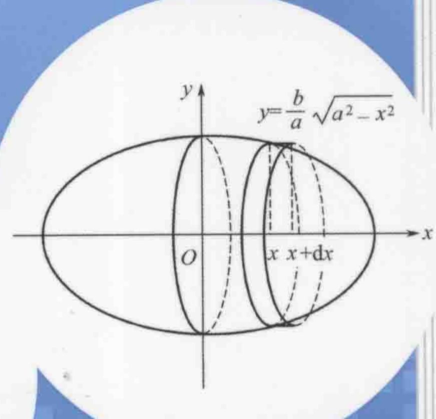
高职高专“十二五”规划教材

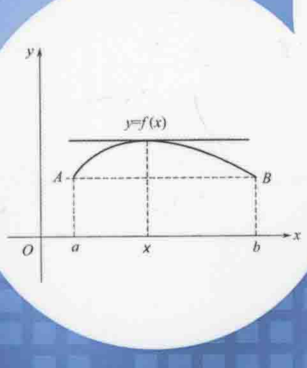
国家示范性 高职院校建设规划教材

微积分学基础

第二版

李建奎 主编





化学工业出版社

高职高专“十二五”规划教材

国家示范性高职院校建设规划教材

微积分学基础

第二版

李建奎　主　编

贺利敏　王剑红　陈从科　赵巧蓉　副主编

化学工业出版社

·北京·

本教材是按照教育部颁布的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，依据山西省级科研项目《高职高专高等数学教材开发研究》，由教学一线具有丰富教学经验的教师编写而成. 编写以“立足高职，培养素质、满足专业需求、引导应用”的原则，结合现阶段高职学生的基本素质现状与专业教学对基础学科“降低难度、适当扩大知识范围”的要求，在一元函数微积分学中适当融入多元函数微积分学知识，深入浅出，教学与自学相长. 本书包括函数与极限、微分学、积分学、常微分方程、MATLAB软件基本应用五部分内容，章末配备“阅读拓展”与“项目问题”，这对于增大知识形成的“弹性”、引申学生探究、便于能力考查十分有益.

本教材可作为工科类、管理类等在校高职高专大学生教学用书. 教学过程中可根据专业需求选择教学内容，教学课时基本约需76学时左右.

图书在版编目（CIP）数据

微积分学基础/李建奎主编. —2版. —北京：化学工业出版社，2010.7
高职高专“十二五”规划教材. 国家示范性高职院校建设规划教材
ISBN 978-7-122-14632-8

Ⅰ. 微… Ⅱ. 李… Ⅲ. 微积分-高等职业教育-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第138813号

责任编辑：韩庆利　　装帧设计：关　飞
责任校对：宋　夏

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张13¼　字数273千字　2012年10月北京第2版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：28.00元

第二版前言

“高素质、技能型人才”培养应是高职教育的目标追求．结合现阶段高职教育中，学生基本素质现状、学制和专业建设对高等数学教学的学时要求，都迫切需要相适应的教材建设．我们做了大量的分析、调研、尝试，通过简化理论、减少重复、系统整合知识点等手段，对数学知识进行必要的调整与重构，本书坚持以学生为本，传承数学思想，传授数学知识、传递数学技能的基础理念，客观把握教学内容的深度和广度，不过于追求数学理论的严密性，着力展现数学的直观性、应用性、逻辑思维培养．

本《微积分学基础》教材与以往传统《高等数学》教材比较，具有下列特点．

（1）本教材将一元函数与必要的多元函数微积分知识实现融合，体现了微积分学知识的基本全貌和知识的应用背景，扩大了知识面，避免了与初等数学知识衔接时的简单重复．

（2）对学生在初等数学中已学到的知识点，在课程讲解过程中不影响后续学习的知识点，通过列表给出，节省出部分学时．

（3）将原来讲解中的许多比较散乱的知识点进行了必要系统性协调，保证了学生对知识接受时的渐进、连贯性．

（4）在章节开始列出知识讲解脉络图，注重学生对知识整体与系统的把握，也使教师在讲授时层次明晰．

（5）重视学生良好思维方式的引导和培养，在新知识点形成初期给出“思考问题”，在章节末配备“阅读拓展”，增强了教学“弹性”，起到引领与启发思考的目的．

（6）基础部分不配备过多、过难的习题，但各章最后配备若干“项目问题”（要求学生以学习小组方式共同研究，并用小论文的形式选择其一完成），这能起到：引导应用所学知识进行分析研究、考核学生团结协作精神与解决实际问题能力的多重作用．也可作为学生能力测验的必要内容．

