高等代数在初等数学中的应用

● 杨家骐　王卿文　主编

● 李师正　主审

山东教育出版社

高等代数在初等数学中的应用

主　编：杨家骐　王卿文
副主编：王文省　庄树贞　焦争鸣
　　　　奚传志　赵　军
主　审：李师正

山东教育出版社
1992年·济南

鲁新登字2号

高等代数在初等数学中的应用

主　编：杨家骐　王卿文

副主编：王文省　庄树贞　焦争鸣

奚传志　赵　军

主　审：李师正

*

山东教育出版社出版发行

（济南经九路胜利大街）

山东寿光县教育印刷厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 14.125印张 352千字

1992年12月第1版　1992年12月第1次印刷

印数1—5000

ISBN 7—5328—1531—5/G.1313

定价：6.50元

序

数学的许多分支日新月异地发展着，然而各分支的联系并未引起人们的足够重视。一个数学分支中的问题，往往不能单纯地依靠这一分支本身获得解决，而常常需要吸取其它数学分支，甚至非数学的其他科学的观点、理论与方法才能得到不断的完善。如“三等分任意角”这一初等几何的著名难题，只有用近世代数的知识才能否定它的可能性，许多不了解此道理的人至今还在徒劳地在这个问题上浪费精力。

初等数学是数学的最古老最基本的领域，也是中学阶段学生学习的重要内容，而且在生产实践中也有着最广泛的应用。许多高等学校（特别是师范院校）数学系的学生及部分中学数学教师往往把高等数学与初等数学分割开来，一方面认为高等数学对初等数学没有用武之地，因而对高等数学的学习与研究重视不足；另一方面又对初等数学的探讨常常就事论事，观点不高。本书正是为解决上述问题而编写的。

本书选题十分新颖，向读者提出了一个新的思路，即用高等代数的方法解决初等数学问题。本书不仅会给数学专业的大学生及高等代数的教师以新的启示，为中学数学教师也提供了一本别开生面的参考书。

本书包括多项式代数、矩阵、二次型、线性空间及欧氏空间等方面在初等数学中的一些有趣的应用，并编写了大量例题、习题。本书语言生动，妙趣横生，逻辑性强，读者从中必将得到收

获与启迪。相信本书的出版必将吸引更多的人们从事高等数学在初等数学中的应用研究，取得更加可喜的成果与进展。

李师正

1992年秋

目　录

序……………………………………………………………………（ 1 ）
第一章　多项式代数在初等数学中的应用………………（ 1 ）
§1.1　多项式恒等定理的应用……………………………（ 1 ）
§1.2　带余除法的应用………………………………………（ 19 ）
§1.3　辗转相除法的应用……………………………………（ 26 ）
§1.4　综合除法的应用………………………………………（ 41 ）
§1.5　代数基本定理的应用…………………………………（ 53 ）
§1.6　“超等”定理的应用……………………………………（ 59 ）
§1.7　多项式最大公因式及重因式的应用…………………（ 62 ）
§1.8　因式定理的应用………………………………………（ 67 ）
§1.9　牛顿试除法等定理的应用……………………………（ 69 ）
§1.10　Eisenstein 判别法的应用…………………………（ 71 ）
§1.11　Lagrange 插值公式的应用…………………………（ 74 ）
§1.12　Vieta 定理的应用……………………………………（ 93 ）
§1.13　Cardan 公式的应用…………………………………（ 132 ）
§1.14　Newton 公式的应用…………………………………（ 134 ）
§1.15　结式的应用……………………………………………（ 145 ）
§1.16　对称多项式的应用……………………………………（ 153 ）
§1.17　综合运用多项式理论分解因式………………………（ 163 ）
第二章　行列式、线性方程组在初等数学中的应用……（ 182 ）
§2.1　行列式性质的应用……………………………………（ 182 ）
§2.2　Cramer 法则的应用……………………………………（ 231 ）

