高等学校教材

微积分

上 册

曾广洪 张晓霞 吴庆初 编

高等教育出版社

高等学校教材

微 积 分

Weijifen

上 册

曾广洪 张晓霞 吴庆初 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是在适应21世纪高校课程体系和数学课程教学内容改革需要的背景下，编者根据自身多年的教学经验和教学改革的研究成果，以"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"为指导编写而成的。

本书共分上、下两册。上册包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用，书末附有基本初等函数图形及重要性质和部分习题参考答案与提示。本书在例题选取上注重启发性、代表性和示范性，在难度安排上遵循循序渐进、梯度推进的原则。本书图表丰富，选编的习题题型多样，题量和难度适中。

本书可作为高等学校经济管理类和生物化学类本科各专业的微积分教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分．上册/曾广洪，张晓霞，吴庆初编．—北京：高等教育出版社，2014．8

ISBN 978－7－04－039996－7

Ⅰ．①微…　Ⅱ．①曾…②张…③吴…　Ⅲ．①微积分－高等学校－教材　Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第161347号

策划编辑	胡　颖	责任编辑	胡　颖	特约编辑	师钦贤	封面设计	李树龙
版式设计	马敬茹	插图绘制	郝　林	责任校对	刘春萍	责任印制	张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	15.25	版　　次	2014年8月第1版
字　　数	270千字	印　　次	2014年8月第1次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	24.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　39996－00

前 言

数学是人类智慧的结晶。作为一种重要的理性文明,数学对人的素质的培养有着不可替代的作用。如今,随着科学技术的迅猛发展,特别是计算机技术的使用,数学这门科学不仅具有知识工具、科学语言、理性思维载体的特征,也正在以技术化的手段渗透各个领域。数学的这些本质特征决定了数学教育对于实现高校人才培养目标具有的重要意义。微积分作为高校重要的基础课程,在大学数学课程体系中占有主导地位,其教学质量也可以折射出一所大学的教学质量和教学理念,因此微积分课程建设不仅是数学基础课程建设的重要组成部分,也是高校教学改革研究的重要组成部分。正是在这种背景下,我们结合多年的教学经验,编写了本书。

本书的编写力求保持"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"的核心内容,使得内容的深度和广度满足经济管理类和生物化学类等专业微积分课程的教学要求,并与教育部最新颁布的全国硕士研究生入学统一考试数学二和数学三的考试大纲中的微积分内容一致。在保持微积分课程理论体系的前提下,本书遵循"基本、常用、精练"的原则对传统内容进行选择,力求做到内容陈述上通俗易懂,概念、理论上深入浅出,技能、方法上注重实效,取材编排上有所突破。本书具有如下特点:

1. 通俗性。在基础知识和基本理论的呈现过程中,注意采用启发式方法,尽量把数学知识的传授处理成一个"发现"的过程,使读者在学习中真正体验到认识知识的过程。例如,对于重要概念和理论的引入,尽可能从实际问题入手,阐述其产生的背景及其典型应用;对于重要定理的导出或证明,尽量采用"诱导发现"或"归纳、类比发现"的过程;对于重要的数学思想方法,则尽量抓住经典的数学问题,引导学生经历从发现问题、提出问题到最终应用数学思想方法研究、解决问题的全过程。本书图表丰富,在数学知识的阐述过程中,注重从直观的几何意义或实际背景引入和解释概念和定理,深入浅出,在保持概念理论叙述严谨性的基础上,力求形象直观、通俗易懂。

2. 简易性。对课程教学内容进行优化、整合,在建立基本的理论平台和打好数学基础之间寻找平衡。摒弃基础越深越好、越厚越好的观念,用"与时俱进"的观点看待基础,让基础能服务于创新的目标。在秉承经典教材结构严谨、

逻辑清晰的优点和不影响理论体系完整性的前提下，部分传统意义下的基础知识被简化、整合。例如，弱化了个别章节内容，从简处理了某些定理，减少了一些繁琐的论证和计算，力图使课程内容达到精练；与此同时，课程体系要尽可能地反映本课程的基本思想和方法，因此本书加强了数学思想方法的教学和应用能力的培养，不失时机地引导学生学会从量化的角度看问题，运用微积分的观点、方法分析和解决问题。另外，书中标有“*”号的内容，仅供读者根据自己的实际情况进行选用。

