露个人秘密，在操作上有以下关键点：

如何分析调查的结果？




$P(\text{是})=\frac{k}{n}$，$P(\text{红球})=\pi$，$P(\text{是}\mid\text{白球})=0.5$

现在就要从这4个数据 $(n,k,0.5,\pi)$ 去求出 $P$。

所以，由全概率公式知

$P$(是)=$P$(白球)$P$(是|白球)+$P$(红球)$P$(是|红球)

$$\frac{k}{n}=(1-\pi)\times 0.5+\pi\times P$$

$$\Rightarrow P=\frac{k/n-0.5(1-\pi)}{\pi}$$

因为我们用频率代替了概率，所以从上式得出的是估计值。

假如，在一次实际调查中，罐中放有红球30个，白球20个，则罐中蓝球的比例为0.6，调查结束后共收到1583张有效答卷，其中有389张回答“是”，

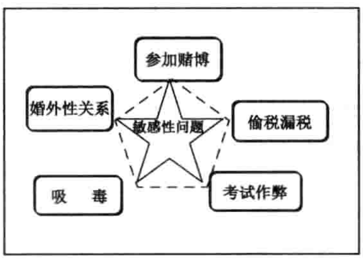
由此可计算出 $P=\dfrac{k/n-0.5(1-\pi)}{\pi}$

$$=\frac{389/1583-0.5\times 0.4}{0.6}$$

$$=0.0762$$

这表明：约有7.62%的学生看过黄色书刊或黄色影像。

**推 广** 上述敏感性问题的调查是社会调查的一类




## 是否带伞问题

已知某城市下雨的时间占一半，天气预报的准确率为0.9，某人每天上班为下雨烦恼，于是预报下雨他就带雨伞，即使预报无雨，他也有一半时间带雨伞，求

(1) 已知他没带伞，却遇到下雨的概率；

(2) 已知他带伞，但天不下雨的概率。

【解】设$A$表示天下雨，$B$表示预报下雨，$C$表示没带伞。

$P(A)=P(\overline{A})=0.5$ $\quad P(B|A)=0.9$ $\quad P(\overline{B}|\overline{A})=0.9$

$P(B|\overline{A})=0.1$ $\quad P(\overline{B}|A)=0.1$ $\quad P(\overline{C}|\overline{B}\overline{A})=0.5$

$P(\overline{C}|\overline{B}A)=0.5$ $\quad P(\overline{C}|BA)=1$ $\quad P(\overline{C}|B\overline{A})=1$

(1) $P(C)=P(A)P(C|A)+P(\overline{A})P(C|\overline{A})$ $\qquad P(C|A)=1-P(\overline{C}|A)$

$$P(\overline{C}|A)=P(\overline{C}|AB)P(B|A)+P(\overline{C}|A\overline{B})P(\overline{B}|A)$$

$$=1\times 0.9+0.1\times 0.5=0.95$$

$$P(C|A)=1-P(\overline{C}|A)=0.05$$

$$P(\overline{C}|\overline{A})=P(\overline{C}|\overline{A}\overline{B})P(\overline{B}|\overline{A})+P(\overline{C}|\overline{A}B)P(B|\overline{A})$$

$$=0.5\times 0.9+1\times 0.1=0.55$$

$$P(C|\overline{A})=1-0.55=0.45$$

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(\overline{A})P(C|\overline{A})=0.5\times 0.05+0.5\times 0.45$$

$$P(A|C)=\frac{P(A)P(C|A)}{P(C)}=\frac{1}{10}$$

(2) $$P(\overline{A}|\overline{C})=\frac{P(\overline{A})P(\overline{C}|\overline{A})}{P(\overline{C})}$$

$$P(\overline{C}|\overline{A})=P(\overline{C}|\overline{A}\overline{B})P(\overline{B}|\overline{A})+P(\overline{C}|\overline{A}B)P(B|\overline{A})$$

$$=0.5\times 0.9+1\times 0.1=0.55$$

$$P(A)=P(\overline{A})=0.5$$

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(\overline{A})P(C|\overline{A})=0.5\times 0.05+0.5\times 0.45$$

$$P(\overline{A}|\overline{C})=\frac{P(\overline{A})P(\overline{C}|\overline{A})}{P(\overline{C})}=\frac{0.5\times 0.55}{1-0.25}=\frac{11}{30}$$

**思 考**

某市进行艺术体操赛，需设立两个裁判组，甲组3名乙组1名，但组委会只召集到3名裁判，由于临近比赛，便决定调一名不懂行的人参加甲组工作，其中，裁判独立地以概率 $P$ 做出正确裁定，而第三人以掷硬币决定，最后根据多数人的意见决定。乙组由1个人组成，他以概率 $P$ 做出正确裁定。

问哪一组做出正确裁定的概率大