§2.3　Vandermonde 行列式的应用…… ………(241)
§2.4　Laplace 展开定理的应用……………… ……(255)
§2.5　Cauchy—Binet 公式的应用……… … …(259)
§2.6　齐次线性方程组有非零解的充要条件的
应用…………………………………………(261)
§2.7　用线性方程组理论解应用题…… … ………(275)
第三章　矩阵论在初等数学中的应用……………… …(278)
§3.1　矩阵及其运算法则的应用……………… … …(278)
§3.2　矩阵的初等变换的应用…………… … ……(298)
§3.3　矩阵的特征值与特征向量的应用…… … …(308)
§3.4　矩阵的性质的应用…………………… … ……(329)
§3.5　多项式的友阵的应用………… … …………(344)
§3.6　用求和矩阵求$\sum_{k=1}^{n}k^m$ ……………………………(347)
第四章　线性空间、欧氏空间与二次型
在初等数学中的应用…………………………(351)
§4.1　线性空间的应用…………………………… …(351)
§4.2　内积性质的应用………………………… … …(357)
§4.3　二次型的应用……………………………… … …(382)
习题答案与提示…………………………………………(402)
主要参考文献……………………………………………(442)
后记…………………………………………………………(445)

第一章　多项式代数在初等数学中的应用

多项式代数是高等代数的重要组成部分，与初等数学有着密切的联系。因此，研究用多项式代数的知识和方法解决初等数学问题是很有意义的。

这一章主要论述多项式恒等定理；带余除法；辗转相除法；综合除法；代数基本定理；"超等"定理；多项式的最大公因式及重因式；因式定理；Newton 试除法；Eisenstein 判别法；Lagrange插值公式；Vieta定理；Cardan公式；Newton公式；结式及多元多项式等在初等数学中的具体应用。

§1.1　多项式恒等定理的应用

本节主要包括利用多项式恒等定理证明曲线系过定点及求某些曲线方程；确定一类不等式成立的条件；求自然数的方幂和与两个连续自然数积的方幂和；证明一类等式；证明一类定值问题的逆命题；证明多项式函数的一个性质以及解多项式函数方程。

定理1.1　设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$是数域F上的两个多项式，则$f(x)\equiv g(x)$的充要条件是$a_i=b_i$（$i=0,1,\cdots,n$）。

特别地，$f(x)\equiv 0$的充要条件是$a_i=0$（$i=0,1,\cdots,n$）。□

这就是多项式的恒等定理。

1．证明曲线系过定点及求某些曲线方程

关于曲线系过定点的证明，已有许多文献论及，但以下方法更为简便。

将曲线系方程按参数降幂整理成关于参数的恒等式，然后利用多项式的恒等定理，令各项系数为零得一方程组，解此方程组即得曲线系所过定点。

例1 设a为非负实数，证明曲线 $y=-ax^2-(6a-1)x+5a+1$ 总过两定点，并求出该两定点坐标。

证明： 将方程构成关于a的恒等式

$$(x^2+6x-5)a-(x-y+1)=0$$

对于非零实数a，上式恒成立，故由多项式的恒等定理（将a视为变元）得

$$\begin{cases} x^2+6x-5=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=-3+\sqrt{14} \\ y=-2+\sqrt{14} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-3-\sqrt{14} \\ y=-2-\sqrt{14} \end{cases}$

从而，所给曲线恒过定点 $(-3+\sqrt{14},\ -2+\sqrt{14})$ 和 $(-3-\sqrt{14},\ -2-\sqrt{14})$。

例2 无论实数k取何值，直线 $y=2kx+k^2$ 总与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 相切，求抛物线方程。