3. 应用性。在吸取我国现行微积分教材优点的同时，注意学习国外教材中强调建模、应用和计算机技术相互渗透的方式。计算机技术的迅速发展和数学软件的开发应用为数学知识的学习提供了强有力的工具，将微积分课程的理论、方法及其在解决实际问题中的应用紧密结合，成为当前微积分课程教学改革的突破口，加强数学应用意识培养，注重建立模型过程的训练成为实现创新型人才培养的新途径。遵循学以致用的原则，本书在选材上广泛涉及经济、管理、生物、化学、生态等学科领域的实例或问题，以适应相关专业学生学习的需要。对于书中涉及实际应用的例题及习题，建议读者根据自己的专业及兴趣爱好进行适当的取舍。

4. 层次性。例题和习题经过仔细挑选，精心配备。例题选取在注意其启发性、代表性和示范性的同时，在难度安排上依据循序渐进、梯度推进的原则。整章的习题安排由易到难，呈现梯度，具有层次性。习题的配备分两部分：一是按章节安排适量的练习题，与学习内容同步，这类习题一般涉及知识的记忆和直接应用，供学生日常练习、巩固之用；二是在每章最后配备一定数量的总复习题，供学生复习、巩固和提高之用，其中有些题目属于一般性复习、巩固和技能技巧的训练、或知识的综合运用和变通运用，难度稍大于章节的练习题；有些题目难度适当加大，大多涉及知识的灵活运用和多个知识点的综合运用，或涉及解题技能的训练，用于揭示解题的一般规律和技巧以及提高综合能力，这部分习题一般选自传统教材中的综合题或近年来的考研真题，供学有余力和报考硕士研究生的学生练习，综合提高题的解题方法请参考编者编写的《高等数学习题课教程》。

5. 技术性。数学软件常常可以帮助我们提高对有关问题的感性认识，加深对微积分概念及方法的理解。本书在适当地方介绍了 Maple、MATLAB 和 Mathematica 三个优秀数学软件在微积分中的应用及注意事项。这三大数学软件各有优势，简单地说，Maple 精于符号推演，MATLAB 擅长数值计算，而 Mathematica 界面简单，适合学生使用。而且这三大数学软件可以优势互补，且许多命令及语法是相似的。我们通过介绍数学软件求解数学问题的知识，并以数学建模和模型求解为契机，通过范例，让读者体验如何将数学原理应用于实际问题的分析研

究，深刻体会所学基本理论和知识与计算机技术的应用价值，并提高应用微积分知识解决实际问题的能力和意识。

编者已将本书的演示文档和图形（包括书中未画出的，尤其是彩色图片和动画图形），以及与例题和习题相关的数学软件程序文件（包括书中由于篇幅所限而未给出的）制作成了配套的电子课件。它们不仅可以用于课堂教学，增强教学效果，也可以用于读者自学，拓展学习空间，其中程序文件还是数学软件在微积分中的应用范例，可以帮助读者理解微积分知识和方法等。总之，配套的电子课件有着丰富的内容，给予读者自主探究的空间，是本书的有益补充和扩展。

通过教材改革促进高校数学教学改革是我们面临的一项紧迫任务。近年来，我们在微积分课程的教学中一直都在进行着这方面的改革尝试，上述几点也可以视为我们在微积分教学改革中的有益尝试。

全书由曾广洪和刘华祥负责总体设计。上册第一、二、三章由张晓霞编写，第四、五、六章由曾广洪编写，吴庆初参与了第四、五、六章的编写。上册由曾广洪统稿并定稿。江西师范大学易才凤、易桂生和张细苟等教授对本书进行了认真细致的审稿，高等教育出版社胡颖编辑为本书做了大量富有成效的工作，他们为本书提出了宝贵的建议和指导。本书在编写过程中得到了江西师范大学和广东海洋大学同事同行的帮助和支持。在此一并表示由衷的感谢！

