结构动力学

（上　册）

朱德懋　主编

南京航空航天大学

一九九三年十月

前　言

结构动力学是以固体力学与振动理论为基础建立起来的一门工程学科。随着科学技术的发展，结构动力学作为一门工程学科在不断地完善和扩展。首先，在工程领域内，不论是航空、航天、机械、土木、造船、运输、纺织、化工、电机、通讯等，都采用有各种不同类型的结构系统。由于它们是在复杂的环境下运行，产生有多种多样的动力学问题有待于要解决。从而推进了结构动力学的发展。其次，计算机技术的飞跃发展，为结构动力学的研究提供了强有力的手段。复杂结构系统的各类动力学问题采用有限元素法来分析成为可能，发展了完整的数值计算方法。第三，现代测试技术提供有精确的测量仪表，特别是传感器、激振器等一次仪表，能正确地测得结构振动的原始信息。还提供有以计算机为基础的信号记录、处理、分析仪，能从原始信息中提取结构振动的特征信号。第四，作为现代结构动力学发展新阶段的重要标志之一是数值计算与测试技术相结合，向计算机仿真方面发展。结构动力学的发展还从其它学科，如控制论、信息论、系统论等吸取其研究成果，不断地延拓和充实其学科内容，形成为“现代结构动力学”，在内容上与传统的结构动力学已有较大的差别。

本书是固体力学学科硕士研究生学位课程“结构动力学”的教材，是作者在多年教学基础上，将讲稿进行整理、修改和扩充后编写而成的。在整个整理与编写过程中，孙久厚、陈国平、黄惟勤等同志参加了工作，付出了很大的劳动，是我们集体工作的产物。由于时间比较紧促，整理了前半部分，出版了上册。上册包括弹性动力学、有限元动力学和模态理论与响应理论等三个基础部分。弹性动力学包括基本方程、变分原理和弹性体振动等三章。有限元动力学包括基础理论、C^0有限元和C^1有限元等三章。结构动力学是建立在弹性动力学与有限元动力学的基础之上来发展其本身的理论基础和分析方法的。结构系统是作为离散化的弹性体来分析的，主要采用有限元数学模型。所分析的结构系统不仅是传统的杆梁结构，而是更一般的梁板结构及实体结构等；不仅是一些简单结构，往往要分析的是各种构形的复杂结构；结构系统本身有着更广泛的内涵。这里着重讨论了有限元动力学的特点，以及它与有限元静力学的本质差异。由于惯性因素的作用，位移响应与激励载荷之间的关系式不是简单的线性关系，而是时变的或频变的，动力学有限元模型呈现出复杂性。由于有限元是结构系统细分后生成的，其基频远低于结构系统的低频段，分析表明在这种情况下可采用静力学有限元模型。但对稍高的频段则不能直接使用静力学模型而必须加以修正和补充，这成为结构系统建模的一个需要正确处置的问题。建立动力学有限元模型还必须生成质量矩阵，在工程上，生成具有一定精度的质量矩阵也是存在有相当的难度。综上所述，建立动力学有限元模型比建立静力学模型要困难得多，必须正确掌握其机理与特性，避免出现错误。这部分重点介绍的是有限元生成机理和特性。模态理论与响应理论是结构动力学的重要基本理论，固有模态理论与复模态理论揭示了结构系统的振动特性，响应理论揭示了结构系统的动响应特性，它们的综合给出了结构系统建立数学模型的多种形式。在空间域内，采用物理位移空间、状态空间、固有模态空间、复模态空间等，在时间域内，采用物理时间域、拉氏域、频率域等，分析了它们各自的特性，以及转换关系。它们深刻地描绘了结构系统的动力学性能，构成了结构动力学分析、计算、试验的理论基础和依据。建模问题是结构动力学研究的基础，正确的数学模型提供了正确的认识，为正确解决结构动力学问题，有了依据、提供了办法。这三部分

是相互联系的，又有各自的独立性。这是上册所讲述的主要内容。

上册的内容既有经典部分，又有发展部分，它是根据结构动力学现代发展的要求与趋势来组织和编写的。在本书脱稿后，曾请丁锡洪教授审阅，提出了不少宝贵的修改意见，在此向他表示深切的谢意。由于我们实践经验尚不够丰富，时间又比较少，难免有很多不足之处，甚至有不甚正确的，敬请提出意见，不胜感激。