（7）降低了对理论的要求．一些结论的推导与证明采用“休闲”的方式（比如：凑微分法的介绍等）来叙述，消除了学生对数学知识的刻板印象，使知识接受更容易自然．

本教材是山西省省级科研课题——工学结合的校本教材建设的构成内容，编写的初稿完成后，山西省几所高职高专院校专家进行了听证，对书中的一些亮点给予了充分的肯定，提出了许多宝贵的建议，尤其是山西建筑职业技术学院的王庆云教授、山西工程职业技术学院富伯亭教授、山西职业技术学院杨俊萍教授，在此一并致谢．

本书由山西工程职业技术学院李建奎担任主编，山西建筑职业技术学院贺利敏、山西生物应用技术学院王剑红、山西交通职业技术学院陈从科、山西职业技术学院赵巧蓉担任副主编，第一章由山西工程职业技术学院李建奎编写，第二章第一至四节由山西工程职业技术学院田云霞编写，第二章第五至九节由山西工程职业技术学院宋姝编写，第三章第一至六节由山西生物应用技术学院王剑红编写，第三章第七至十节由陈从科编写，第四章由山西建筑职业技术学院贺利敏编写，第五章由山西建筑职业技术学院刘琨编写，全书习题及部分习题解答由山西交通职业技术学院李桂芳整理，各章阅读拓展及项目问题、附录等由赵巧蓉编写整理. 本书由李建奎、贺利敏统稿.

我们真切希望能为高职数学课程的科学设置与学生应用能力的培养做出努力，鉴于编者水平所限，书中难免有疏漏，恳请使用本书的广大师生批评指正，以便修订完善.

编　者

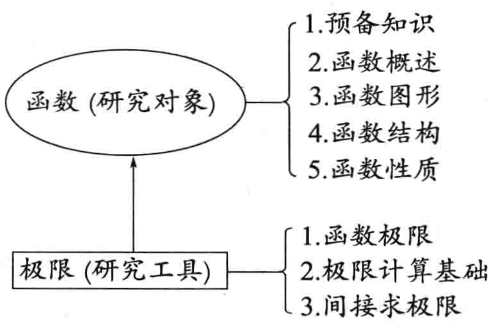
2012 年 5 月

目　录

第一章　函数与极限

函数是微积分学中的主要研究对象，极限是贯穿微积分学始末的重要方法和工具．微积分学知识对于解决许多工程实际问题都是得力工具．我们从函数开始介绍微积分学基础知识．

本章知识脉络结构



第一节　函　　数

一、预备知识

1. 数量与形态

事物的发展、变化从数学的角度来分析，一定意义上就是要研究和表述“数量”和“形态”的演化．

比如：(1) 某容器的容积大小、某地区一天中的气温变化、某人某次去超市购物的花销等等，都涉及对“数量”的表述．

(2) 某段铁路的铁轨走向、建筑物的某一钢梁形状、上抛物体的运行轨迹等等则是要对“形态”进行描述．

实数系是表述数量的基础，点是构成形态的基本元素．

先明确数学上关于数量与形态的基本含义：

数量分为常量和变量. 常量是指讨论范围内可看成不变的量，常用记号：a、b、c…；变量是指讨论范围内允许取不同值的量，常用记号：x、y、z….

现实中的点依据所处环境分为一维点（直线上的点）、二维点（平面内的点）、三维点（空间中的点）.

2. 常用参照系

点可以利用数量来代数表述，数量也可以用点几何直观，这就要用到所谓的参照系，简要介绍如下.

（1）一维参照系

数轴：规定了方向、原点、长度单位的有向直线称为数轴.

数轴上的点与实数间可建立一一对应关系. 就是说，每个一维点可用一个实数表述，反过来，全体实数被直观图示为有序而无始无终的“直线”（如图 1-1）.