限于自己的水平，书中难免存在不妥之处，恳请广大读者批评和指正。

编　者

2014 年 4 月

目　录

第 1 章　函数 …… 1
1.1　集合 …… 1
1.2　函数 …… 4
1.3　基本初等函数与初等函数 …… 12
1.4　函数关系的建立及经济学中的常用函数 …… 15
总习题一 …… 19
第 2 章　极限与连续 …… 22
2.1　数列的极限 …… 22
2.2　函数的极限 …… 28
2.3　无穷小量和无穷大量 …… 34
2.4　极限运算法则 …… 38
2.5　极限存在准则与两个重要极限 …… 43
2.6　无穷小量的比较 …… 51
2.7　函数的连续性与间断点 …… 55
2.8　连续函数的运算和初等函数的连续性 …… 59
2.9　闭区间上连续函数的性质 …… 62
总习题二 …… 65
第 3 章　导数与微分 …… 69
3.1　导数的概念 …… 69
3.2　函数的求导法则 …… 76
3.3　高阶导数 …… 83
3.4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 …… 85
3.5　函数的微分 …… 89
3.6　导数在经济学中的应用 …… 96
总习题三 …… 103
第 4 章　微分中值定理与导数应用 …… 107
4.1　微分中值定理 …… 107
4.2　洛必达法则 …… 113
4.3　函数的单调性和曲线的凹凸性 …… 119
4.4　函数的极值与最值 …… 124
4.5　函数图形的描绘 …… 134
总习题四 …… 139
第 5 章　不定积分 …… 145
5.1　不定积分的概念及性质 …… 145
5.2　不定积分的换元积分法 …… 151
5.3　不定积分的分部积分法 …… 161
5.4　简单有理函数的积分法 …… 164
总习题五 …… 168
第 6 章　定积分及其应用 …… 172
6.1　定积分的概念 …… 172
6.2　定积分的基本性质 …… 177
6.3　微积分基本公式 …… 180
6.4　定积分的换元积分法和分部积分法 …… 186
6.5　反常积分 …… 191
6.6　定积分的应用 …… 197
总习题六 …… 208
附录　基本初等函数图形及重要性质 …… 215
部分习题参考答案与提示 …… 218
参考文献 …… 233

第1章 函　数

本章作为学习微积分的开篇,主要介绍函数的概念.我们将在中学已有知识的基础上,进一步阐明函数的一般定义,总结在中学已学过的一些函数,并介绍一些经济学中的常用函数,这是我们进一步学习的基础.

另外,请熟记下列常用的逻辑符号:

(1)"$\forall$"表示任意,"$\exists$"表示存在或至少有一个.

(2)"$P\Rightarrow Q$"表示P蕴含着Q,由命题P可导出命题Q,即P的必要条件是Q;"$P\Leftarrow Q$"表示Q蕴含着P,由命题Q可导出命题P,即P的充分条件是Q;而"$P\Leftrightarrow Q$"表示命题P与命题Q等价,即P的充分必要条件是Q.

(3)"$A\triangleq B$"表示用B定义A.

1.1 集　合

1.1.1 集合

1. 集合的概念

集合是数学中的重要概念之一.通常,我们将具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**,组成这个集合的每一个事物称为该集合的**元素**.

习惯上常用大写拉丁字母A,B,X,Y,Z等表示集合,用小写拉丁字母a,b,x,y,z等表示集合中的元素.对于给定的集合A和元素a,二者关系是确定的,要么a在集合A中,记作$a\in A$,读作a属于A;要么a不在集合A中,记作$a\notin A$,读作a不属于A,二者必居其一.

含有有限个元素的集合称为**有限集**;含有无限多个元素的集合称为**无限集**;不含任何元素的集合称为**空集**,用$\varnothing$表示.

表示集合的方法主要有以下两种:

(1)列举法——把集合中的所有元素一一列举出来.例如有一集合X由x_1,$x_2,\cdots,x_n$所组成,则可将其表示为$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

(2) 描述法——指明集合中元素所共同具有的某种确定性质 P,一般形式为

$$X = \{x \mid x \text{具有性质} P\}.$$

例如集合 X 是不等式 $x^2 - 3x - 18 < 0$ 的解集,则可将其表示为

$$X = \{x \mid x^2 - 3x - 18 < 0\}.$$

2. 集合与集合间的关系

设 X,Y 是两个集合,若对任意 $x \in X$,都有 $x \in Y$,则称 X 是 Y 的**子集**,记作 $X \subset Y$(读作 X 包含于 Y)或 $Y \supset X$(读作 Y 包含 X). 若 $X \subset Y$ 且 $Y \subset X$,则称 X 与 Y 相等,记作 $X = Y$. 规定 $\varnothing \subset X$(X 为任一集合).

