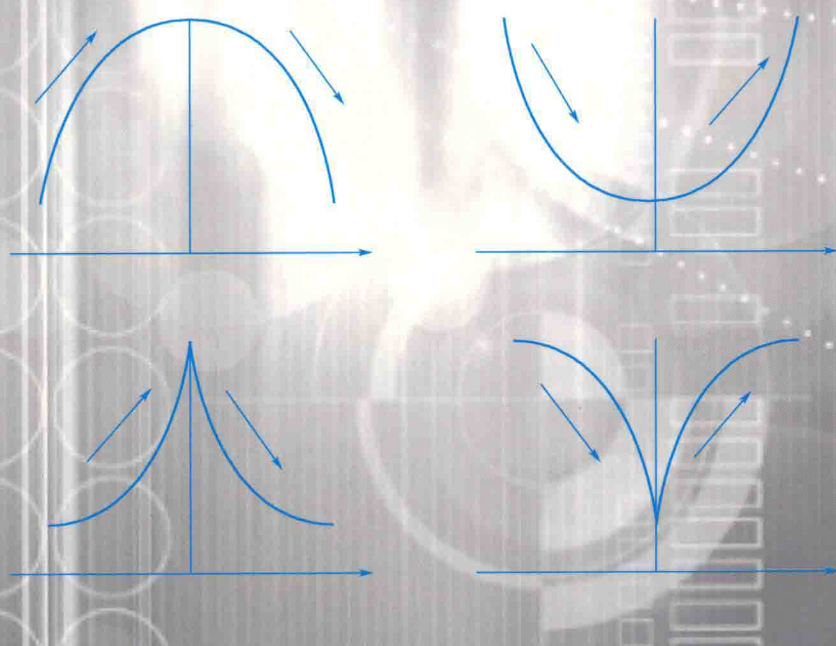
高职高专“十二五”规划教材 公共课系列

高等数学

主编 吴翰青 胡荷生 吴金龙



南京大学出版社

高职高专“十二五”规划教材

公共课系列

高等数学

主　编　吴翰青　胡荀生　吴金龙
副主编　应六英　李　彪　鄢青云
　　　　方　庆　刘毛生
参　编　徐　洁　吕军成　张　弦
　　　　康光青

南京大学出版社

内容提要

本书是由从事多年高等数学教学的一线教师，按照教材改革的精神，并结合《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》而编写的.

本书主要内容为函数、极限、连续(第一章)、一元函数的微分学(第二章)、一元函数的积分学(第三章)、线性代数初步(第四章)、无穷级数(第五章)，本书每章内容最后都附有复习题和阅读材料，以提高学生的学习兴趣，另外还附有积分表.

书中淡化定理的证明及公式的推导过程，通俗易懂、精简例题. 可供高职高专工科各专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 吴翰青，胡荷生，吴金龙主编. —南京：南京大学出版社，2011.8

高职高专"十二五"规划教材 · 公共课系列

ISBN 978 - 7 - 305 - 08794 - 3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①吴… ②胡… ③吴… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 174319 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

从 书 名 高职高专"十二五"规划教材 · 公共课系列
书　　名 高等数学
主　　编 吴翰青　胡荷生　吴金龙
责任编辑 惠　雪　蔡文彬　　编辑热线 025 - 83596997

照　　排 南京玄武湖印刷实业有限公司
印　　刷 常州市武进第三印刷有限公司
开　　本 787×960 1/16 印张 20 字数 269 千
版　　次 2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 08794 - 3
定　　价 39.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
　　　　 Sales@NjupCo.com(市场部)

前　　言

近几年来，随着高等职业教育改革的推进，针对高职高专“高等数学”课程的教学特点，结合高职院校高等数学的教学现状和教学对象，对“高等数学”课程的教材建设也提出了更新的要求．本书是由教学经验丰富、从事高等数学教学多年的一线教师进行编写的新编教材．

本书对传统的内容做了一些整合．在编写的过程中参考、借鉴了多种教材，经过再三斟酌，形成了如下的编写特点：

(1) 基本概念、基本定理直观、具体

在编写教材时注重知识的衔接，尽量按“实践—理论—实践”的认识规律编写，在引进概念和定理时，尽可能借助几何直观图形和物理含义来阐述这些概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化．淡化定理的证明过程和公式的推导过程．

(2) 基本内容必需、够用

在编写教材时真正体现“以应用为目的，以必需、够用为度”的教育原则，对与专业学习关系不大且理论性太强的部分进行了删减(如由参数方程确定的函数的求导、二阶常系数非齐次线性方程的求解等)．不追求数学理论的完整性和系统性，只强调典型方法的应用．