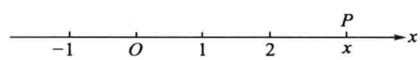


图 1-1　数轴

（2）二维参照系

平面直角坐标系：平面内两个相互垂直相交的数轴构成平面直角坐标系. 两坐标轴分别记为：x 轴（又称为横轴）、y 轴（又称为纵轴）；交点称为坐标原点；两坐标轴将平面分成四部分，每一部分称作一个象限.

平面直角坐标系下，一个二维点到 x 轴、y 轴的投影点数值构成的数组 (x,y) 用来确定和表示点的位置，称为该点的直角坐标. 四个象限内的各点的坐标符号分别是：Ⅰ（+，+）、Ⅱ（−，+）、Ⅲ（−，−）、Ⅳ（+，−）（如图 1-2）.

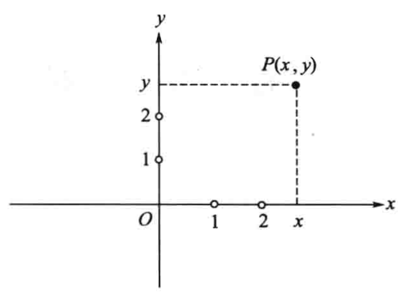


图 1-2　平面直角坐标系

平面极坐标系：平面内规定了起点、方向、长度单位的射线称为极轴，射线的起点称为极点，平面内的点到极点的距离称为该点的极半径 $\rho\,(\geqslant 0)$，平面内一点和极点的连线与极轴正向夹角称为极角 θ（一般规定 $0\leqslant\theta<2\pi$）. 这种用极半径与极角构成有序数组 (ρ,θ) 来确定和表达点位置的坐标系形式称为极坐标系，有序数组 (ρ,θ) 称为该点的极坐标（如图 1-3）.

为了方便与讨论更广泛的问题，极径取值也可以拓展为负值，极角拓展为任意角（可参考其它书籍）.

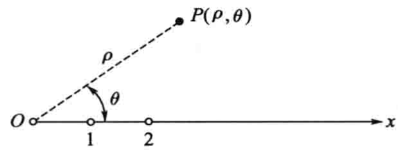


图 1-3　平面极坐标系

(3) 三维参照系

空间直角坐标系：作三条相互垂直并交于一点的数轴构成空间直角坐标系．三条数轴记为 x 轴（又称横轴）、y 轴（又称纵轴）、z 轴（又称竖轴）；交点称为坐标原点，空间直角坐标系有三个坐标面，即：xOy 面、yOz 面、zOx 面；三个坐标面将空间分成八部分，每一部分称为一个卦限．

空间直角坐标系用点到三个坐标轴的投影数值构成的有序数组 (x,y,z) 确定和表达该三维点位置，称为点的空间直角坐标．八个卦限内的各点坐标符号分别是：Ⅰ（＋，＋，＋）、Ⅱ（－，＋，＋）、Ⅲ（－，－，＋）、Ⅳ（＋，－，＋）、Ⅴ（＋，＋，－）、Ⅵ（－，＋，－）、Ⅶ（－，－，－）、Ⅷ（＋，－，－）（如图 1-4）..

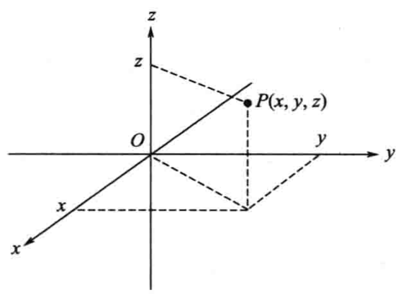


图 1-4　空间直角坐标系

空间柱面坐标系：空间直角坐标系中的 xOy 面以极坐标形式体现，竖轴坐标不变时的参照系称为空间柱面坐标系（如图 1-5）．

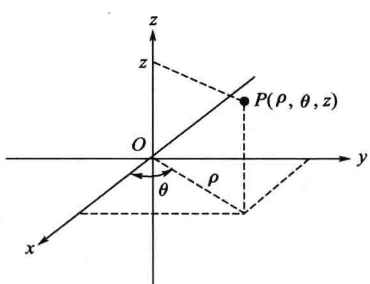


图 1-5　空间柱面坐标

可见，一个几维点就需要几个分量来表达其坐标．由常量构成的点称为定点，

含有变量的点称为动点.