如果集合的元素都是数,则称其为**数集**. 通常自然数集用 $\mathbf{N}$ 表示,整数集用 $\mathbf{Z}$ 表示,有理数集用 $\mathbf{Q}$ 表示,实数集用 $\mathbf{R}$ 表示. 有时我们在表示数集的字母右上角添"+","−"等上标,来表示该集合的某特定子集,以实数集为例,正实数集用 $\mathbf{R}^+$ 表示,负实数集用 $\mathbf{R}^-$ 表示.

3. 集合的运算

集合有三种基本运算,即并、交、差.

设有集合 X,Y,它们的并集、交集、差集分别定义如下:

并集 $X \cup Y \triangleq \{x \mid x \in X \text{ 或 } x \in Y\}$;

交集 $X \cap Y \triangleq \{x \mid x \in X \text{ 且 } x \in Y\}$;

差集 $X \backslash Y \triangleq \{x \mid x \in X \text{ 且 } x \notin Y\}$.

我们常常会将所研究的某一问题纳入某个大集合 Ω 中进行,所研究的其他集合都是 Ω 的子集,此时我们称 Ω 为**全集**. 而将差集 $\Omega \backslash X$ 称为 X 的**补集**或**余集**,用 X^c 表示,即记 $X^c = \Omega \backslash X$. 例如 $\Omega = \mathbf{R}$,集合 $X = \{x \mid |x| \leqslant 1\}$,则 $X^c = \{x \mid |x| > 1\}$.

集合的并、交、差运算满足以下运算律:

交换律 $X \cup Y = Y \cup X, X \cap Y = Y \cap X$;

结合律 $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

分配律 $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z), X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

对偶律 $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c, (X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.

证明略. 读者可用韦恩(Venn)图加以理解和记忆.

在两个集合之间还可以定义**笛卡儿**(Descartes)**乘积**(或称**直积**). 设有集合 X,Y,则将它们的笛卡儿乘积记作 $X \times Y$,且定义为

$$X \times Y \triangleq \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，即为 xOy 平面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 通常记作 $\mathbf{R}^2$.

1.1.2 区间和邻域

1. 区间

区间是一类常用的数集，一般可以分为有限区间和无限区间.

设 a,b 为实数，且 $a<b$，我们采用如下定义与记法：

(1) 闭区间 $[a,b]\triangleq\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

(2) 开区间 $(a,b)\triangleq\{x \mid a<x<b\}$；

(3) 半开半闭区间 $(a,b]\triangleq\{x \mid a<x\leqslant b\}$，$[a,b)\triangleq\{x \mid a\leqslant x<b\}$.

以上区间统称为**有限区间**，a,b 称为区间的**端点**，且 a 为**左端点**，b 为**右端点**，数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**.

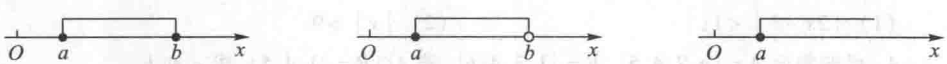
引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），统称为 ∞（读作无穷大），则可以类似地给出无限区间的定义与记法如下：

(1) $[a,+\infty)\triangleq\{x \mid x\geqslant a\}$； (2) $(a,+\infty)\triangleq\{x \mid x>a\}$；

(3) $(-\infty,b]\triangleq\{x \mid x\leqslant b\}$； (4) $(-\infty,b)\triangleq\{x \mid x<b\}$；

(5) $(-\infty,+\infty)\triangleq\mathbf{R}$.

不管是有限区间还是无限区间，都可以在数轴上表示出来，如图 1.1 所示.



(a) 区间$[a,b]$ (b) 区间$[a,b)$ (c) 区间$[a,+\infty)$

图 1.1

以后在不需要特别强调区间是开区间还是闭区间，以及是有限区间还是无限区间的情形下，我们就简单地称之为区间，通常用字母 I 表示.

