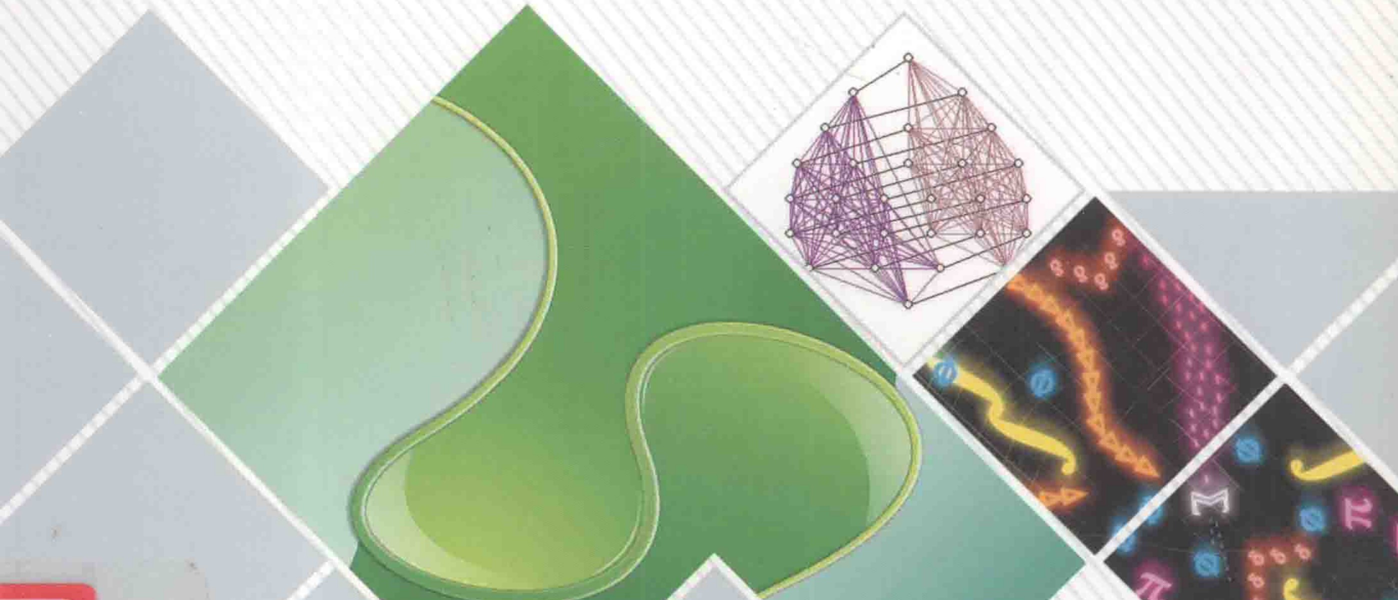
高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共课教材系列

应用微积分（上册）

刘春凤　主　编



科学出版社

www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共课教材系列

应用微积分

（上册）

刘春凤　主　编

马醒花　杨爱民　副主编

徐志元　梁彦冰　参　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

《应用微积分》面向接受高等教育的成人和大中专学生. 内容主要为一元函数微积分，考虑到不同读者应用微积分的需要，选编了向量代数、空间解析几何、无穷级数和常微分方程的初步知识.

本书结构严谨、逻辑清晰；约简理论推导、强调方法阐述、注重几何直观；力求通俗易懂、宜于自学；其中适度嵌入了与微积分相关的数学实验，意在提高读者应用微积分解决实际问题的能力.

本书可作为高等工科院校继续教育或大专教育的教材，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP) 数据

应用微积分（上册）/刘春凤主编. —北京：科学出版社，2010
（高等教育“十一五”规划教材·高职高专公共课教材系列）
ISBN 978-7-03-026803-7

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①微积分-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 024915 号

责任编辑：沈力匀/责任校对：耿　耘
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

百善印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2010 年 2 月第　一　版　　开本：787×1092　1/16
2010 年 2 月第一次印刷　　印张：13 1/2
印数：1—3 000　　字数：320 000

定价：22.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈百善〉）
销售部电话 010-62134988　　编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　言