朱德懋

一九九三年十月

目　录

绪　论 …… 1
§0.1　研究对象 …… 1
§0.2　研究内容 …… 2
0.2.1　结构系统的构造形式 …… 2
0.2.2　力学原理 …… 2
0.2.3　结构系统的数学模型 …… 3
第一章　弹性动力学基础 …… 5
§1.1　弹性动力学的基本概念与基本假设 …… 5
1.1.1　连续介质的概念 …… 5
1.1.2　基本假设 …… 5
1.1.3　场变量的概念 …… 5
1.1.4　时间的概念 …… 6
§1.2　位移、变形与应变分析 …… 7
1.2.1　位移与变形梯度 …… 7
1.2.2　微体的应变分析与几何方程 …… 9
1.2.3　主应变与应变不变量 …… 9
1.2.4　体积变化与形状变化 …… 10
1.2.5　应变协调方程(相容性条件) …… 11
§1.3　运动与惯性分析 …… 11
1.3.1　运动参考系 …… 11
1.3.2　速度场变量与应变率 …… 11
1.3.3　材料的惯性性质与动量 …… 12
§1.4　作用力、内力与应力分析 …… 12
1.4.1　作用力的分类 …… 12
1.4.2　内力与应力分析 …… 13
1.4.3　主应力与应力不变量 …… 14
1.4.4　弹性体的运动方程 …… 16
§1.5　弹性材料的本构关系 …… 16
1.5.1　热力学基本定律 …… 16
1.5.2　应变能密度函数 …… 17
1.5.3　弹性体的本构关系 …… 18
1.5.4　各向同性线弹性材料的本构关系 …… 19
§1.6　弹性体动力学基本方程 …… 20
1.6.1　位移形式的弹性体动力学基本方程 …… 20
1.6.2　边界条件与初始条件 …… 21
1.6.3　弹性动力学的基本问题及基本解法 …… 22
第二章　弹性体动力学的变分原理 …… 25

§ 2.1　弹性体动力学的功能概念 …… 25
2.1.1　外力功的概念 …… 25
2.1.2　应变能的概念 …… 25
2.1.3　动能的概念 …… 26
§ 2.2　虚位移原理(微分原理) …… 26
2.2.1　虚位移与虚功的概念 …… 26
2.2.2　弹性体静力学的虚位移原理 …… 27
2.2.3　弹性体动力学的虚位移原理 …… 27
§ 2.3　最小位能原理 …… 28
2.3.1　泛函的概念 …… 28
2.3.2　弹性体位能与最小位能原理 …… 28
2.3.3　卡氏第一定理 …… 29
§ 2.4　虚力原理 …… 30
2.4.1　虚力与虚余功的概念 …… 30
2.4.2　弹性体静力学的虚力原理 …… 31
2.4.3　弹性体动力学的虚力原理 …… 31
§ 2.5　最小余能原理 …… 31
2.5.1　余能与最小余能原理 …… 32
2.5.2　卡氏第二定理 …… 33
√§ 2.6　哈密尔登(Hamilton)作用量原理(积分原理) …… 33
2.6.1　作用量的概念 …… 33
2.6.2　哈密尔登作用量原理 …… 34
§ 2.7　弹性体动力学的拉格朗日(Lagrange)方程 …… 35
2.7.1　泛函驻值问题化为控制微分方程 …… 35
2.7.2　弹性体的拉格朗日方程及边界条件 …… 36
§ 2.8　柯丁(Gurtin)变分原理 …… 38
2.8.1　弹性体动力学基本方程的拉氏变换式 …… 38
2.8.2　柯丁变分原理的拉氏域表达式 …… 40
2.8.3　柯丁变分原理的时间域表达式 …… 40
√§ 2.9　瑞利(Rayleigh)商变分原理 …… 41
2.9.1　弹性体瑞利商的定义 …… 41
2.9.2　瑞利商变分原理 …… 43
√2.9.3　瑞利商的性质 …… 44
第三章　弹性体的振动 …… 47
√§ 3.1　弦的振动 …… 47
3.1.1　用动力学基本定律建立弦振动基本方程 …… 47
3.1.2　用能量变分原理建立弦振动基本方程 …… 48
3.1.3　弦振动方程的基本解法之一:分离变量法 …… 49
3.1.4　弦振动方程的基本解法之二:波传播法 …… 52
3.1.5　弦振动方程的基本解法之三:拉氏变换法 …… 55