2. 邻域和去心邻域

设 $a,\delta\in\mathbf{R}$，且 $\delta>0$，称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 **δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**.

在点 a 的 δ 邻域内去掉中心点 a，得集合 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，称之为点 a 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

点 a 的 δ 邻域与点 a 的去心 δ 邻域在数轴上的表示，如图 1.2 所示.

(a) $U(a,\delta)$　　(b) $\mathring{U}(a,\delta)$

图 1.2

为了表达方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的**左邻域**，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的**右邻域**.

有时在研究某一变化过程中，无需指明点 a 的邻域（或去心邻域）的半径，此时就简单地记为 $U(a)$（或 $\mathring{U}(a)$），读作点 a 的某邻域（或点 a 的某去心邻域）.

习　题　1.1

1. 用集合的描述法表示下列集合：

(1) 小于 3 的所有实数集合；　(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 的交点集合.

2. 如果 $A=\{x\mid 5<x<7\}$，$B=\{x\mid x>6\}$，求：

(1) $A\cup B$；　　(2) $A\cap B$；　　(3) $A\backslash B$.

3. 用区间表示下列不等式：

(1) $|2x-3|<1$；　　(2) $|x|>9$.

4. 已知集合 $A=\{a,2,4,5\}$，$B=\{1,3,4,b\}$，若 $A\cap B=\{1,4,5\}$，求 a 和 b.

1.2　函　　数

1.2.1　函数的概念

客观世界中的事物都不是孤立的，它们相互联系、相互制约. 从数量关系上看，这其实就是变量之间存在着依存关系. 函数是研究变量之间依存关系的重要概念. 有了函数概念，就可以研究函数的性质，进而把握客观事物的运动规律或运动过程. 下面先看几个例子.

例 1.1　圆的面积 A 与它的半径 r 之间的关系由公式 $A=\pi r^2$ 确定，即对于

任意的 $r\in(0,+\infty)$，圆的面积 A 相应有一个确定的数值.

例 1.2 某工厂生产某产品，每日最多生产 100 单位. 它的日固定成本为 130 元，生产一单位产品的可变成本为 6 元，则该厂日总成本 C 与产品数量 Q 之间的关系由公式 $C=130+6Q$ 确定，即对于任意的 $Q\in[0,100]$，日总成本 C 相应有一个确定的数值.

由上面两个例子，我们看到它们都表达了两个数集之间的一种对应规律，即在一个实数集（或其子集）内取定一个数值时，在实数集内有唯一的数与之对应.

定义 1.1 设有非空数集 $X\subset\mathbf{R}$，f 是一个确定的对应规律. 如果对数集 X 中的每一个数 x，按照对应规律 f，实数集 $\mathbf{R}$ 中有唯一一个数 y 与之对应，我们称 f 为定义在 X 上的一个**函数**，或称变量 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in X,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，X 称为函数的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=X$.

当 x 取遍 X 中一切数时，与之对应的 y 组成的数集，称为函数的**值域**，记作 $f(X)$ 或 R_f，即 $f(X)=R_f=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$. 显然，$f(X)\subset\mathbf{R}$.

注 几点说明：

(1) 符号 $y=f(x)$ 表示两个数集的一种对应关系，因此也可用 $y=g(x)$，$y=F(x)$ 等表示，但一个函数在讨论中应取定一种记法；同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的符号分别表示它们各自的对应规律，以避免混淆.

(2) 用 $y=f(x)$ 表示一个函数时，f 所代表的对应规律已完全确定. 若 $x_0\in D_f$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，且把对应于 x_0 的值 y 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.

(3) 由函数的定义可知，函数的定义域和对应规律是确定函数的两要素，而函数的值域是由这两者派生出来的. 若两个函数的定义域和对应规律相同，则我们认为这两个函数相同，而不在意它们的自变量和因变量采用何字母表示. 如函数 $y=x,x\in\mathbf{R}$ 与函数 $s=t,t\in\mathbf{R}$ 是相同函数.