17 世纪牛顿、莱布尼茨创立了以变量为研究对象的微积分学，经过几个世纪，现在的微积分内容丰富、体系完整、应用广泛，它作为现代数学知识的最大的公因子而当之无愧地成为高等院校一门重要的公共基础课. 目前微积分学涉及几乎所有的科技领域，已成为科技工作者强有力的工具，正像德国哲学家 J. F. Herbart（1776～1841）所说："谁要是不用数学来为自己服务，那有朝一日他就会发现，别人正在用数学来同自己对抗". 自 1969 年起建立的诺贝尔经济学奖的得主有半数以上得益于有效的应用现代数学知识. 可以说，一个人如果能掌握微积分思想和方法，无论在哪个领域工作，这一宝藏都能使他受益终身.

《应用微积分》是专门为成人接受高等教育和大中专学生而编写的教科书，内容主要为一元函数微积分，考虑到不同读者应用微积分的需要，我们选编了向量代数、空间解析几何、无穷级数和常微分方程的初步知识.

本书尽量努力吸收当前《高等数学（微积分）》教学改革成果，遵循教育部微积分课程教学基本要求，力求适合素质教育，培养学生的创新精神、应用意识. 通过本书的学习，使学生系统地获得高等数学的主要基本知识，掌握必要的基础理论和常用的计算方法，培养学生的抽象概括问题的能力、自学能力、较熟练的运算能力以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，为学生学习后续课程和进一步获得专业知识奠定必要的数学基础. 此外，本书适应分层次教学需求，突出重点、详略得当、通俗易懂，例题具有典型性，既便于教师讲授，更利于学生自学.

本书的教学参考时数为 128 学时，数学实验的内容可选讲，也可让学生课后自学.

《应用微积分》（上、下）的完成，归功于多年从事基础数学教学的马醒花副教授、米翠兰副教授的丰富教学经验，得益于年富力强的杨爱民和彭亚绵两位老师的辛勤工作，得力于徐志元、梁彦冰、刘琳琳、袁书娟几位老师的全力协助.

编者时间仓促，水平有限，纰误之处，恳请读者指正.

目　　录

（上册）

第 1 章　函　　数

一个国家只有数学蓬勃的发展，才能展现它国力的强大. 数学的发展和至善与国家繁荣昌盛密切相关.

拿破仑

宇宙之大，粒子之微，
火箭之速，化工之巧，
地球之变，生物之谜，
日用之繁，无处不用数学.

华罗庚

数学统治着宇宙.

毕达哥拉斯

1.1　预备知识

数学是科学的大门和钥匙.

培根

1.1.1　常见的实数集与记号

1. 自然数集

$$N = \{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

2. 整数集

$$Z = \{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots,\pm n,\cdots\}$$

其中偶数集：$\{x \mid x=2n, n\in Z\}$，奇数集：$\{x \mid x=2n+1, n\in Z\}$.

3. 有理数集

$Q = \{$有理数$\}$，其中：$Q^{+} = \{$正有理数$\}$，$Q^{-} = \{$负有理数$\}$.

4. 无理数集

$$W = \{无理数\}.$$

5. 实数集

$R=(-\infty,+\infty)$，其中：$R^{+}=(0,+\infty)$，$R^{-}=(-\infty,0)$.

6. 二维平面

$$R^2=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)=\{(x,y)\mid x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\infty,+\infty)\}.$$

7. 三维空间

$$\begin{aligned}R^3&=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\\&=\{(x,y,z)\mid x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\infty,+\infty),z\in(-\infty,+\infty)\}\end{aligned}$$

推而广之，我们将 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 n 维空间，记为 R^n，即

$$R^n=R\times R\times\cdots\times R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_k\in R,k=1,2,\cdots,n\}$$

R^n 中的元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 记为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

n 维空间中的每一个元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为空间中的一个点或一个 n 维向量，数 x_k 称为该点的第 k 个坐标. 特别地，当所有 $x_k=0(k=1,2,\cdots,n)$ 时，称这样的元素为 R^n 中的零元，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$.

n 维空间 R^n 中两点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离定义为

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

特别地，点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和零元之间的距离为

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

1.1.2 实数的绝对值

1. 绝对值的定义

$$|a|=\begin{cases}a & a\geqslant 0\\ -a & a<0\end{cases}.$$

2. 绝对值的几何意义

$|a|$ 表示数轴上点 a 与原点之间的距离，如图 1.1 所示.