3.1.6 弹性杆的轴向振动 …… 56
3.1.7 弹性轴的扭转振动 …… 58
§3.2 弹性梁的振动 …… 59
3.2.1 伯努里一欧拉(Bernoulli－Euler)梁振动的基本方程 …… 59
3.2.2 伯努里一欧拉梁振动的解法之一——分离变量法 …… 62
3.2.3 伯努里一欧拉梁振动的解法之二——波传播法 …… 64
3.2.4 铁木辛柯(Timoshenko)梁振动的基本方程 …… 66
3.2.5 铁木辛柯梁振动的解法 …… 68
§3.3 弹性薄膜的振动 …… 71
3.3.1 弹性薄膜振动的基本方程 …… 71
3.3.2 矩形薄膜的振动 …… 73
3.3.3 圆形薄膜的振动 …… 74
§3.4 弹性薄板的弯曲振动 …… 76
3.4.1 弹性薄板弯曲振动的基本方程 …… 76
3.4.2 矩形板的振动 …… 81
3.4.3 圆板的振动 …… 84
第四章 动力学有限元基础 …… 87
§4.1 结构的离散化 …… 87
4.1.1 离散化的概念 …… 87
4.1.2 组集的概念 …… 89
4.1.3 收敛性准则 …… 89
§4.2 能量变分法 …… 90
4.2.1 结构系统振动基本方程 …… 90
4.2.2 虚功原理 …… 90
4.2.3 能量变分原理 …… 91
4.2.4 插值函数的选取 …… 92
§4.3 有限元动力学特性矩阵的生成 …… 94
4.3.1 结构系统的有限元模型 …… 94
4.3.2 动能函数与质量矩阵 …… 96
4.3.3 应变能与刚度矩阵 …… 98
4.3.4 耗散函数与粘性阻尼矩阵 …… 99
§4.4 加权残量法 …… 99
4.4.1 系统动力学控制微分方程 …… 99
4.4.2 解函数与权函数的选取 …… 100
4.4.3 加权残量法的几种形式 …… 102
§4.5 伽辽金(Galerkin)法 …… 102
4.5.1 伽辽金法的一般形式 …… 102
4.5.2 解函数的选取 …… 104
第五章 C^0 有限元 …… 104
§5.1 一维弹性杆纵向振动基本方程 …… 104

5.1.1 前言 …… 104
5.1.2 弹性杆的力学分析 …… 105
5.1.3 弹性杆的能量分析 …… 108
5.1.4 均质等剖面直杆纵向振动的解析解 …… 109
§5.2 一维弹性杆元素 …… 109
5.2.1 理论基础 …… 110
5.2.2 形函数 …… 110
5.2.3 弹性杆的静态有限元 …… 112
5.2.4 解析动态有限元 …… 114
5.2.5 频率幂级数动态有限元 …… 117
5.2.6 高次有限元 …… 118
§5.3 二维弹性薄膜振动的基本方程 …… 118
5.3.1 弹性薄膜的力学分析 …… 119
5.3.2 弹性薄膜的能量分析 …… 120
§5.4 二维薄膜有限元 …… 120
5.4.1 三角形膜元素 …… 124
5.4.2 动态有限元 …… 126
5.4.3 矩形膜元素 …… 128
第六章 C^1 有限元 …… 128
§6.1 一维弹性梁的基本概念与基本方程 …… 128
6.1.1 弹性梁的基本概念与基本假设 …… 128
6.1.2 弹性梁的力学分析与基本方程 …… 130
6.1.3 弹性梁的能量分析 …… 131
√§6.2 伯努里——欧拉弹性梁元素 …… 131
6.2.1 基本方程 …… 131
6.2.2 弹性梁的静态有限元 …… 133
6.2.3 弹性梁的解析动态有限元 …… 135
6.2.4 弹性梁的频率幂级数动态有限元 …… 139
6.2.5 弹性梁的高次有限元 …… 139
§6.3 铁木辛柯弹性梁元素 …… 139
6.3.1 基本方程 …… 140
6.3.2 铁木辛柯梁的静态有限元 …… 144
§6.4 旋转弹性梁元素 …… 146
6.4.1 旋转梁振动的基本方程 …… 146
6.4.2 旋转梁的能量关系式 …… 146
6.4.3 旋转梁元素 …… 147
§6.5 二维弹性薄板的基本方程 …… 148
6.5.1 定义与基本假设 …… 148
6.5.2 弹性薄板的力学分析 …… 148
6.5.3 弹性薄板的能量分析 …… 150