函数定义域的确定取决于两种不同的研究背景：一是有实际背景的函数；二是抽象地用公式表达的函数. 前者定义域的确定取决于变量的实际背景；而后者定义域的确定是使得公式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 例如，函数 $y=\pi x^2$，若 x 表示圆的半径，y 表示圆的面积，则定义域的确定属于前者，此时 $D_f=(0,+\infty)$；若不考虑 x 的实际意义，则它的自然定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$.

(4) 由函数的定义可知，对于任意 $x\in X$，有唯一的一个实数 y 相对应，这种函数称为单值函数. 当 X 中的某些 x 值有多于一个 y 值相对应，我们称其为多值函数. 微积分中，对于多值函数，通常是根据函数特点给出一些附加条件，将其转化成单值函数，如此得到的单值函数称为该多值函数的单值分支. 例如，对于单位圆 $x^2+y^2=1$，根据对称性，通常重点考察其上半支 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$.

函数的表示方法主要有三种：表格法、图像法、解析法（公式法），他们各有优缺点. 在解决实际问题时要根据问题的特点选用适当方法，或者三种方法结合起来使用. 特别地，将解析法和图像法相结合来研究函数，可以将抽象问题直观化，借助于几何方法研究函数的有关特性；反过来，一些几何问题，有时也可借助函数进行理论研究. 一个函数 $y=f(x)$ 的图形通常是平面内的一条曲线. 例如，函数 $y=x^2$ 的图形是 xOy 平面内的一条抛物线.

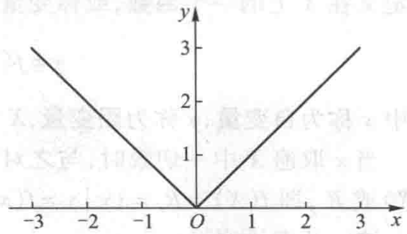


图 1.3

下面给出一类常用的函数：

例 1.3（**绝对值函数**） 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为绝对值函数（如图 1.3），其定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$.

例 1.4（**符号函数**） 函数

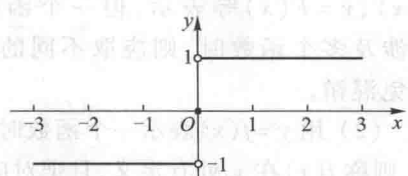


图 1.4

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数（如图 1.4），其定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$. 显然有 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$.

例 1.5（**取整函数**） 设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$. 函数 $y=[x]$ 称为取整函数（如图 1.5），其定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$.

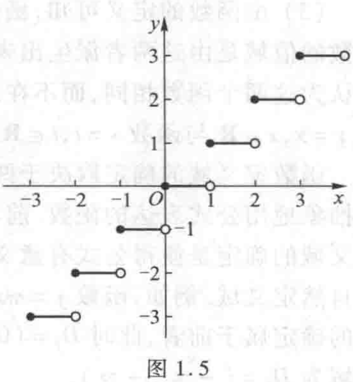


图 1.5

例如，$[0.5]=0$，$[1.4]=1$，$[\pi]=3$，$[-3.8]=-4$.

以上在其定义域的不同部分用不同的公

式表达的函数称为**分段函数**. 注意分段函数在其整个定义域上是一个函数,而不是多个函数.

例 1.6 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$$

(1) 求其定义域;(2) 求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(1)$,$f(a)$;(3) 画出其图形.

解 (1) 函数的定义域为 $D_f=(-\infty,0]\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

(2) 因为 $-1\in(-\infty,0]$,$0\in(-\infty,0]$,此时 $f(x)=2+x$,得

$$f(-1)=2+(-1)=1,\quad f(0)=2+0=2.$$

又 $1\in(0,+\infty)$,此时 $f(x)=2^x$,得 $f(1)=2^1=2$.

当 $a\in(-\infty,0]$ 时,$f(a)=2+a$;当 $a\in(0,+\infty)$ 时,$f(a)=2^a$.

(3) 该函数的图形如图 1.6 所示.

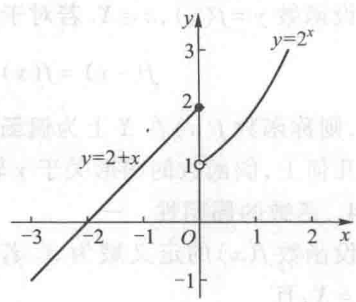


图 1.6

1.2.2 函数的几种特性

通常函数有四种特性,即:有界性、单调性、周期性、奇偶性.