解： 将 $y=2kx+k^2$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 联立，得

$$ax^2+(b-2k)x+c-k^2=0$$

因直线与抛物线相切，故

$\triangle=(b-2k)^2-4a(c-k^2)=0$，即

$4(a+1)k^2-4bk+b^2-4ac=0$

因k为任意实数，故上式为关于k的恒等式，即此式不论k为何值总成立。由多项式的恒等定理得

$$\begin{cases} 4(a+1)=0 \\ 4b=0 \\ b^2-4ac=0 \end{cases}$$

解得$a=-1$，$b=0$，$c=0$。

故所求抛物线方程为$y^2=-x^2$。

2．确定一类严格不等式成立的条件

在高等数学中，用小正数 ε、δ可将极限定义得十分精确。在初等数学中，我们也可借助小正数，使一些难以处理的严格不等式转化为多项式的恒等变形，根据多项式的恒等定理，便可轻易地判断出不等式恒成立的条件。

例3 对任意的实数x，y，下面的不等式

$$x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b>0$$

恒成立，求常数a，b应满足的条件。

解：为使不等式恒大于0，须使

$$x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b$$

为一个实数式的平方加上一个小正数 ε。可令

$$x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b=(x+2y+m)^2+\varepsilon$$

$(m\in R)$，即

$$x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b$$
$$=x^2+4xy+4y^2+2mx+4my+m^2+\varepsilon$$

根据多项式恒等定理，有

$$\begin{cases} 10=2m \\ a=4m \\ b=m^2+\varepsilon \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} a=20 \\ b=25+\varepsilon \end{cases}$$

所以，当且仅当 $a=20$，且$b>25$时，题设不等式恒成立。

3．求自然数的方幂和与求两个连续自然数积的方幂和

自然数的方幂和与两个连续自然数积的方幂和可以转化为多项式。有以下定理：

定理1.2 m和n是两个任意的自然数，则 $\sum_{i=1}^{n} i^m$可表成一个关于n的$m+1$次多项式；$\sum_{i=1}^{n}[i(i+1)]^m$可表为一个关于n的$2m+1$次多项式。上述多项式的常数项皆为0。 □

例4 求 $\sum_{i=1}^{n} i^3$。

解： 由定理1.2知，$\sum_{i=1}^{n} i^3$可以表为n的4次多项式，故可设

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=a_0n^4+a_1n^3+a_2n^2+a_3n \qquad (1)$$

式中a_0，a_1，a_2，a_3为待定系数，n为任意正整数。

用$n-1$代替（1）式两边的n，得

$$1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3=a_0(n-1)^4+a_1(n-1)^3+a_2(n-1)^2+a_3(n-1) \qquad (2)$$

（1）－（2），得

$$n^3=a_0[n^4-(n-1)^4]+a_1[n^3-(n-1)^3]+a_2[n^2-(n-1)^2]+a_3$$

将右边展开，合并同次项，得

$$n^3=4a_0n^3+(-6a_0+3a_1)n^2+(4a_0-3a_1+2a_2)n+(-a_0+a_1-a_2+a_3)$$

等号两边都是n的多项式，又对n的无穷多个值成立，故由定理1.1知

$$\begin{cases} 4a_0=1 \\ -6a_0+3a_1=0 \\ 4a_0-3a_1+2a_2=0 \\ -a_0+a_1-a_2+a_3=0 \end{cases}$$

解得 $$\begin{cases} a_0=\frac{1}{4} \\ a_1=\frac{1}{2} \\ a_2=\frac{1}{4} \\ a_3=0 \end{cases}$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$.