6.5.4 三角形薄板有限元 …… 151
第七章 固有模态理论 …… 155
§7.1 离散有限元模型的振动基本方程 …… 155
7.1.1 模型抽象化 …… 155
7.1.2 数学模型的分类： …… 155
§7.2 无阻尼结构系统的动力学基本方程 …… 157
7.2.1 无阻尼结构系统的有限元模型 …… 157
7.2.2 无阻尼结构系统自由振动基本方程及其解 …… 158
§7.3 无阻尼结构系统的固有振动特性 …… 159
7.3.1 无阻尼结构系统动力学基本方程的特征解 …… 159
7.3.2 结构系统振动的固有模态特性 …… 161
§7.4 固有模态空间及结构系统动力学基本方程 …… 163
7.4.1 固有模态空间 …… 163
7.4.2 结构系统动力学的模态方程 …… 163
第八章 阻尼模态理论 …… 165
§8.1 阻尼模型 …… 165
8.1.1 阻尼的概念 …… 165
8.1.2 粘性阻尼模型 …… 165
8.1.3 材料阻尼模型 …… 166
8.1.4 摩擦阻尼模型 …… 167
§8.2 阻尼结构系统的动力学基本方程 …… 168
8.2.1 阻尼结构系统的能量分析 …… 168
8.2.2 离散化的阻尼结构系统的数学模型 …… 169
√§8.3 比例阻尼结构系统的振动特性 …… 171
8.3.1 比例阻尼结构系统的定义 …… 171
8.3.2 阻尼结构系统的特征方程 …… 172
8.3.3 比例阻尼结构系统的特征解 …… 173
√§8.4 一般阻尼结构系统的振动特性 …… 176
8.4.1 状态方程及其特征问题 …… 176
8.4.2 特征值与状态特征向量 …… 177
8.4.3 位移模态向量 …… 178
√§8.5 复模态空间内的阻尼结构系统动力学方程 …… 180
8.5.1 复模态空间内的状态方程 …… 180
8.5.2 复模态空间内的位移方程 …… 181
8.5.3 复模态向量与实模态向量 …… 182
第九章 阻尼结构系统的响应理论 …… 184
§9.1 结构系统的动响应概念 …… 184
9.1.1 结构动力学的两大基本问题 …… 184
9.1.2 载荷分析 …… 184
9.1.3 结构系统动响应问题的提法 …… 186

§9.2　比例阻尼结构系统的频率响应 …… 186
9.2.1　基本方程及其频率解 …… 187
9.2.2　模态空间的频率响应 …… 187
9.2.3　频率响应函数的特性 …… 189
§9.3　比例阻尼结构系统的脉冲响应 …… 192
9.3.1　基本方程及其时域解 …… 192
9.3.2　脉冲响应函数 …… 195
9.3.3　阶跃响应函数 …… 196
9.3.4　时间域内的动响应分析 …… 198
§9.4　比例阻尼结构系统的传递函数 …… 198
9.4.1　结构系统动力学方程的拉氏变换式 …… 199
9.4.2　比例阻尼结构系统的传递函数 …… 199
§9.5　一般阻尼结构系统的状态方程及其一般解 …… 201
9.5.1　阻尼结构系统的状态方程 …… 201
9.5.2　状态方程的齐次解及其状态转移矩阵 …… 202
9.5.3　状态方程的零初值响应及时间域的动响应 …… 203
9.5.4　模态空间内的动响应 …… 205
§9.6　一般阻尼结构系统的脉冲响应矩阵 …… 206
9.6.1　阻尼结构系统的位移响应解 …… 206
9.6.2　一般阻尼结构系统的位移脉冲响应函数 …… 207
9.6.3　一般阻尼结构系统的速度脉冲响应函数 …… 209
9.6.4　复模态特性分析 …… 210
§9.7　一般阻尼结构系统的传递函数 …… 210
9.7.1　状态传递函数 …… 210
9.7.2　位移传递函数 …… 211
9.7.3　速度传递函数 …… 212
§9.8　一般阻尼结构系统的频率响应函数 …… 213

