2015考研数学权威专家辅导系列

# 2015考研数学

# 命题人

# 历届真题权威解析

## 数学二

刘德荫　童　武/主编

**考研原命题组组长、阅卷组组长亲自把脉，经典、实战、权威**

- 全方位、多角度详解2014-1987年历届考研数学二试题
- 深挖命题规律，让考生全面了解历年试题的命题依据和解题技法
- 超值赠送：北京大学研究生考研数学高分复习秘籍
- 超值赠送：国家考研数学理工类命题组原组长2套命题密押试卷与精解

中国致公出版社

20 辅导系列

# 2015考研数学

# 命题人

# 历届真题权威解析

## 数学二

刘德荫　童　武/主编

**考研原命题组组长、阅卷组组长亲自把脉，经典、实战、权威**

- 全方位、多角度详解2014－1987年历届考研数学二试题
- 深挖命题规律，让考生全面了解历年试题的命题依据和解题技法
- **超值赠送：北京大学研究生考研数学高分复习秘籍**
- 超值赠送：国家考研 2套命题密押试卷与精解

中国致公出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

2015 考研数学命题人历届真题权威解析. 数学二 / 刘德荫，童武主编. —北京：中国致公出版社，2014

ISBN 978-7-5145-0720-1

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①刘… ②童… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 026208 号

**2015 考研数学命题人历届真题权威解析. 数学二　刘德荫，童　武 主编**

责任编辑：董拯民　董　亮
责任印刷：岳　珍

出版发行：中国致公出版社
地　　址：北京市朝阳区八里庄西里 100 号住邦 2000 商务中心 1 号楼东区 15 层
邮　　编：100025
电　　话：010-82259658(总编室)　62082811(编辑部)
　　　　　010-85869872(发行部)
经　　销：全国新华书店
印　　刷：北京温林源印刷有限公司
开　　本：787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张：19
字　　数：334 千字
版　　次：2014 年 4 月第 1 版　　2014 年 4 月第 1 次印刷

定　　价：31.80 元

# 前言 Foreword



中国已经走上了国际化的道路，改革开放已经在向纵深方向发展，与国外进行经济、贸易、科学、教育、管理和军事等领域的合作也更加紧密，对我国人才的知识水平也提出了更高的要求，对硕士研究生等高层次人才的需求不断增加，这方面的教育也在稳步发展，考生人数也在迅猛增加。考试竞争非常激烈。而拥有一套内容完整，编排合理，分析透彻，解答规范，总结到位的数学历年真题，则是广大准备考研同学的期盼。自1987年全国工学、经济学硕士研究生入学考试实行统一以来，时至今日，已有28载。历届试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，也是命题组专家的智慧结晶。

本书严格按照最新的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求和精神编写。本书对历年考研真题逐题给出了详细解答，并尽量做到一题多解。只要认真分析研究，了解消化和掌握历年试题，便能发现数学考试试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性。考生也可以发现命题特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢，事半功倍。

**本书的特点：**

**一、系统、全面、权威**

本书囊括1987—2014年的完整的真题。旨在让考生对历年考研真题有一个完整的印象，从总体上了解考研数学命题的基本形式和题型规律。

**二、精辟阐明解题思路、详细解析历年真题的易丢分点、重点和难点**

本书对每道试题不仅给出了详解，还在逐题解析历年考研数学试题的基础上，给重要的、易丢分的题目做了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点，还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体题目，分析考生常犯的错误，让考生引以为戒；各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。其中的每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重点、难点，以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从而从容应考，轻取高分。

"宝剑锋从磨砺出，梅花香自苦寒来。"成功源于努力拼搏，源于自信。

我们深信，考生仔细研读本书后，必能上一个新台阶。最后祝愿各位考生都能圆名校之梦！

编者　于清华园

# 目录 Contents

## 2014—1987 年考研数学二试题和解析

## 考研数学超值赠送宝典 数学二

# 2014—1987 年
# 考研数学二试题和解析

# 2014 年考研数学二试题



一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)当 $x\to0^+$ 时,若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 $x$ 高阶的无穷小,则 $\alpha$ 的取值范围是 ( )

(A)$(2,+\infty)$ (B)$(1,2)$

(C)$(\frac{1}{2},1)$ (D)$(0,\frac{1}{2})$

(2)下列曲线有渐近线的是 ( )

