金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

2015 李永乐·王式安考研数学系列

考研数学复习全书

数学三

基础篇

专为大三提前复习、在职考研和基础薄弱者编著

主编　李永乐　王式安

编委　王式安　刘喜波　李永乐　武忠祥　胡金德　蔡燧林

（按姓氏笔划排序）

金榜图书官方微博：http://weibo.com/51906740

国家行政学院出版社

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

2015 李永乐·王式安考研数学系列

考研数学复习全书

数学三

基础篇

主编 李永乐 王式安

编委 王式安 刘喜波 李永乐 武忠祥 胡金德 蔡燧林

（按姓氏笔划排序）

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书.基础篇.数学三/李永乐,王式安主编.—北京:国家行政学院出版社,2013.9

ISBN 978-7-5150-0831-8

Ⅰ.①考… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 134596 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

考研数学复习全书.基础篇.数学三

主　　编:李永乐　王式安
责任编辑:姚敏华
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:国家行政学院出版社
　　　　　(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)
电　　话:(010)68920640　68929037
编 辑 部:(010)68928761　68929009
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:14.5
字　　数:343 千字
版　　次:2013 年 10 月第 1 版
印　　次:2013 年 10 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5150-0831-8
定　　价:39.80 元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　　**电话:(010)51906740**

前言

《考研数学复习全书·基础篇(数学三)》是专门针对硕士研究生入学考试的大三提前复习、在职考研及基础薄弱考生而编写。整本书包含考研数学要求的基本知识架构,内容的阐述以初等数学水平为起点。希望通过对本书的学习,在较短时间内,厘清考研数学(包括微积分、线性代数、概率论和数理统计)的基本知识点,掌握入学考试所必需的基本概念、基本理论和基本计算方法,让数学基础薄弱甚至零基础的同学能有一个较大的提升和质的突破,实现“基础过关”。

本书为“李永乐·王式安考研数学系列”之一,由李永乐、王式安老师为主编的团队编写。基础篇旨在帮助基础薄弱的考生完成过渡阶段学习,编写方式上有以下特点:

一、突出实用知识

从作者团队多年的考研辅导经验来看,许多学生在开始复习时往往出现对基本知识点不明确的情况,所以,本书特意在开篇增加部分初等数学的介绍,而且在每章的开头就列出了考试大纲上的内容要点,这些都是考点,是必须掌握的。

二、结构层次分明

本书借鉴了多套经典教材编写的优点,整合考试内容,呈现给读者简明扼要的知识,独到的要点、方法归纳,以便于读者高效复习,形成完整的知识体系,从而为以后提高解题能力和数学思维水平奠定基础。

三、概念深入理解

整本书的核心目的是提升数学考试能力,任务就是解题。只有对基本概念深入理解,对基本定理和公式牢牢记住,才能找到解题的突破口和切入点。对所有重点、难点、考点,书中都相应的提供例题,这些例题有些就是过去的考题,有些是精心编制的。例题讲解做到基础解法给出详细步骤和计算过程,在学习过程中真正理解所学内容。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo.com@金榜图书官方微博。

由于编写时间的限制,书中难免存在些不足或纰漏,敬请读者批评指正。最后,祝同学们复习顺利,考研成功!

编者

目录

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

数学中转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学．有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了．

恩格斯

第一篇　微　积　分

第 0 章　预备知识

微积分研究的基本对象就是定义在实数集上的函数．函数就是变量与变量之间的联系关系．函数的一些概念和基本常见函数在初等数学中就详细的学习过．本章是复习一下初等数学中一些必要知识，主要是回顾一下集合、常见不等式，基本初等函数及其它重要函数的概念与性质，最后简单介绍极坐标系的有关内容．

第一节　集合、不等式

一、集合

1．集合概念

集合是指具有某种特定性质的事物的总体，组成集合的事物称为集合的**元素**，通常用大写字母 A, B, C,… 表示集合．用小写字母 a,b,c,d,… 表示集合的元素．

如果 a 是集合 A 的元素，记为 $a \in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，记作 $a \notin A$，读作 a 不属于 A．

集合的表示可采用列举法或描述法．列举法是把集合的全体元素一一列举出来，$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$．描述法是指若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 可表示为 $M = \{x \mid x$ 具有性质 $P\}$．例如圆心在原点的单位圆圆周上的点构成的集合表示为：$\{(x, y) \mid x, y$ 为实数，$x^2 + y^2 = 1\}$．

下面是高等数学中常用的几个数集和集合：

N 表示自然数构成的集合，称为**自然数集**．$N = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$．

在表示数集的字母的右上角标上“+”来表示该数集内排除 0 与负数的集．

N^+ 表示全体正整数构成的集合，$N^+ = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$．

R 表示全体实数构成的集合，称为**实数集**．

Z 表示全体整数构成的集合，称为**整数集**．

$$Z=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

Q 表示全体有理数构成的集合，称为**有理数集**.