绪　论

§0.1　研究对象

结构动力学是研究结构系统动力学行为的一门科学。

结构系统受到外界激励（输入）作用时，将产生动力响应（输出），包括运动响应、应力响应。决定结构系统输入与输出之间关系的内在核心因素是结构系统自身固有的动力学特性。结构动力学的研究对象是研究激励、结构系统和响应三者之间关系和各自的特性。本课程所研究的问题可用下列框图表示：

激励（输入）——→ $\boxed{\text{结构系统（模型）}}$ ——→响应（输出）

图 0.1　结构系统动力学问题的框图

激励（输入）是各种振源对结构系统所施加的作用，包括力的作用和运动的作用，是产生结构动力学问题的外部原因。有关振源和由此而产生激励的分析是个重要而又复杂的问题，它涉及到空气、液体、声、机械等多门学科，是个综合性问题。对于飞行器来说，在空气中飞行受气动力作用；运转着的机械，如发动机等，受动不平衡力作用；高速飞行时产生声的作用；在地面滑行时受地面不平度的作用；这些都是重要的振源。振源机理及其性质的不同，所产生的激励特性也不同。本课程不对振源作出定性分析，而把激励看作为给定变化规律的量来处理。在不少的情况下，它是时间的函数，用它的时间历程来表示。按其随时间变化规律来分，可分为简谐激励，周期性激励、脉冲激励和随机激励等。激励也可能是位移，速度等的函数。在本课程内所分析的激励绝大多数是时间的函数。

响应（输出）是结构动力学问题的表现形式。一种表现形式是运动响应，给出结构系统的振动水平或提供振动环境。运动响应包括：位移响应、速度响应和加速度响应等。另一种表现形式是应力响应，决定结构系统的动强度。结构动力学重点分析的内容之一是运动响应。振动作为一种运动型式，其表现形式首先是它的运动响应。它可从结构系统的动力学基本方程（或称为动力学控制方程）中直接解出。而应力响应则是从动力学方程中解出的位移响应中导出，即在给定振动形式下进行应力分析。本课程着重于运动响应分析。

结构系统的动力学特性（模型）是产生动力学问题的内在因素。其动力学行为取决于结构系统本身的动力学特性，结构系统动力学特性分析成为本课程的重点内容之一。为分析结构系统的动力学特性，首先对结构系统进行构形分析，形成它的力学模型。然后用一种数学表达式来描述结构的动力学性能，建立结构系统的数学模型。最基本的数学模型是在时间域内描述位移与作用力之间关系的微分方程，称之为动力学基本方程。最后根据数学模型分析它的动力学行为。本课程着重于讨论结构系统数学模型的建立问题，简称为建模问题。

§0.2 研究内容

结构动力学研究的核心问题是建立结构系统的数学模型。正确地建立了结构系统的数学模型,可给出结构系统的动力学特性。正确地建立了结构系统的数学模型,可以根据外界的激励确定动力响应。掌握了结构系统的动力学特性和动力响应,就可能解决存在的各种各样的动力学问题。

建立结构系统数学模型主要地依赖于两个方面内容:一是结构本身的具体构造型式,即它的构形和受力特性;一是它所遵循的力学原理。

0.2.1 结构系统的构造形式

结构系统有各种各样的构造形式,简称为构形。根据构成结构系统的基本元件来分类,它可分为下列几类:

(1) 桁架结构。桁架结构的基本元件是只承受轴向拉压作用的杆。这是一种最简单的构造形式。在航空航天器中较为普遍的应用,如卫星结构、发动机支架等。

(2) 刚架结构。刚架结构的基本元件是主要承受弯扭作用的梁。这种结构大量地应用于各种建筑物。

(3) 薄壁结构。薄壁结构是一种具有加筋元件的蒙皮结构。它具有较大的空间,较轻的重量,较高的强度与刚度。在飞行器中有着极为广泛的应用。

(4) 板式结构。板式结构的基本元件是平板,既承受弯扭,又承受拉压。这可以是由薄壁结构的蒙皮与加筋元件融合在一起而演变为板式结构。

(5) 壳式结构。壳式结构是一种曲板结构。它具有优越的受载能力和宽大的容积空间。广泛地应用于各类容器,特别是承载容器,如运载器的贮箱等,既贮存液体,又承受载荷。

根据结构的构造形式,分析其基本元件的受载和变形特点,生成它的力学模型。这是结构系统建模的第一步,也是研究结构系统力学行为的关键一步。目前广泛应用的力学模型是有限元模型。这方面工作对结构形式有着直接依赖性,必须在分析清楚结构受力和传力特性基础上,作出正确简化,生成有限元模型。本课程主要研究的是有限元模型。