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$,$x\in X$. 若存在实数 B(或 A),使得对于任意的 $x\in X$,恒有

$$f(x)\leqslant B \quad (\text{或} f(x)\geqslant A)$$

成立,则称 $f(x)$ 在 X 上有**上界(或下界)**,称 B(或 A)是其一个**上界(或下界)**.

若存在正数 M,使得

$$|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X$$

恒成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,且 M 就是一个界. 若这样的正数 M 不存在,即若对任何的正数 M,总存在 $x_0\in X$,使得 $|f(x_0)|>M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

例如,函数 $y=\cos x$ 和 $y=\sin x$ 都是有界函数,数 1 是它的一个界,也可以说数 -1 和 1 分别是它们的一个下界和上界. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 内都是无界的,但在任何不包含原点的闭区间上是有界的.

容易证明,函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 X 上既有下

界又有上界.

几何上,有界函数 $f(x)$ 的图形介于两直线 $y = \pm M$ 之间.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$, $x \in X$. 若对于任意的 $x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或} f(x_1) > f(x_2))$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**单调增加**(或**单调减少**). 若 X 是区间,则此区间称为函数 $f(x)$ 的**单调增区间**(或**单调减区间**). 单调增区间与单调减区间统称为**单调区间**.

几何上,单调增加的函数的图形是沿 x 轴正向上升的;而单调减少的函数的图形是沿 x 轴正向下降的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$, $x \in X$. 若对于任意的 $x \in X$, 有 $-x \in X$, 且恒有

$$f(-x) = f(x) \quad (\text{或} f(-x) = -f(x))$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上为**偶函数**(或**奇函数**).

几何上,偶函数的图形关于 y 轴对称,而奇函数的图形关于原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 X. 若存在非零常数 T, 使得对于任意的 $x \in X$, 有 $x + T \in X$, 且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,且 T 为 $f(x)$ 的一个**周期**. 但通常所说的周期是指**最小正周期**.

显然,若函数 $f(x)$ 以 T 为周期,则 $nT(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 也为函数 $f(x)$ 的周期. 例如, $\sin x$, $\cos x$ 是周期函数, $2n\pi(n=1,2,\cdots)$ 都是它们的周期,其中 2π 是它们的最小正周期. 但并非每一个周期函数都有最小正周期. 例如函数 $f(x) = c$(c为常数)是周期函数,但它无最小正周期.

对于周期函数,只要知道它在任一区间 $[a, a+T]$ 上的图形,则将所作图形按周期向左、右平移,就得到函数的全部图形.

1.2.3 复合函数和反函数

1. 复合函数的概念

在实际问题中经常出现这样的情形:在某变化过程,第一个变量依赖于第二

个变量,而第二个变量又依赖于第三个变量.例如,某产品的销售成本 C 依赖于销量 Q,且 $C=130+4Q$,而销量 Q 又依赖于销售价格 P,且 $Q=3e^{-\frac{1}{3}P}$,则通过 Q,销售成本 C 实际上依赖于销售价格 P,即 $C=130+12e^{-\frac{1}{3}P}$,此时称 Q 为中间变量.像这样在一定条件下,将一个函数"代入"另一个函数中的运算称为函数的复合运算,而得到的函数称为复合函数.

定义 1.2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,值域为 R_f,而函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g,值域为 R_g.若 $R_g\subset D_f$,则对于每一个 $x\in D_g$,通过中间变量 u,相应地得到唯一确定的一个值 y.于是变量 y 通过变量 u 而成为 x 的函数,称之为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 构成的**复合函数**,记作 $y=f[g(x)]$,且记其定义域为 $D_{f\circ g}$,值域为 $R_{f\circ g}$,故 $D_{f\circ g}=D_g$.

例 1.7 设有两函数 $y=f(u)=u^2-3$,$u=g(x)=\sin x$.易知,$f(u)$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[-3,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域 $D_g=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_g=[-1,1]$,从而可知 $R_g\subset D_f$,故将中间变量 u 代入组成复合函数

$$y=f[g(x)]=\sin^2x-3,$$

其定义域 $D_{f\circ g}=D_g=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_{f\circ g}=[-3,-2]$.