比如：$A_0(1,0,4)$是一个三维定点；$A(x,3)$、$B(x,y)$ 都是二维动点.

3. 区间、区域与邻域

区间：数轴上介于 a、b（$a<b$）两点间的所有点构成的点集，称为有界区间，包括：开区间(a,b)、闭区间$[a,b]$、半开区间$[a,b)$、$(a,b]$；大于或等于 a、小于或等于 a 的所有点集及全体数轴上的点集则称为无界区间，包括：$(a,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,a)$、$(-\infty,a]$、$(-\infty,+\infty)$.

区域：平面曲线围成的点集、空间曲面围成的点集，分别称为平面区域和空间区域，常用记号：D、E、Ω 等.

区域可以用不等式组来刻画表示.

邻域：无论在数轴上、平面或空间内，以定点 P_0 为中心 δ 为半径范围内的点集 $U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|P-P_0|<\delta\}$称为点 P_0的 δ 邻域；点集 $U(\hat{P}_0,\delta)=\{P\,|\,0<|P-P_0|<\delta\}$称为点 P_0 的 δ 去心邻域；δ 称为邻域半径.

二、函数概述

1. 函数

事物间量的关系往往是相互关联的，一个变量的变化常常并不单独存在，经常是一个或一组相互独立的变量变化决定了另一变量的取值.

比如：① 圆的面积 s 大小由其半径 r 的大小来决定，决定关系为：

$$s=\pi r^2 \qquad r\in(0,+\infty)$$

② 超市中的三种商品销售单价分别是：a、b、c（元/kg），某日的销量分别是：x_1、x_2、x_3（kg），则超市因销售这三种商品而获得的收入 y 为：

$$y=ax_1+bx_2+cx_3 \qquad (x_i\geqslant 0 \quad i=1,2,3)$$

实际中大量存在着相关联的变量关系，刻画与表述这些关联变量关系，是分析与解决问题的基础.

定义 对于变量 x_1、$x_2\cdots x_n$ 的每一组同时允许的不同取值，按照某种对应关系都能确定变量 y 的相应值，这种变量间的确定关系称为一个 n 元函数，记成：$y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$，简记为：$y=f(P)$；

变量 x_1、$x_2\cdots x_n$ 称为函数的自变量；y 称为因变量；

f 表示自变量对因变量的确定关系，称为函数关系（通常是一个计算式或是一种对应式）；

点集区域 $D=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)\mid x_1、x_2、\cdots x_n$所有同时允许的不同取值$\}$称为函数的定义域；

数集 $f(D)=\{y\,|\,y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)\ (x_1、x_2、\cdots x_n)\in D\}$称为值域.

自变量、因变量、函数关系、定义域、值域并称为函数因素.

注意：(1) 一个定点确定的函数值不要求唯一，如果唯一时称为单值函数，不唯一时称为多值函数.

(2) 自变量与因变量用何字母表示只是形式问题，而值域显然取决于函数关系与定义域，所以函数的决定因素是：函数关系与定义域.

(3) 以后给出函数，没有标明定义域的，定义域均指自变量同时允许取值的点集.

比如：(1) 函数 $z=\dfrac{3x+2y}{\sqrt{1+y^2}}$，$x$、$y$ 是自变量，z 是因变量，函数关系 $f=\dfrac{3(\quad)+2[\quad]}{\sqrt{1+[\quad]^2}}$（一个算式），定义域 $D=\{(x,y)\mid x\in R,\ y\in R\}$，值域 $E=\{z\mid z\in R\}$，这是一个二元单值函数.

(2) 函数 $y^2+x^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm\sqrt{1-x^2}$，$x$ 是自变量，y 是因变量，函数关系 $f=\pm\sqrt{1-(\quad)^2}$，定义域 $x\in[-1,1]$，值域 $y\in[-1,1]$，这是一个一元多值函数.

(3) 函数 $y=\sin x$，x 是自变量，y 是因变量，函数关系 $f=\sin$（一种对应式）定义域 $x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $y\in[-1,1]$，它是一元单值函数.

【例 1】 求下列函数定义域.