(3) 精选例题、加强练习

在编写教材时注重例题的选取，对典型例题的解法进行了归纳．加强了学生的练习，有助于复习巩固．

本书由江西电力职业技术学院吴翰青、江西制造职业技术学院胡苟生、江西电力职业技术学吴金龙担任主编，江西电力职业技术学院应六英、宜春职业技术学院李彪、江西电力职业技术学院鄢青云、方庆担、宜春职业技术学院刘毛生任副主编，江西电力职业技术学院徐洁、张弦、康光青、郑州工业贸易学校吕军成参与编写.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请专家、学者及使用本书的广大同仁批评指正.

编　者

2011 年 7 月

目　　录

第一章 函数、极限与连续

微积分学研究的主要对象是函数，而极限是研究函数的主要工具，是微积分的理论基础. 本章将在复习和深化函数知识的基础上，学习极限的定义，讨论极限的有关性质及其运算，最后介绍连续函数的概念和性质.

1-1 函 数

一、预备知识

1. 区间

区间是用得较多的一种数集. 设 a,b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$. a,b 称为开区间的端点. 数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$a,b$ 称为闭区间的端点. 类似地，定义 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 都为半开半闭区间. 数 $b-a$ 称为区间的长度. 根据区间的长度是否有限可将区间分为有限区间和无限区间. 长度是一个有限数的区间称为有限区间. 引进符号 $+\infty$（正无穷大）及 $-\infty$（负无穷大），则有五种无限区间：

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$，$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$，$(-\infty,b)=$

$\{x \mid x < b\}$，$(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$，$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x$ 为任意实数$\}$.

2. 邻域

邻域是在以后定义许多概念时常用的一种基本概念. 设 a 与 δ 是两个实数，且$\delta>0$，实数轴上与 a 点的距离小于 δ 的点的全体称作点 a 的 δ 邻域，记作 $N(a,\delta)$，即

$$N(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\},$$

用区间表示就是

$$N(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta).$$

点 a 叫做该邻域的中心，δ 叫做该邻域的半径(如图 1-1).

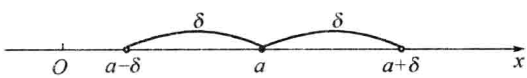


图 1-1

若把邻域的中心去掉，所得邻域称为点 a 的空心邻域，记作 $N(\hat{a},\delta)$，即

$N(\hat{a},\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$，如图 1-2 所示.

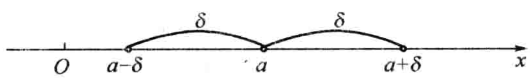


图 1-2

3. 常量与变量

根据不同的标准，量有不同的分类方法. 在某一过程中发生变化的量称为变量，不发生变化的量称为常量. 变量通常用 x, y, z, t 等表示，常量通常用 a, b, c, k 等表示. 要判断一个量是常量还是变量，一定注意“过程”，在不同的过程中，同一个量可能是常量，也可能是变量.

二、函数

1. 函数概念

在同一自然现象或技术过程中，往往同时存在多个变量，这些变量一般不是孤立的而是按照一定的规律相互联系相互依存的，当其中一个变量发生变化时，另一变量也随之变化. 例如圆的面积 S 与圆的半径 r，当半径 r 变化时圆的面积 S 也随之变化，变化规律是 $S=\pi r^2$.

定义 1.1.1　设 x,y 是两个变量，如果当变量 x 在某一数集 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 通常 x 叫做自变量，y 叫做因变量，也叫函数. x 的取值范围 D 叫做这个函数的定义域.

注：(1) 为了表明 y 是 x 的函数，用 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 等字母符号表示. 这里的字母"f"、"g"表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系，它们可以采用任意不同的字母表示.

(2) 如果自变量在定义域内任取一个确定的值，函数只有一个确定的值与其对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 这里只讨论单值函数.

2. 函数的两大要素

由函数的定义可知，函数的本质由函数的定义域、对应法则两大要素决定. 两个函数只要定义域相同，对应法则相同就是同一函数，而与自变量、因变量、对应法则使用的符号无关，与表示函数使用的方法无关.

例如函数 $y=x^2$ 与 $y=t^2$ 是同一函数，而 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 是两个不同的函数，因为它们的定义域不同. $y=\ln x^2$ 的定义域为 $x\neq 0$，而 $y=2\ln x$ 的定义域是 $x>0$. 因此今后在函数化简中要注意函数定义域的变化.