(A)$y=x+\sin x$ (B)$y=x^2+\sin x$

(C)$y=x+\sin\frac{1}{x}$ (D)$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

(3)设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 内 ( )

(A)当 $f'(x)\geqslant0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$ (B)当 $f'(x)\geqslant0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$

(C)当 $f''(x)\geqslant0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$ (D)当 $f''(x)\geqslant0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$

(4)曲线 $\begin{cases}x=t^2+7\\y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是 ( )

(A)$\frac{\sqrt{10}}{50}$ (B)$\frac{\sqrt{10}}{100}$ (C)$10\sqrt{10}$ (D)$5\sqrt{10}$

(5)设函数 $f(x)=\arctan x$,若 $f(x)=xf'(\xi)$,则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=$ ( )

(A)1 (B)$\frac{2}{3}$ (C)$\frac{1}{2}$ (D)$\frac{1}{3}$

(6)设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续,在 $D$ 的内部具有 2 阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\neq0$ 及 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$,则 ( )

(A)$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 $D$ 的边界上取得

(B)$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 $D$ 的内部取得

(C)$u(x,y)$ 的最大值在 $D$ 的内部取得,最小值在 $D$ 的边界上取得

(D)$u(x,y)$ 的最小值在 $D$ 的内部取得,最大值在 $D$ 的边界上取得

(7)行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

(8) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的　　(　　)

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

**二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.**

(9) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=$ ________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$,则 $f(7)=$ ________.

(11) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数,则 $\mathrm{d}z\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$ ________.

(12) 曲线 $L$ 的极坐标方程是 $r=\theta$,则 $L$ 在点 $(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是________.

(13) 一根长为 1 的细棒位于 $x$ 轴的区间 $[0,1]$ 上,若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$,则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$ ________.

(14) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 $a$ 的取值范围是________.

**三、解答题:15~23 小题,共 94 分,请将解答写在答题纸指定位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.



(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$,且 $y(2)=0$,求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,计算 $\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 10 分)设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数,$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$,若 $f(0)=0,f'(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)设函数 $f(x),g(x)$ 的区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加,$0\leqslant g(x)\leqslant 1$,证明:

(Ⅰ) $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a,x\in[a,b]$,

(Ⅱ) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

(20)(本题满分 11 分)设函数 $f(x)=\frac{x}{1+x},x\in[0,1]$,定义数列

$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$,记 $S_n$ 是曲线 $y=f_n(x)$,直线 $x=1$ 及 $x$ 轴所围成平面图形的面积,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

(21)(本题满分 11 分)已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$,且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)$,求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

(22)(本题满分 11 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(23)(本题满分11分)证明 $n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

**2014年考研数学二试题答案速查**

**一、选择题**

(1)B (2)C (3)D (4)C (5)D (6)A (7)B (8)A

**二、填空题**

(9)$\frac{3\pi}{8}$ (10)1 (11)$-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$ (12)$y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$ (13)$\frac{11}{20}$ (14)$[-2,2]$

**三、解答题**

(15)$\frac{1}{2}$ (16)当 $x=1$ 时,$y''=-1<0$,故 $x=1$ 为极大值点,极大值为 $y=1$;

当 $x=-1$ 时,$y''=2>0$,故 $x=1$ 为极小值点,极大值为 $y=0$.

(17)$-\frac{3}{4}$ (18)$f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u.$

(19)(Ⅰ)因为 $0\leqslant g(x)\leqslant 1,x\in[a,b]$

所以有 $\int_a^x 0\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t$,即 $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a,x\in[a,b]$

(Ⅱ)则 $\varphi'(x)\geqslant f(x)g(x)-f(x)g(x)=0,x\in[a,b]$

又 $\varphi(a)=0$,从而可知 $\varphi(b)\geqslant\varphi(a)=0$,即 $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$,得证.

(20)1 (21)$(2\ln 2-\frac{5}{4})\pi$

(22)(Ⅰ)$\boldsymbol{\xi}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$

(Ⅱ)综上可得,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-k_1+2&-k_2+6&-k_3-1\\2k_1-1&2k_2-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$(其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意常数).

(23)由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\cdots\lambda_n=0$;

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1=n,\mu_2=\cdots\mu_n=0$;

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化;

又 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=1$,对应有 $n-1$ 个特征向量,故 $\boldsymbol{B}$ 也可对角化.

综上,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 特征值相同且均可对角化,故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似,得证.