例5 求 $\sum\limits_{i=1}^{n}[i(i+1)]^2$。

解：由定理1.2知，$\sum\limits_{i=1}^{n}[i(i+1)]^2$ 可表成一个关于n的5次多项式. 令

$$\sum_{i=1}^{n}[i(i+1)]^2=a_0n^5+a_1n^4+a_2n^3+a_3n^2+a_4n \quad (1)$$

以n－1代替（1）式中的n，得

$$\sum_{i=1}^{n-1}[i(i+1)]^2=a_0(n-1)^5+a_1(n-1)^4+a_2(n-1)^3+a_3(n-1)^2+a_4(n-1) \quad (2)$$

(1)-(2)，得

$$n^2(n+1)^2=a_0[n^5-(n-1)^5]+a_1[n^4-(n-1)^4]+a_2[n^3-(n-1)^3]+a_3[n^2-(n-1)^2]+a_4[n-(n-1)]$$

即 $$n^4+2n^3+n^2=a_0[n^5-(n-1)^5]+a_1[n^4-(n-1)^4]+a_2[n^3-(n-1)^3]+a_3[n^2-(n-1)^2]+a_4 \quad (3)$$

如果再用例4的方法展开(3)式右端并合并同次项，则非常麻烦。而且，随着m的增大，就愈加繁冗。这就迫使我们改用求导的方法。采用高等代数中的形式导数。因为相等的多项式其导数必相等，故可对(3)式连续对n求4阶导数：

(1阶) $4n^3+6n^2+2n=5a_0[n^4-(n-1)^4]+4a_1[n^3-(n-1)^3]+3a_2[n^2-(n-1)^2]+2a_3$；

(2阶) $12n^2+12n+2=20a_0[n^3-(n-1)^3]+12a_1[n^2-(n-1)^2]+6a_2$；

(3阶) $24n+12=60a_0[n^2-(n-1)^2]+24a_1$；

(4阶) $24=120a_0$.

取$n=1$，代入(1)式及上述各阶导数式的两端，得

$$\begin{cases}120a_0=24\\60a_0+24a_1=36\\20a_0+12a_1+6a_2=26\\5a_0+4a_1+3a_2+2a_3=12\\a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=4\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{5} \\ a_1=1 \\ a_2=\frac{5}{3} \\ a_3=1 \\ a_4=\frac{2}{15} \end{cases}$$

故 $\sum_{i=1}^{n}[i(i+1)]^2=\frac{1}{5}n^5+n^4+\frac{5}{3}n^3+n^2+\frac{2}{15}n$.

由上面例5的方法可推广到一般情况.

例6 求 $\sum_{i=1}^{n}[i(i+1)]^m$, 其中m是一个固定的自然数.

解: 由定理1.2知, $\sum_{i=1}^{n}[i(i+1)]^m$可表成一个关于n的 $2m+1$ 次多项式. 设

$$\sum_{i=1}^{n}[i(i+1)]^m=a_0n^{2m+1}+a_1n^{2m}+a_2n^{2m-1}+\cdots+a_{2m}n \qquad (1)$$

以 $n-1$ 代替(1)式中的n, 得

$$\sum_{i=1}^{n-1}[i(i+1)]^m=a_0(n-1)^{2m+1}+a_1(n-1)^{2m}+a_2(n-1)^{2m-1}+\cdots+a_{2m}(n-1) \qquad (2)$$

(1)-(2), 得

$(n^2+n)^m=a_0[n^{2m+1}-(n-1)^{2m+1}]+a_1[n^{2m}-(n-1)^{2m}]+a_2[n^{2m-1}-(n-1)^{2m-1}]+\cdots+a_{2m-1}[n^2-$

$(n-1)^2]+a_{2m}[n-(n-1)]$

即 $n^{2m}+C_m^1n^{2m-1}+C_m^2n^{2m-2}+\cdots+C_m^{m-2}n^{m+2}+C_m^{m-1}n^{m+1}$
$+n^m=a_0[n^{2m+1}-(n-1)^{2m+1}]+a_1[n^{2m}-(n-1)^{2m}]$
$+a_2[n^{2m-1}-(n-1)^{2m-1}]+\cdots+a_{2m-1}[n^2-(n-1)^2]$
$+a_{2m}$ （3）