(1) $y=\dfrac{3x}{x^2-2|x|}$；　　　　(2) $z=\dfrac{y^2-2x}{\ln xy}$.

解 (1) 该函数是分式，分母只要不为 0 就有意义，所以 $x^2-2|x|\neq 0$

解得：$x\neq 0,-2,2$，即定义域为 $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 该函数是二元分式函数，且分母中含有对数，运算要有意义，就要求

$\begin{cases} xy>0 \\ \ln xy\neq 0\end{cases}$，解得：$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ xy\neq 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ xy\neq 1\end{cases}$，即定义域是：$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ xy\neq 1\end{cases} \text{或} \begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ xy\neq 1\end{cases}\right\}$.

2. 函数表达形式

实际中，函数的表达形式有多种，概括起来如下：

$$\text{函数表达形式：}\begin{cases} 1.\ \text{解析式}\begin{cases} \text{①显式} \\ \text{②隐式} \\ \text{③分段式} \\ \text{④含参式}\end{cases} \\ 2.\ \text{图像式} \\ 3.\ \text{表格式}\end{cases}$$

【例 2】 函数表达形式举例.

(1) $y=x^2-x$，$x\in[-1,3]$；

这一函数中因变量由自变量的关系式直接表达出来，称为一个解析显式函数.

(2) $2x^2-y^2=1$；

该函数中，因变量 y 没有被自变量 x 的关系式直接表示出来，这是一个解析隐式函数，经显化为：$y=\pm\sqrt{2x^2-1}$.

注意：不是所有解析隐式函数都可以显化.

如：$e^{xy}+\sin(x+2y)=1$ 就不可显化.

(3) $y=\begin{cases}3x^2+2 & x\in(-\infty,1]\\ 1-x^2 & x\in(1,+\infty)\end{cases}$；

该函数定义域的两个不同区间 $x\in(-\infty,1]$ 与 $x\in(1,+\infty)$ 内，函数的解析表达式不能统一，称为一个分段函数.

注意：分段函数不论有多少“段”都是一个函数；计算分段函数的函数值时，自变量取值必须代入所对应的解析式中去计算.

如：上述分段函数中函数值：

$$y(0)=3\times0^2+2=2\text{；}y(2)=1-2^2=-3.$$

(4) $\begin{cases}x=2t\\ y=2-t^2\end{cases}\quad t\in[0,1]$；

该联立方程组中，两变量 x 与 y 的关系是通过参数 t 间接相联系，称为一个含参数函数；经过消去参数可化为解析显式函数：$y=2-\dfrac{1}{4}x^2\quad x\in[0,2]$.

注意：参数的取值范围不是定义域；不是所有含参函数均可以消参显化.

(5) 某学校一年级 8 个班级，期末数学考试平均成绩如下：

班级编号 k	1	2	3	4	5	6	7	8
数学平均成绩 $\overline{Q}$	88.3	86.8	89.7	85.6	87.4	90.1	89.4	86.5

这是班级编号 k 与平均成绩 $\overline{Q}$ 间的表格式函数.

(6) 某气象台，气温记录仪绘制的某日凌晨 0 时到中午 12 时气温变化曲线（如图 1-6），这是气温 Q 随时间 t 变化的图像式函数.

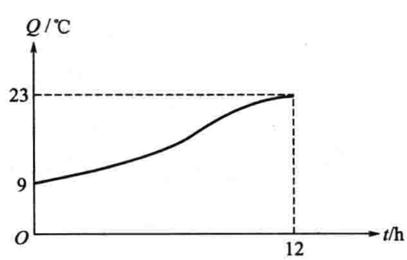


图 1-6 某气象台记录气温变化曲线

一般而言，解析式表达简练、易于讨论；图像式表达直观明晰；表格式表达准

确直接；同一个函数可以有不同的表达形式.

习题 1-1

1. 几何图示.

(1) 空间直角坐标系下的点：$A(1,-2,3)$、$B(0,2,-1)$、$C(0,0,3)$，说明其所处位置.

(2) 平面极坐标系下点：$A(2,\frac{\pi}{3})$、$B(1,\frac{7\pi}{6})$、$C(3,0)$、$D(0,\frac{\pi}{4})$.