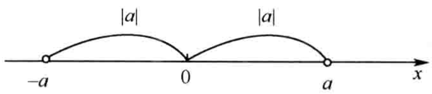


图 1.1

3. 绝对值的性质

(1) $|a|\geqslant 0$；

(2) $|a|=\sqrt{a^2}$；

(3) $|a|=|-a|$;

(4) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

4. 绝对值的运算性质

(1) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$;

(2) $|a|-|b|\leqslant |a-b|$;

(3) $|ab|=|a||b|$;

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　　$(|b|\neq 0)$;

1.1.3　邻域

邻域是高等数学中一个常用的概念，下面分类讨论之.

1. 直线上的点邻域

定义 1.1　设 $x_0\in R$，R 上所有与 x_0 的距离小于 $\delta(\delta>0)$的点集，称为 x_0 的 **δ-邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$. 由定义可见，x_0 的 δ-邻域的几何意义是以 x_0 为中心，以 δ 为半径的开区间，即

$$\begin{aligned}U(x_0,\delta)&=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}\\&=(x_0-\delta,x_0+\delta).\end{aligned}$$

如图 1.2 所示，其中 δ 是个小的正实数.

特别地，不包含中心点的邻域称为去心邻域，记作

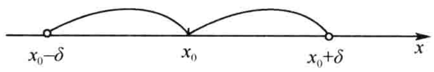


图 1.2

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}.$$

邻域的左半部和右半部分别称为左邻域和右邻域，记作

$$\text{左邻域：}U^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0);$$

$$\text{右邻域：}U^+(x_0,\delta)=(x_0,x_0+\delta).$$

2. 平面上的点邻域

平面上所有与 $P(x_0,y_0)$的距离小于 $\delta(\delta>0)$的点集，称为 $P(x_0,y_0)$的 δ-邻域，记作 $U(P,\delta)$. $U(P,\delta)$的几何意义是：以 $P(x_0,y_0)$为中心，以 δ 为半径的开圆域，如图 1.3 所示.

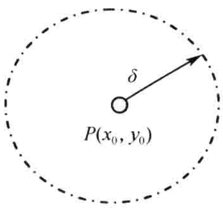


图 1.3

1.1.4　充分必要条件

一个数学命题，由条件和结论两部分组成，通常我们用 A 表示条件，B 表示结论.

1. 充分和必要条件

如果命题为“若 A 则 B”，那么称 A 为 B 的充分条件，B 为 A 的必要条件，记作$A \Rightarrow B$.

2. 充要条件

如果命题“若 A 则 B”与“若 B 则 A”同时成立，那么称 A 与 B 互为充分必要条件，简称充要条件，记作 $A \Leftrightarrow B$.

1.1.5 常用三角公式

在高等数学的学习过程中，会用到一些初等三角函数公式，为使用方便，我们把常用的三角公式列举如下.

1. 两角和差公式

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

2. 倍角公式

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

3. 降幂公式

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

4. 积化和差公式

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$
$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

5. 一个重要的三角函数不等式

$$\sin x < x < \tan x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

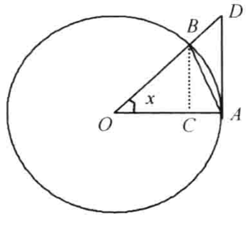


图 1.4

【证】 作一个单位圆，如图 1.4 所示，不妨设 $0<x<\frac{\pi}{2}$. 在单位圆上取圆心角 $\angle AOB = x$（弧度），于是有 $BC = \sin x$，AB 弧的弧长 $=x$，$AD = \tan x$ 由图不难看出，$S_{\triangle OAB} < S_{扇形OAB} < S_{\triangle OAD}$，也就是

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

从而有

$$\sin x < x < \tan x.$$

*1.1.6 极坐标

1. 极坐标系

平面直角坐标系是最简单又常用的一种坐标系，但不是唯一的坐标系. 下面介绍一种利用角和距离建立的坐标系——极坐标系.