例 1　求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-2x-15}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\ln(3x+5)$；

(3) $y=\arccos\dfrac{3x+1}{2}$；　　(4) $y=\begin{cases}x^2, x>0,\\ 3, x<0.\end{cases}$

解　(1) 要使函数有意义,必须满足：$x^2-2x-15\neq 0$，即 $(x+3)(x-5)\neq 0$，所以函数的定义域为 $(-\infty,-3)\cup(-3,5)\cup(5,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义,必须满足：$\begin{cases}x-2>0,\\ 3x+5>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>2,\\ x>-\dfrac{5}{3},\end{cases}$ 所以函数的定义域为$(2,+\infty)$.

(3) 要使函数有意义,必须满足：$\left|\dfrac{3x+1}{2}\right|\leqslant 1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}$，所以函数的定义域为 $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$.

(4) 这是一个分段函数,分段函数的定义域是各段定义区间的并集,所以此函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

3. 函数的表示

(1) 解析法　用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法. 例如,$y=x^2$,$y=\sqrt[3]{2x+3}$.

(2) 表格法　将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法. 例如,在实际应用中常用的平方表,三角函数表等都是用表格法表示的函数.

(3) 图示法　用坐标平面上曲线来表示函数的方法即是图示法. 一般用横坐标表示自变量,纵坐标表示因变量.

三、函数的特性

1. 函数的有界性

如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,其中 M

是一个与 x 无关的大于 0 的常数，那么就称 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则便称无界.

例如图 1－3(a)的函数有界，图 1－3(b)的函数无界. 函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的. 有界函数除了根据定义域来判定外还可以根据函数图像来判定，它的图像一定介于某两条水平直线之间.

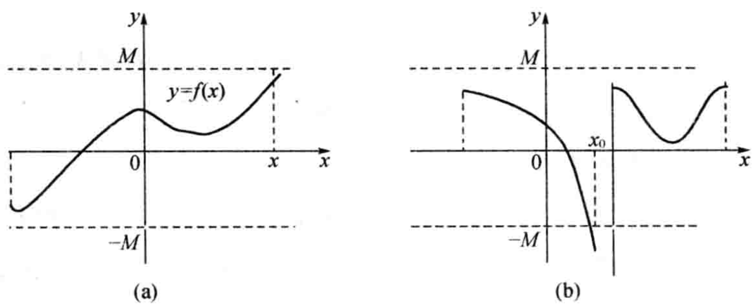


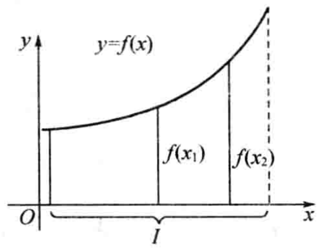
图 1－3

2. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而增大，即：对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的.

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而减小，即：对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减小的.

例如：图 1－3(a)的函数在区间 I 内单调增加，图 1－3(b)的函数在区间 I 内单调减少. 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减小的，在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的.



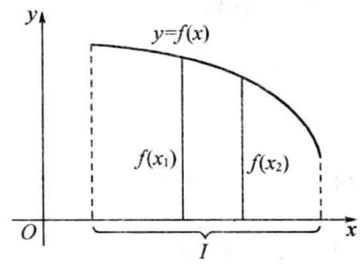


图 1-4

单调函数也可以借助于图像来判定,随着自变量的增大单调递增的函数图像是上升的;单调递减的函数图像是下降的.

3. 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

注:为了使 $f(x)$、$f(-x)$ 有意义,奇、偶函数的定义域必须关于原点对称.奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$,若存在一个不为零的数 l 使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内任何 x 值都成立,则 $f(x)$ 叫做周期函数,l 是 $f(x)$ 的周期.

注:这里的周期函数的周期是指最小正周期.周期函数的图像特征是每隔一定时间(即一个周期)图像重复出现.

例如:函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

四、反函数

1. 反函数的定义

设函数 $y=f(x)$,若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时,变量 x

在函数的定义域内必有一值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，那么变量 x 是变量 y 的函数，这个函数用 $y=f^{-1}(x)$ 来表示，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 对应地称 $y=f(x)$ 为直接函数.

2. 反函数的存在定理

定理 1.1.1　如果 $f(x)$在区间 I 上单调，则 $f(x)$在区间 I 上存在反函数.

讨论函数 $y=x^2$ 是否存在反函数.