# 2014 年考研数学二试题参考答案与解析

一、选择题

1.【答案】 B

【考点提示】 等价无穷小

【解析】 当 $x \to 0^+$ 时，$\ln^\alpha(1+2x) \sim (2x)^\alpha$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim (\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}}$

因为 $\ln^\alpha(1+2x)$ 和 $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 $x$ 高阶的无穷小，

所以有 $\alpha > 1$ 且 $\frac{2}{\alpha} > 1$，解得 $1 < \alpha < 2$，即 $\alpha \in (1,2)$. 正确答案为 B.



2.【答案】 C

【考点提示】 曲线的斜渐近线

【解析】 曲线的斜渐近线为 $y = ax + b$，其中 $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax]$. 垂直和水平渐进线分别为 $x = c$ 和 $y = d$，其中 $c = \lim\limits_{y\to\infty} f(x)$，$d = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. 四个选项中，

(A) $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$，$b = \lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在，$c$ 和 $d$ 也不存在；

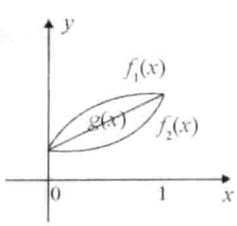
(B) 和 (D) $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ 不存在，$c$ 和 $d$ 也不存在；

(C) $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right) = 1$，$b = \lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x} = 0$.

综上，只有选项 C 有斜渐近且为 $y = x$，$c$ 和 $d$ 也不存在.

3.【答案】 D

【考点提示】 导数几何意义的应用




【解析】 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 分别对应函数 $f(x)$ 所表示曲线的斜率和凸凹性；

$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x = [f(1) - f(0)]x + f(0)$，表示 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间内两个端点的连线. 据此考虑作如下图：

根据曲线形状可知，$f_1'(x)\geq 0$，$f_2'(x)\geq 0$，$f_1''(x)\leq 0$，$f_2''(x)\geq 0$，$f_2(x)\leq g(x)\leq f_1(x)$由此可判断，当$f''(x)\geq 0$时，$f(x)\leq g(x)$，正确答案为D.

4.【答案】 C

【考点提示】 曲线的曲率与曲率半径

【解析】 由曲线参数方程可得$x_t'=2t$，$y_t'=2t+4$，

则$y_x'=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{t+2}{t}$，$(y_x')_t'=-\dfrac{2}{t^2}$，$y_x''=\dfrac{(y_x')_t'}{x_t'}=-\dfrac{1}{t^3}$

根据曲率公式$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$得$K_{t=1}=\dfrac{\left|-\dfrac{1}{1^3}\right|}{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$，

所以曲率半径为$10\sqrt{10}$，选C.

5.【答案】 D

【考点提示】 函数的极限

【解析】 由$f(x)=\arctan x$，$f(x)=xf'(\xi)$得，

$\arctan x=x\cdot\dfrac{1}{1+\xi^2}$，即$\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3(1+x^2)}=\dfrac{1}{3}$，正确答案为D.

6.【答案】 A

【考点提示】 二元函数的极值与最值

【解析】 令$A=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，$C=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

则依题意可知，$B\neq 0$，$A+C=0$，

故而$AC-B^2=-A^2-B^2<0$，即区域$D$内无极值，正确答案为A.

7.【答案】 B

【考点提示】 行列式求值

$$原行列式=\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_4\Leftrightarrow r_1}-\begin{vmatrix}c&0&0&d\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&a&b&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_3\Leftrightarrow c_1}\begin{vmatrix}0&0&c&d\\0&0&a&b\\d&c&0&0\\b&a&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2\cdot 2}\begin{vmatrix}d&c\\b&a\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}=(ad-bc)(bc-ad)=-(ad-bc)^2$$，即正确答案为B.

8.【答案】 A

【考点提示】 向量组的线性相关性

【解析】 由$(\boldsymbol{\alpha}_1+\mathrm{k}\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\mathrm{l}\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\\mathrm{k}&1\end{pmatrix}$可知，因为$(\boldsymbol{\alpha}_1+\mathrm{k}\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\mathrm{l}\boldsymbol{\alpha}_3)$是二维向量组，而$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$是三维向量组，所以$\boldsymbol{\alpha}_1+\mathrm{k}\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\mathrm{l}\alpha_3$线性无关，无法推出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，条件不充分；

而当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关时，因为$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$，所以$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1+\mathrm{k}\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\mathrm{l}\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，即$\boldsymbol{\alpha}_1+\mathrm{k}\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\mathrm{l}\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，条件充分.