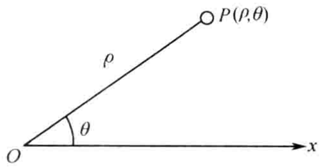


图 1.5

在平面内取一个定点 O，称为极点，引一条射线 Ox，称为极轴，再选定一个长度单位和角度的正方向(取逆时针方向). 对于平面内任意一点 P，用 ρ 表示线段 OP 的长度，θ 表示从 Ox 到 OP 的角度，ρ 称为点 P 的极径(恒取正值)，θ 称为点 P 的极角，有序数对 (ρ,θ) 称为 P 点的极坐标，这样建立的坐标系称为极坐标系，如图 1.5 所示.

当点 P 在极点时，它的极径 $\rho=0$，极角 θ 可以取任意值.

例如，如图 1.6 所示，在下面的极坐标系中，点 A、B、C、D、E、F、G 的坐标分别为

$A(3,0)$；　　$B\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$；

$C\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$；　　$D\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$；

$E(5,\pi)$　　$F\left(4,\frac{5\pi}{4}\right)$；

$G\left(5,\frac{7\pi}{4}\right)$.

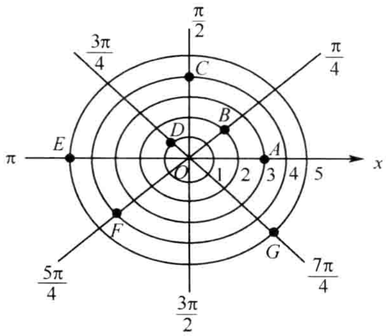


图 1.6

注：(1) 在极坐标系中，角度也可以取负值(顺时针方向为负)，例如，B、D、G 的坐标也可以写成 $B\left(2,-\frac{7\pi}{4}\right)$，$D\left(1,-\frac{5\pi}{4}\right)$，$G\left(5,-\frac{\pi}{4}\right)$.

(2) 极坐标系与直角坐标系不同的是，给定 ρ 和 θ，可以确定一个点 P，但是给定一个点 P，可以对应的极坐标有无数种表示方法. 这是因为 (ρ,θ) 和

$(\rho,\theta+2k\pi)$是同一点的极坐标. 为确定起见，我们规定：$0<\rho<+\infty$，$0\leqslant\theta<2\pi$（或$-\pi<\theta\leqslant\pi$），那么除极点外，平面内的点和极坐标就可以一一对应了.

2. 极坐标与直角坐标的互化

在平面上，同一个点可以用直角坐标表示，也可以用极坐标表示;同一条曲线可以有直角坐标方程，也可以有极坐标方程. 研究问题时，有时需要把在一种坐标系中的方程转化成另一种坐标系的方程，所以掌握极坐标与直角坐标的关系是必要的.

在平面上，让直角坐标系的原点O与极坐标系的极点重合，选直角坐标系的Ox轴的正半轴作为极轴，并在两种坐标系的坐标轴上取相同的长度单位. 设P为平面上任意一点，它的直角坐标为(x,y)，极坐标为(ρ,θ)，由图 1.7 不难看出两种坐标系的结构以及两种坐标的关系

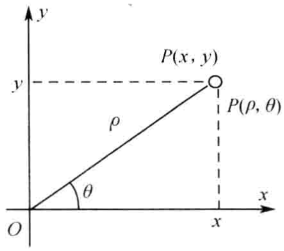
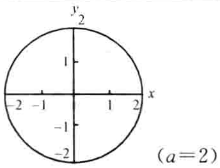
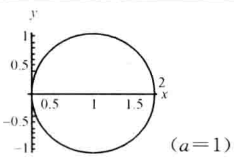
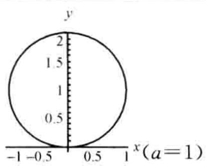