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\middle| p\in Z,q\in N^{+} \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}.$$

邻域 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$.

去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$.

开区间(a,b),$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.

闭区间$[a,b]$,$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,

半开区间,$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

2.集合的关系与运算

设 A,B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$,读作 A 包含于 B.

若 A,B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B **相等**,记作 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A\subseteq B$.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$,且规定空集是任何集合的子集.

A 与 B 的并集(简称**并**),记作 $A\cup B$,

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

A 与 B 的交集(简称**交**),记作 $A\cap B$,

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

A 与 B 的差集(简称**差**).记作 $A-B$,

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\},$$

A 的补集,记作 $\overline{A}$,

集合 A 是集合 I 的子集,则称 $I-A$ 为 A 的补集(或余集).

设 A、B、C 为三个任意的集合,则有

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

二、常见不等式

(1) 绝对值不等式 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|\Rightarrow 0\leqslant x+|x|\leqslant 2|x|,\forall x\in R$.

(2) 三角不等式 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$,$||x|-|y||\leqslant|x-y|,\forall x,y\in R$.

(3) 平均值不等式$(x-y)^2\geqslant 0\Rightarrow x^2+y^2\geqslant 2xy,\forall x,y\in R$.

特别 $x,y\geqslant 0,\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$.

$\dfrac{x+y}{2}$ 称为算术平均值,$\sqrt{xy}$ 称为几何平均值.可推广到 n 个实数.

(4)$\sin x\leqslant x\leqslant\tan x,x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$等号仅在 $x=0$ 时成立.

(5)$m,n>0,k>0.m>n,\dfrac{n}{m}<\dfrac{n+k}{m+k}$.

不等式不能只记作公式，而要记作公式的变形，在适当时应用，如下三角不等式的应用：

$$|\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)|\leqslant|\sin(\alpha+\beta)|+|\cos(\alpha+\beta)|.$$

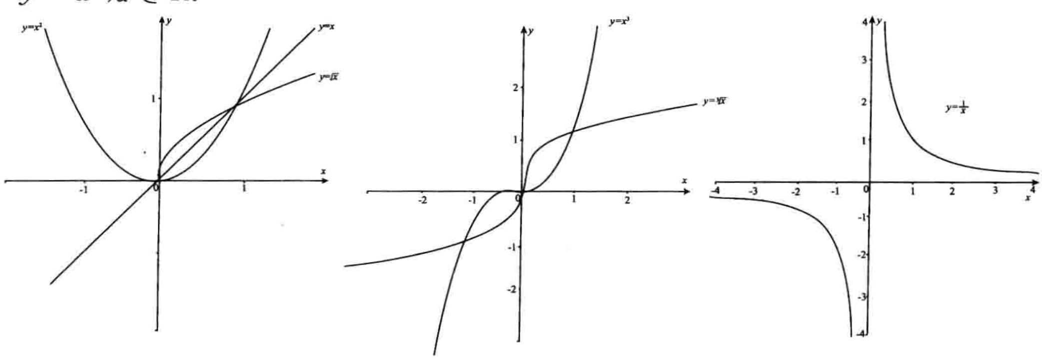
第二节　基本初等函数

一、常数函数

1. $y=C$，C 为常数.
2. 定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$\{C\}$.
3. 性质：偶函数，有界，周期函数，不存在最小正周期.
4. 图像：直角坐标系上，平行于 x 坐标轴的一条直线.

二、幂函数

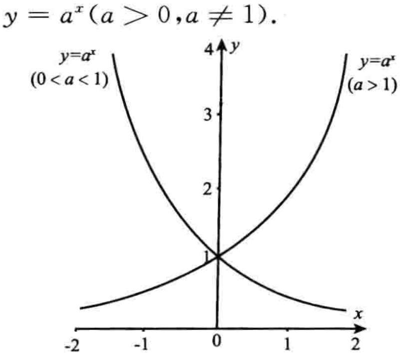
$y=x^{\alpha}$，$\alpha\in R$.