例 1.8 设有两函数 $y=f(u)=\sqrt{1+u}$,$u=g(x)=x^2-5$.易知,$f(u)$ 的定义域 $D_f=[-1,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域 $D_g=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_g=[-5,+\infty)$,但 $R_g\not\subset D_f$,故不能将中间变量 u 代入.我们将函数 $u=g(x)=x^2-5$ 给以限制如下:

$$u=g^*(x)=x^2-5,\quad D_{g^*}=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty),\quad R_{g^*}=[-1,+\infty),$$

此时,$R_{g^*}\subset D_f$,故有复合函数

$$y=f[g^*(x)]=\sqrt{1+(x^2-5)}=\sqrt{x^2-4},$$

其定义域 $D_{f\circ g^*}=D_{g^*}=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$,值域 $R_{f\circ g^*}=[0,+\infty)$.

复合函数的概念还可以推广到有限多个函数复合的情形.例如函数 $y=3^{\sin\frac{1}{x}}$ 可以看成是由 $y=3^u$,$u=\sin v$ 和 $v=\dfrac{1}{x}$ 三个函数复合而成的,其中 u,v 为中间变量,x 为自变量,y 为因变量.

2. 反函数

函数 $y=f(x)$ 反映了 y 是怎样随着 x 而改变,但变量之间的制约关系往往是相互的,除了研究变量 y 怎样随着 x 而确定外,有时也需要反过来研究 x 怎样随

着 y 而确定的问题. 例如,圆的面积 A 与其半径 r 之间的关系是

$$A=\pi r^2. \tag{1.1}$$

当由半径来研究面积的变化时,取半径 r 为自变量方便些,于是 A 是 r 的函数,我们把它写成(1.1)式. 反之,当研究圆的面积取多少时,才可以使圆的半径达到所要的值,则宜取面积 A 为自变量,于是 r 是 A 的函数. 从(1.1)式解得 $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$(由实际意义不取 $r=-\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$).

设有函数 $y=f(x)$,其定义域为 X. 由函数定义可知:对于任意 $x\in X$,按照对应规律 f, $\mathbf{R}$ 中有唯一一个 y 相对应,但对于任意 $y\in f(X)$,不一定对应唯一一个 $x\in X$,使 $f(x)=y$. 如上例中对应 A 的一个值, r 就有两个值,但由实际意义,我们只取其中一个值. 对于这种函数只需将定义域作些限制(设限制后的定义域为 X^*),则对于任意 $y\in f(X^*)$,就对应唯一一个 $x\in X^*$,使 $f(x)=y$.

定义 1.3 设有函数 $y=f(x)$, $x\in X$. 若对于任意的 $y\in f(X)$,有唯一一个 $x\in X$ 与之对应,使 $f(x)=y$,则在 $f(X)$ 上定义了一个函数,记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(X),$$

称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,且 $f(X)$ 为其**定义域**, X 为其**值域**.

函数 $y=f(x)$ 与函数 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数. 相对反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

反函数的实质在于它所表示的对应规律,至于用什么字母来表示反函数中的自变量与因变量是无关紧要的. 习惯上,把自变量记作 x,因变量记作 y,则反函数 $x=f^{-1}(y)$,通常写作 $y=f^{-1}(x)$.

在同一坐标平面上,函数 $y=f^{-1}(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,如图 1.7 所示.

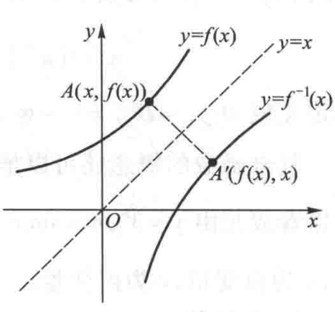


图 1.7

请读者思考:在同一坐标平面上,函数 $y=f(x)$ 与函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形的位置关系如何?

定理 1.1(反函数存在定理) 单调函数 $y=f(x)$ 必存在单调的反函数 $y=f^{-1}(x)$,且 $y=f^{-1}(x)$ 具有与 $y=f(x)$ 相同的单调性.