(3) 区间 $I(-1,5]$、区域 $D: x^2+y^2<4$、邻域 $U\left(\hat{4},\frac{1}{2}\right)$.

(4) 不等式组 $\begin{cases} y \geqslant x^2 \\ y < x+1 \end{cases}$ 表示的平面区域.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1+\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$；

(2) $y=\begin{cases} 1+x & 0 \leqslant x < 1 \\ \sqrt{x-1} & x \geqslant 1 \end{cases}$；

(3) $z=\dfrac{2y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.

3. 某房屋建筑上的窗户是由矩形与半圆构成，(如图 1-7 所示) 若采光面积为定值 a，试确定矩形的长与高的函数关系.

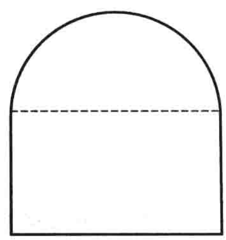


图 1-7　窗户形状示意

4. 一经销处有 680 块某种建筑瓷砖，购买 200 块以内时，每块售价 50 元，超过 200 块，但不超过 400 块时，超过部分 9 折出售，超过 400 块时，超过部分 8 折出售，试确定销售收入与销售量间的函数关系.

5. 某段时间内，电话公司“A 网”收费标准是：月租费 30 元，来电显示费 6 元/月，本地话费 0.4 元/分；“B 网”收费标准是：月租费和来电显示费免收，本地话费 0.6 元/分；想拥有来电显示服务的用户入哪种网比较合算？

第二节　函数图形

实际问题中变量间函数关系众多，应用广泛，了解函数图形对于我们更好地认知函数，利用函数解决实际问题有重要意义. 从现实与够用的角度出发，以后仅讨

论一元函数与二元函数的情形.

一、一元函数图形

一个一元函数图形在平面直角坐标系或极坐标系下都是一条曲线或者是一些离散点. 函数作图一般采用描点法.

直角坐标系下，函数图形在 x 轴上的投影区间就是其定义域，如图 1-8 中函数 $y=f(x)$ 的定义域是 (a,b) .

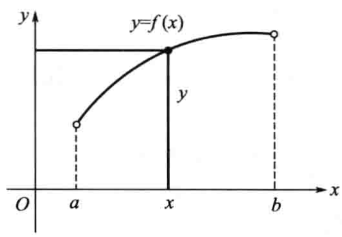


图 1-8　一般一元函数直角坐标图形

极坐标下，函数图形向极点投影构成的极角范围就是其定义域，如图 1-9 中函数 $\rho = f(\theta)$ 的定义域是 (α,β) .

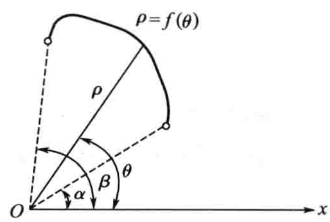


图 1-9　一般一元函数极坐标系图形

此外，如果将直角坐标系中 x 轴的正半轴当作极轴，那么，两种坐标系中点的坐标有下列转换关系 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$.

利用直角坐标系与极坐标系作一元函数图形互有优、劣势. 极坐标系作函数图形，一些直角坐标系下较复杂曲线关系往往显得比较简单.

比如：函数为 $\rho = R$ 在极坐标系下表示圆心在极点，半径为 R 的圆；而函数 $\theta=\alpha$ 在极坐标系下表示极角为 α 的直线.

【例 1】 互化函数关系并作图.

(1) 求直角坐标系下抛物线 $y = 2x^2$ 在极坐标系下函数关系.

(2) 求极坐标系下函数 $\rho = a\cos\theta$ 在直角坐标系下函数关系.

解　(1) $y = 2x^2$　在极坐标系下满足：$\rho\sin\theta = 2(\rho\cos\theta)^2$

即：$\rho = \dfrac{1}{2}\tan\theta \cdot \sec\theta$ (如图 1-10).

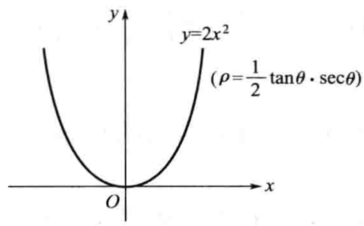


图 1-10　$y=2x^2$ 图形

（2）$\rho=4\cos\theta$　在直角坐标系下满足：$\rho^2=4\rho\cos\theta$ 即：$x^2+y^2=4x$（如图 1-11）.