结构系统动力学建模有着更为广泛的内容。它的特性参数不仅需要静力学建模的刚度数据,还必须有惯性数据和阻尼数据,是更全面地描述了结构系统的力学行为。结构系统动力学行为是个复杂过程。它的特性参数不仅是空间变量,而且是时间变量,在振动过程中它们是时变的或是频变的。在模型简化和生成过程中必须作出妥善处理,构造出正确反映结构动力学特性的数学模型。

0.2.2 力学原理

动力学建模的依据是它所遵循的力学原理。

(1) 牛顿动力学第二定律。最基本的是质点动力学方程

$$M\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

其中 M 是质点质量,$\mathbf{f}$ 是作用在质点上的力,$\mathbf{a}$ 是质点的运动加速度。

（2） 拉格朗日第二类方程。这是一种普遍的动力学方程，对于一个多自由度离散力学系统，它是

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,2,\ \cdots,\ N)$$

其中 $L=T-U$ 称为拉格朗日函数或动势，T 是力学系统的动能，U 是力学系统的位能，q_i是力学系统的广义坐标，Q_i是作用在力学系统上的非保守广义力，N 是力学系统的自由度数。

（3） 达伦培尔原理与虚功原理。达伦培尔原理是力学系统上附加有惯性力作用时，作用在系统上的力系符合平衡条件。虚功原理给出力学系统平衡的充要条件，即作用在系统上的力系在其虚位移上所作的虚功和等于零。它给出了力学系统变分原理的微分形式，可以写为：

$$\sum_{i=1}^{p}(F_i\delta q_i)=0$$

其中 F_i是作用在系统上的力（包括外力，内力，以及惯性力等），δq_i是相应的虚位移，对于分布载荷将采取空间域的积分形式。

（4） 哈密尔顿变分原理。哈密尔顿变分原理是动力学普遍原理，又称为稳定作用量原理。它是力学系统变分原理的积分形式，可写为：

$$\delta\int_0^t(L+\sum_{i=1}^{p}(Q_i\delta q_i)dt=0$$

它在时间域$[0,\ t]$上的积分称为作用量。

（5） 柯丁变分原理。将动力学的基本关系式转换到拉氏域，动力学问题可由初边值问题变换为边值问题。从而给出拉氏域的变分原理。经拉氏逆变换，可给出在时间域内卷积形式的变分原理。

上述的这些基本原理将是我们研究结构动力学的重要理论基础。结构系统严格地说是一种具有无限多自由度的连续系统，并假设为具有线弹性性质的连续介质，则须把上述原理推广到线弹性连续介质，形成线弹性动力学的基本原理。

0.2.3 结构系统的数学模型

研究结构系统振动特性及其动力学问题首要的是建立结构系统的数学模型。当正确建立了结构系统数学模型，可分析结构动力学的各类问题。建模的方法，特别是动力学的有限元模型的建模方法，是结构动力学研究的重点。结构系统的动力学数学模型有着多种形式。根据所采用的描述参数不同可分为：

（1） 物理参数模型。它采用位移坐标作基本未知量，由刚度、惯性，阻尼等的力学性能数据来描述。这是与结构直接相关的力学模型基础上主成的，具有明显的物理意义，是数学模型的基本形式。

(2) 模态参数模型。它采用模态坐标作基本未知量，由频率、振型、阻尼比等模态参数来描述。它突出振动特性，具有解耦性，便于进行结构系统的动力响应分析。

(3) 响应参数模型。它采用输入与输出的关系式给出，是一种无参数形式的数学模型，用频率响应或脉冲响应来描述。这是系统分析的重要依据。

以上三种类型的数学模型是动力学建模的主要形式。结构动力学的数学模型是在时空域内生成的。在空间域内可分为：基本形式的位移空间数学模型和一般形式的状态空间数学模型。在时间域内可分为：时间域数学模型，拉氏域的数学模型和频率域的数学模型。各种不同形式的数学模型是从不同角度来描述结构系统的动力学行为。不同的描述侧重于反映某种特性，便于研究某一类问题，从而构成不同的研究方法。由于不同的数学模型所描述的是同一个结构系统，这些数学模型之间必须是可以相互转换，即具有相容性，以保证数学模型的统一性。