解　显然函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$. 对于 y 取定的非负值，可求得 $x=\pm\sqrt{y}$. 若不加条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是说在区间$(-\infty,+\infty)$上，函数不是单调的，故其没有反函数. 如果加上条件，要求 $x\geqslant 0$，则 $x=\sqrt{y}$ 就是 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$上的反函数.

3. 反函数的性质

在同一坐标平面内，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$对称的. 函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1－5 所示.

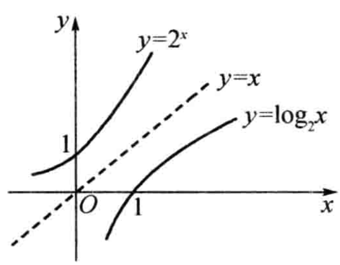


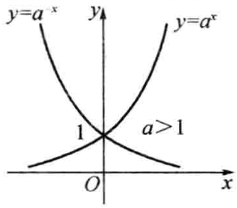
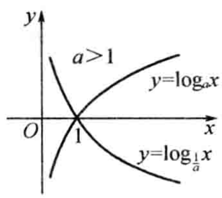
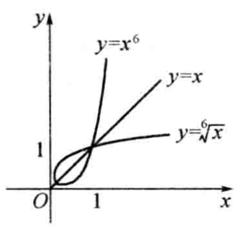
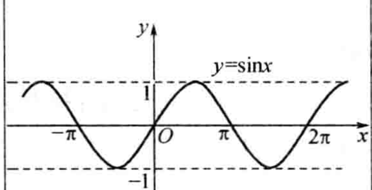
图 1－5

五、初等函数

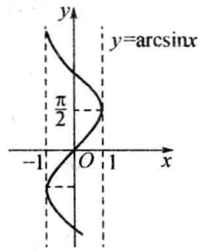
1. 基本初等函数

最常用的五种基本初等函数，分别是：指数函数、对数函数、幂函数、三角函数及反三角函数. 表 1－1 对这五种基本初等函数进行归纳.

表 1－1

函数名称	函数的表达式	函数的图像	函数的性质
指数函数	$y=a^x(a>0, a\neq1)$		① 不论 x 为何值，y 总为正数； ② 当 $x=0$ 时，$y=1$.
对数函数	$y=\log_a x\ (a>0, a\neq1)$		① 其图像总位于 y 轴右侧，并过点(1，0)； ② 当 $a>1$ 时，在区间(0，1)的值为负；在区间(1，$+\infty$)的值为正；在定义域内单调增.
幂函数	$y=x^a$（a 为任意实数）	 这里只画出部分函数图像的一部分.	令 $a=m/n$ ① 当 m 为偶数，n 为奇数时，y 是偶函数； ② 当 m,n 都是奇数时，y 是奇函数； ③ 当 m 为奇数，n 为偶数时，y 在 $(-\infty,0)$ 无意义.
三角函数	$y=\sin x$ 这里只给出正弦函数		① 正弦函数是以 2π 为周期的周期函数； ② 正弦函数是奇函数且 $\vert\sin x\vert\leqslant1$.

续表

函数名称	函数的表达式	函数的图像	函数的性质
反三角函数	$y=\arcsin x$ 这里只给出反正弦函数		由于该函数为多值函数，因此我们把此函数值限制在$[-\pi/2,\pi/2]$上，并称其为反正弦函数的主值.

2. 复合函数的定义

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=g(x)$，且 $g(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么通过 u 的联系，y 也是 x 的函数，称由函数 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 复合成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[g(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

例如：设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=x^2+1$，以 $u=x^2+1$ 代入 $y=\sqrt{u}$，得 $y=\sqrt{x^2+1}$. $y=\sqrt{x^2+1}$ 称为由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2+1$ 构成的复合函数.

例 2　指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sin(\cos x)$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{\tan x^2}$；

(3) $y=\ln 2^x$；　　(4) $y=\sqrt{\arctan(2x+3)}$.

解　(1) 函数 $y=\sin(\cos x)$ 是由 $y=\sin u$ 和 $u=\cos x$ 复合而成.

(2) 函数 $y=\mathrm{e}^{\tan x^2}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\tan v$ 和 $v=x^2$ 复合而成.

(3) 函数 $y=\ln 2^x$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=2^x$ 复合而成.

(4) 函数 $y=\sqrt{\arctan(2x+3)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\arctan v$ 和 $v=2x+3$ 复合而成.

注：分解复合函数时应把各层函数分解到基本初等函数、基本初等函数与常数经有限次四则运算所构成的函数为止.