图 1.7

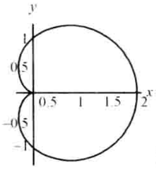
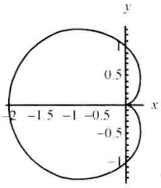
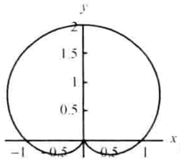
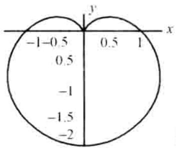
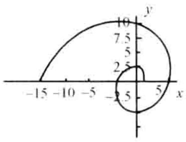
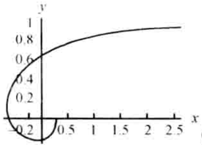
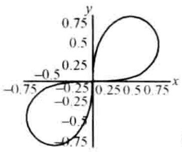
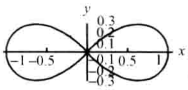
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases};$$
$$0\leqslant\rho<+\infty;$$
$$0\leqslant\theta<2\pi;$$
$$x^2+y^2=P^2;$$
$$\tan\theta=\frac{y}{x};$$
$$\theta=\arctan\frac{y}{x}.$$

为了读者使用方便,我们把常用的平面曲线的直角坐标方程和极坐标方程列表如表 1.1所示.

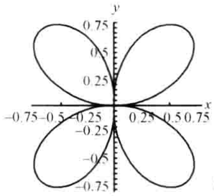
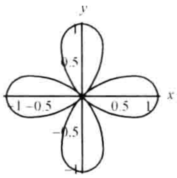
表 1.1

曲线	图　形	直角坐标方程	极坐标方程
圆		$x^2+y^2=a^2$	$\rho=a$
		$x^2+y^2=2ax$	$\rho=2a\cos\theta$
		$x^2+y^2=2ay$	$\rho=2a\sin\theta$

续表

曲线	图　形	直角坐标方程	极坐标方程
心形线	 $(a=1)$	$x^2+y^2=a(x+\sqrt{x^2+y^2})$	$\rho=a(1+\cos\theta)$
	 $(a=1)$	$x^2+y^2=a(-x+\sqrt{x^2+y^2})$	$\rho=a(1-\cos\theta)$
	 $(a=1)$	$x^2+y^2=a(y+\sqrt{x^2+y^2})$	$\rho=a(1+\sin\theta)$
	 $(a=1)$	$x^2+y^2=a(-y+\sqrt{x^2+y^2})$	$\rho=a(1-\sin\theta)$
对数螺线	 $(a=1)$	$\ln(x^2+y^2)=2a\arctan\dfrac{y}{x}$	$\rho=e^{a\theta}$
双曲螺线	 $(a=1)$	$\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{a}{\arctan\dfrac{y}{x}}$	$\rho=\dfrac{a}{\theta}$
伯努利双纽线	 $(a=1)$	$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$	$\rho^2=a^2\sin2\theta$
	 $(a=1)$	$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$	$\rho^2=2a^2\cos2\theta$

续表

曲线	图　形	直角坐标方程	极坐标方程
四叶玫瑰线	 ($a=1$)	$(x^2+y^2)^3=(2axy)^2$	$\rho^2=a^2\sin 2\theta$
	 ($a=1$)	$(x^2+y^2)^3=a^2(x^2-y^2)^2$	$\rho^2=a^2\cos 2\theta$

1.2　函　　数

我们知道的是很少的，
我们不知道的是无限的.

埃尔米特

成功公式：$w=x+y+z$
w 代表成功，
x 代表艰苦的劳动，
y 代表正确的方法，
z 代表少说空话.

爱因斯坦

初等数学与高等数学的区别在于初等数学的研究对象是常量，而高等数学的研究对象是变量. 函数就是一个变量，它是高等数学开篇最先遇见而且以后出现频率最高的概念，可以说高等数学的主要内容就是研究各类函数(初等函数、非初等函数、显函数、隐函数、变限函数等)的各种性质和形态，特别是函数的分析性质，例如函数的微积分性质等.

下面我们给出一元函数的定义.

定义 1.2　设有两个变量 x 和 y，D 为一非空实数集，如果对于每一个 $x\in D$，按照一定的规则，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$；其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 叫做函数 $f(x)$ 的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$. x 所对应的 y 值称为 x 的函数值；当 x 取遍 D 的各个值时，对应的函数值全体组成的集合称为函数的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即