综上，正确答案为A.

**二、填空题**

9.【答案】 $\dfrac{3\pi}{8}$

【考点提示】 广义积分

【解析】 $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^1\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\lim\limits_{b\to-\infty}\frac{1}{4}\int_b^1\frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^2}dx$

$=\lim\limits_{b\to-\infty}\frac{1}{2}\int_b^1\frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^2}d\frac{x+1}{2}=\lim\limits_{b\to-\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_b^1=\lim\limits_{b\to-\infty}\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{b+1}{2})$

$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})=\frac{3\pi}{8}.$

10.【答案】 1

【考点提示】 函数的周期性、奇偶性

【解析】 因为$f(x)$是周期为4的可导奇函数，

所以$f(7)=f(2\cdot4-1)=f(-1)=-f(1)$，且$f(0)=0$.

由$f'(x)=2(x-1)$可得$f'(x)=x^2-2x+c$，

又$f(0)=0$，则$c=0$，即$f(x)=x^2-2x$且$f(1)=-1$，

则$f(7)=-f(1)=1$.

11.【答案】 $-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$

【考点提示】 隐函数求导

【解析】 方程$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$两边对$x$求偏导可得，

$2ye^{2yz}\frac{\partial z}{\partial x}+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0$，解得$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2ye^{2yz}+1}$，

两边再对$y$求偏导可得，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y+2ze^{2yz}}{2ye^{2yz}+1}$

当$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$时，$z=0$，则$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$

$dz=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy.$

12.【答案】 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

【考点提示】 函数的坐标转换、曲线的切线方程

【解析】 极坐标方程$r=\theta$用直角坐标系表示为$\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，

两边对$x$求导可得，$\frac{x+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x\cdot y'-y}{x^2+y^2}$

又点$(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，即为$(x,y)=(0,\frac{\pi}{2})$，代入上式可得$y'\Big|_{(0,\frac{\pi}{2})}=-\frac{2}{\pi}$

从而切线方程为$y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$，即$y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$.

13.【答案】 $\frac{11}{20}$

【考点提示】 定积分的应用

【解析】 因为$\int_0^1(-x^2+2x+1)dx=(-\frac{1}{3}x^3+x^2+x)\Big|_0^1=\frac{5}{3}$，

$\int_0^1x(-x^2+2x+1)dx=(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{11}{12}$

所以质心的坐标为 $\bar{x}=\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\dfrac{11}{20}$.

14.【答案】 $[-2,2]$

【考点提示】 二次型的矩阵、惯性指数

【解析】 题设二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$,设其三个特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=a^2-4$

因为题设二次型的负惯性指数为 1,所以有且只有一个特征值为负值,不妨设 $\lambda_1<0$,则 $\lambda_2\geqslant0,\lambda_3\geqslant0$,从而有 $|A|=a^2-4\leqslant0$,即 $-2\leqslant a\leqslant2$.

当 $|A|=a^2-4=0$,即 $a=\pm2$ 时,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-a\\0&\lambda+1&-2\\-a&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-a^2(\lambda+1)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-4(\lambda+1)=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$$

则 $\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$,满足题意. 故综上有,$-2\leqslant a\leqslant2$.

三、解答题

15.【考点提示】 求函数的极限

【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

16.【考点提示】 函数的极值

【解析】 由 $x^2+y^2y'=1-y'$ 得 $(1+y^2)dy=(1-x^2)dx$,

两边积分得,$y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+C$

由 $y(2)=0$ 得 $C=\frac{2}{3}$,从而 $y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$

令 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}=0$,得 $x=\pm1$,

当 $x=1$ 时,$y=1$;当 $x=-1$ 时,$y=0$

又 $y''=\dfrac{-2x(1+y^2)-(1-x^2)\cdot2y\cdot y'}{(1+y^2)^2}$,

当 $x=1$ 时,$y''=-1<0$,故 $x=1$ 为极大值点,极大值为 $y=1$;

当 $x=-1$ 时,$y''=2>0$,故 $x=1$ 为极小值点,极大值为 $y=0$.

17.【考点提示】 二重积分

【解析】 平面区域 $D$ 关于 $y=x$ 对称,则根据对称性可得,

$$I=\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$