视n为连续变量，对（3）式两边连续求各阶导数：

（1阶） $2mn^{2m-1}+C_m^1(2m-1)n^{2m-2}+$
$C_m^2(2m-2)n^{2m-3}+\cdots+C_m^{m-2}(m+2)n^{m+1}+$
$C_m^{m-1}(m+1)n^m+mn^{m-1}=(2m+1)a_0[n^{2m}-$
$(n-1)^{2m}]+2ma_1[n^{2m-1}-(n-1)^{2m-1}]+$
$(2m-1)a_2[n^{2m-2}-(n-1)^{2m-2}]+\cdots+2a_{2m-1}$；

（2阶） $2m(2m-1)n^{2m-2}+C_m^1(2m-1)$
$(2m-2)n^{2m-3}+C_m^2(2m-2)(2m-3)n^{2m-4}+\cdots+$
$C_m^{m-2}(m+2)(m+1)n^m+C_m^{m-1}(m+1)mn^{m-1}+$
$m(m-1)n^{m-2}=(2m+1)2ma_0[n^{2m-1}-$
$(n-1)^{2m-1}]+2m(2m-1)a_1[n^{2m-2}-$
$(n-1)^{2m-2}]+(2m-1)(2m-2)a_2[n^{2m-3}-(n-$
$1)^{2m-3}]+\cdots+3\cdot 2a_{2m-2}$；

……………………………………………………………

（2m－1阶） $2m(2m-1)\cdots3\cdot2n+C_m^1(2m-1)$
$(2m-2)\cdots3\cdot2=a_0(2m+1)(2m)(2m-1)\cdots$
$4\cdot3[n^2-(n-1)^2]+2m(2m-1)\cdots$

$3\cdot 2a_1[n-(n-1)]$;

(2m阶) $(2m)!=(2m+1)!\,a_0$.

取$n=1$代入(3)式及上述各阶导数式的两边，得

$$(*)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{2m} a_0 = 2^m \\ \sum\limits_{i=0}^{2m-1}(2m+1-i)a_i=\sum\limits_{i=0}^{m}(2m-i)C_m^i \\ \sum\limits_{i=0}^{2m-2}(2m+1-i)(2m-i)a_i=\sum\limits_{i=0}^{m}(2m-i) \\ \qquad (2m-1-i)C_m^i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \prod\limits_{i=0}^{2m-2}(2m+1-i)a_0+(2m)!\,a_1=(2m)!+ \\ \qquad C_m^1(2m-1)! \\ (2m+1)!\,a_0=(2m)! \end{cases}$$

方程组(*)有唯一解. 事实上，从最后一个方程可先解出

$a_0=\dfrac{1}{2m+1}$，然后，自下而上用代入法逐个地且唯一地解出a_0，a_1，…，a_{2m}.

例7 求 $\sum\limits_{i=1}^{n}[i(i+1)]^3$.

解： 取$m=3$，依方程组(*)形式写出以下方程组：

$$
\begin{cases}
7!\,a_0=720 \\
7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3a_0+6!\,a_1=1080 \\
7\cdot 6\cdot 5\cdot 4a_0+6\cdot 5\cdot 4\cdot 3a_1+5\cdot 4\cdot 3 \\
\cdot 2a_2=792 \\
7\cdot 6\cdot 5a_0+6\cdot 5\cdot 4a_1+5\cdot 4\cdot 3a_2+4\cdot 3 \\
\cdot 2a_3=378 \\
7\cdot 6a_0+6\cdot 5a_1+5\cdot 4a_2+4\cdot 3a_3+3\cdot 2a_4 \\
=132 \\
7a_0+6a_1+5a_2+4a_3+3a_4+2a_5=36 \\
a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=8
\end{cases}
$$

解之，得

$$
\begin{cases}
a_0=\frac{1}{7} \\
a_1=1 \\
a_2=\frac{13}{5} \\
a_3=3 \\
a_4=\frac{4}{3} \\
a_5=0 \\
a_6=-\frac{8}{105}
\end{cases}
$$