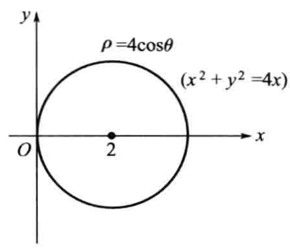


图 1-11　$\rho=4\cos\theta$ 图形

二、二元函数图形

二元函数图形在空间直角坐标系下是一张曲面或者是一些离散点，在 xOy 平面内投影区域就是其定义域. 如图 1-12 中函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D .

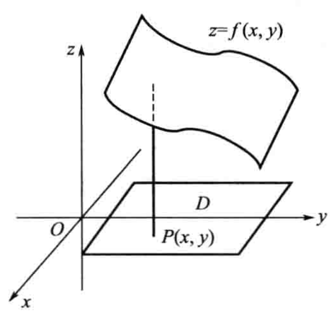


图 1-12　一般二元函数图形

定义域是扇形或者是圆形的二元函数讨论利用空间柱面坐标系比较方便.

1. 三种特殊的二元函数形态

（1）空间平面

二元一次函数 $Ax+By+Cz+D=0$（即：三元一次方程）图形是空间中的平面（如图 1-13）.

令 x、y、z 三个变量中一个为零，得到它在三个坐标面上的交线函数（如：它在 xOy 面上的交线函数为 $Ax+Cz+D=0$）；令 x、y、z 三个变量中两个为零，

可得到它在三个坐标轴上的截距（如：它在 x 轴上的截距为 $x=-\dfrac{D}{A}$）.

（2）柱面

空间中，定直线 L 沿定曲线 C 平行移动的轨迹称为柱面．L 称为柱面母线，C 称为柱面准线.

比如：母线平行于 z 坐标轴的柱面函数形式是 $y=f(x)$，它可看成是变量 z 的系数为 0 的特殊二元函数.

显然，函数解析式中缺少那个变量，该函数就表示一张母线平行于那个坐标轴的柱面（如图 1-14）.

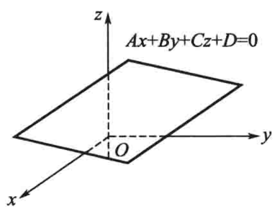


图 1-13　平面

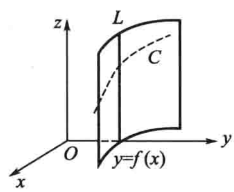


图 1-14　柱面

（3）旋转曲面

空间中，定曲线 C 绕同平面内的定直线 l 旋转所形成的曲面称为旋转曲面，曲线 C 称为旋转曲面的母线，定直线 L 称为旋转曲面的旋转轴.

比如：z 坐标轴为旋转轴、xOz 坐标面内的平面曲线 $z=f(x)$ 为母线的旋转曲面的函数关系为：$z=f(\pm\sqrt{x^2+y^2})$.

事实上：若旋转曲面上任意点 $P(x, y, z)$ 是由 xOz 面上的母线 $z=f(x)$ 上的点 $A(x_0,0,z_0)$ 旋转得到的，则显然有：$x_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}$，$z_0=z$，而 $A(x_0,0,z_0)$ 在母线上，故 $z_0=f(x_0)$，从而得到旋转曲面上的点的函数关系为：$z=f(\pm\sqrt{x^2+y^2})$（如图 1-15）.

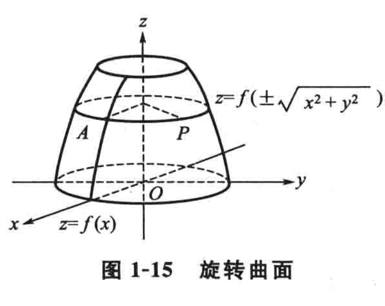


图 1-15　旋转曲面

据上述讨论可看出：以坐标轴为旋转轴，坐标面内函数为母线的旋转曲面的函数关系，只要将母线函数中，轴变量不变，另一变量用动点 $P(x,y,z)$ 到轴的距离的正负值代换即可得到.