第一章　弹性动力学基础

§1.1　弹性动力学的基本概念与基本假设

1.1.1　连续介质的概念

力学系统最基本的概念是连续介质。物体从宏观上看是稠密的，无间隙的，我们称之为连续介质。固体、液体、气体等各种形态的物体一般地都可认为是连续介质。严格地说，从微观角度看，这种假设并不成立。但研究物体的运动规律和变形规律等力学行为是它的外部现象，并不涉及它的内部分子结构，连续介质假设已有足够的精确度。

描述一个物体须确定它的构形。物体在三维欧几里德空间内占据的一般是一个有界区域，它的内域用 V 来表示，它的边界用 S 表示。连续介质可由 $V+S$ 给出其构形。连续介质内任意点 P 的位置由欧几里德空间中的三个坐标(x_1,x_2,x_3)给出，即

$$P(x_i)=P(x_1,x_2,x_3) \qquad \in \qquad V+S$$

连续介质进行力学分析时，取其微体作为基本元件。微体是在各个方向上取微分长度的微小物体。这种基元在宏观上是无限小，在微观上是无限大。它们的集合是稠密的，无间隙的，构成了连续介质。

1.1.2　基本假设

弹性动力学是在更普遍的意义上研究线性动力学系统的力学行为。它的理论基础是建立在连续介质力学的基础之上。连续介质的基本假设有：

（1）　连续性假设。这是连续介质的基本属性，是几何变形方面的假设。物体在任一瞬时的构形都是稠密的、无间隙的。这一点在 1.1.1 节内已作了阐述。

（2）　均匀性假设。均匀性是指连续介质各处力学性能都相同，是物理方面的假设。金属材料在宏观上是满足均匀性假设的，而且还具有各向同性性质，即在连续介质同一地点不同方向上力学性能皆相同。新材料的出现，如复合材料等多相材料，缺乏这种均匀性，更没有各向同性性。在这种情况下一般仍假设宏观上的均匀性，但须引入各向异性的概念。在本课程内不作特殊的说明时，认为均匀性假设是成立的。

（3）　线性化假设。力学现象本质是非线性的，不论几何上、物理上，以至边界上都存在着非线性因素。工程上大量问题都作线性化假设。在几何方面，若物体的变形比较小，几何上的非线性可以忽略不计，认为位移与应变之间存在线性关系。在物理方面，材料的本构关系及其工作段的特性决定了物理上的线性化程度。一般弹性材料在小变形情况下存在应力与应变的线性关系。本课程所讨论的是线弹性动力学。

1.1.3　场变量的概念

连续介质的各种力学量，例如位移 u_i、作用力 f_i等等，都是位置 x_i的函数，称之为场变

量，记作 $u_i(x_i)$，$f_i(x_i)$ 等。

连续介质是由无限多个基元构成，描述连续介质的位移场变量有无限多个独立变量，故连续介质是个无限自由度力学系统。连续介质的稠密性和无间隙性决定了位移场变量的连续性，以保证在发生位移后仍然是稠密和无间隙的。故位移场变量在空间域内是位置 x_i 的单值、连续函数。

位移场变量有三种表示形式：

(1) 向量形式。连续介质内点 P 的位置用它的向径 $\mathbf{r}$ 表示

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

其中 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 是笛卡儿坐标系的单位向量。位移场变量表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$$

所有的向量均用粗体字表示。

(2)张量形式。连续介质内点 P 位置用张量表示为 x_j，下标 j 是循环变量，j 分别取值为 1，2，3，由它表示笛卡儿坐标系内的三个坐标值。则位移场变量为

$$u_i = u_i(x_j)$$

所有的张量均用带循环下标变量的细体字表示。

(3)矩阵形式。连续介质内点 P 的位置用列阵 $\{x\}$ 表示，即

$$\{x\} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$$

这列阵又称为列向量。位移场变量可表示为

$$\{u\} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T$$

所有的矩阵用括号括起来。

上述的三种表示形式有各自优点，它们既然表示同一个量，可以相互转换，甚至混用。

1.1.4 时间的概念

弹性动力学研究必须引入时间概念。不仅需要了解它在某个瞬时力学行为，而是必须更真实，更全面地掌握它在整个时间过程中的力学行为。瞬时将用 t 表示，时间历程是从初瞬 t_0（或 0）到末瞬 t_m（或 t）的整个时间过程，即

$$t \in [t_0,\ t_m]$$

弹性系统的各种场变量不仅是位置 P 的函数，而且是时间 t 的函数，例如位移场变量

$$u_i = u_i(x_j, t) \qquad x_j \in V + S \quad ; \ t \in [t_0, t_m]$$

动力学中各种场变量是时、空域内的函数。

§ 1.2　位移、变形与应变分析

1.2.1　位移与变形梯度

弹性体在不同瞬时占据空间的不同位置，形成不同的构形。为分析弹性体的位移，必须有一个参考构形。取运动开始时的初始构形为参考构形，通常它是未变形的自然构形。在某个瞬时的构形称为瞬时构形，是变形构形。弹性体上某点的位移是从初始构形上点 P 到瞬时构形上对应点 p 构成的向量 $u_i(i=1,2,3)$，见图 1.1。

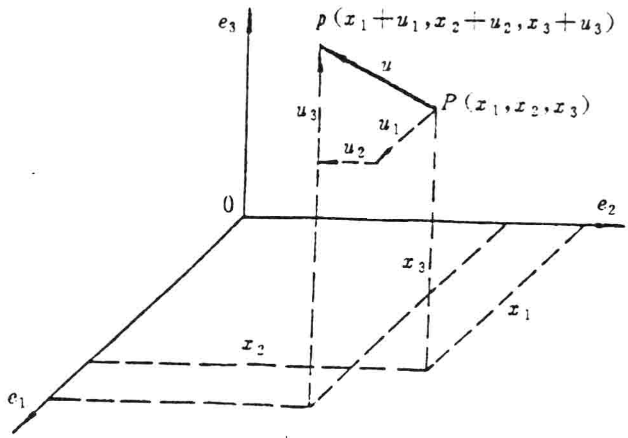

图　1.1　　弹性体的位移

由于引入小变形线性化假设，采用以初始构形为参考构形表示弹性体位移的拉格朗日方法，则弹性体的位移场变量定义为

$$u_i = u_i(x_j, t) \tag{1.1}$$

位移向量在欧几里德空间内选用笛卡尔坐标系描述，它的单位向量为 $\mathbf{e}_i$，即

$$\mathbf{u} = u_i \ \mathbf{e}_i$$

等式右端是张量表示形式，其中重下标变量相乘表示循环相乘求和。

在初始构形中微体是以 P 点为顶点，在坐标方向 $\mathbf{e}_i$上取微分长度 dx_i所组成的微小长方体。当弹性体发生位移后，在瞬时构形中的微体改变为以 p 点为顶点的一个变形体。在第一个坐标方向上的线段 $dx_1\mathbf{e}_1$变形后为 $\mathbf{dX}_1$，用笛卡尔坐标系内的三个投影分量表示为：

$$\mathbf{dX}_1 = \begin{Bmatrix} (1+u_{1,1})\ dx_1\ \mathbf{e}_1 \\ u_{2,1}\ dx_1\ \mathbf{e}_2 \\ u_{3,1}\ dx_1\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix}$$

这里 $u_{i,j}$表示的是位移分量 u_i对坐标 x_j的偏导数，即

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

其它二个坐标方向上有类似的公式，综合写为下表：

$$F = \begin{bmatrix} 1+u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & 1+u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1+u_{3,3} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

这个表由九个量组成的张量称为变形梯度张量。

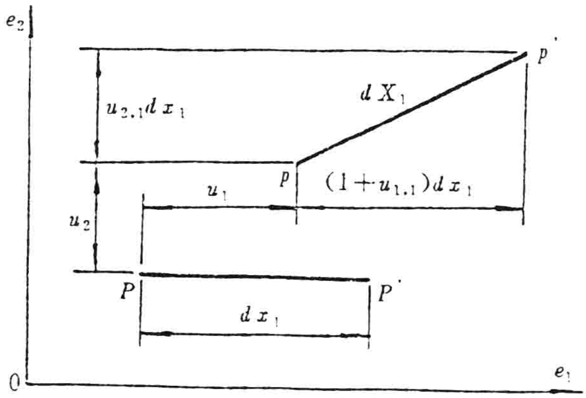

图 1.2　　变形梯度

微体的刚体平动位移是由位移 u_i给出，绕 $\mathbf{e}_k$轴的刚体转动由下式给出

$$\omega_k = \frac{u_{i,j} - u_{j,i}}{2} \tag{1.3}$$