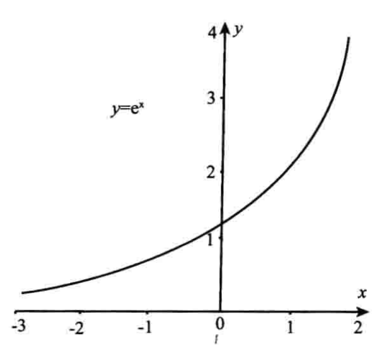


参数 α 的不同，函数的性质各不相同. $x>0$ 时，不论 α 为何值都有定义.
图像经过(1,1) 点.

三、指数函数

$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$.





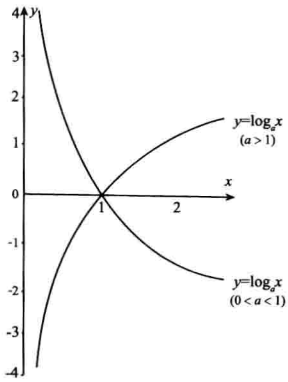
定义域为 R，值域为 $y>0$.
图像经过(0,1) 点

自然指数函数 $y=\mathrm{e}^{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$.

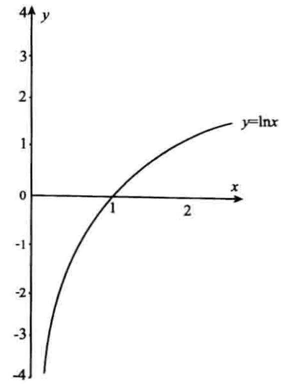
四、对数函数

$y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)$.



定义域为$(0,+\infty)$,值域为 R

图像经过$(1,0)$



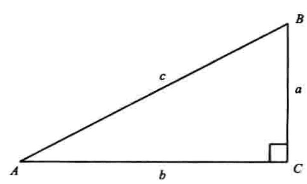
自然对数函数 $y=\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

五、三角函数

1. 三角函数的定义

(1) 在直角三角形 ABC



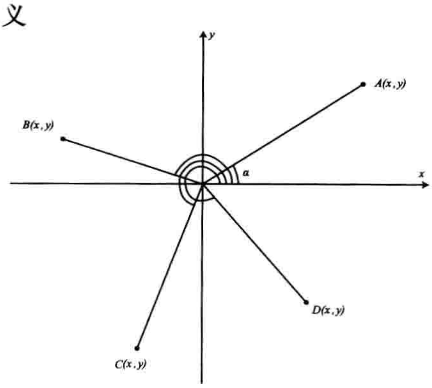
如下定义六个三角函数:

正弦函数 $\sin A=\dfrac{a}{c}$　　余弦函数 $\cos A=\dfrac{b}{c}$

正切函数 $\tan A=\dfrac{a}{b}$　　余切函数 $\cot A=\dfrac{b}{a}$

正割函数 $\sec A=\dfrac{c}{b}$　　余割函数 $\csc A=\dfrac{c}{a}$

(2) 直角坐标系中的定义



如下定义六个三角函数($r=\sqrt{x^2+y^2}$)：

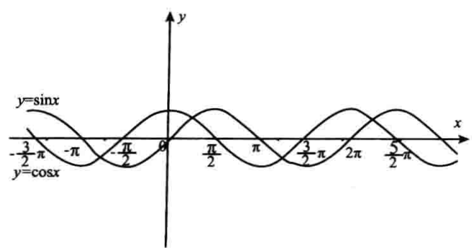
正弦函数　$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$　　　余弦函数　$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$

正切函数　$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$　　　余切函数　$\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$

正割函数　$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$　　　余割函数　$\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$

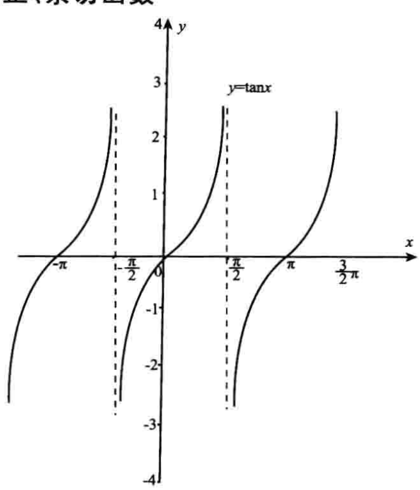
(3) 三角函数图像与性质

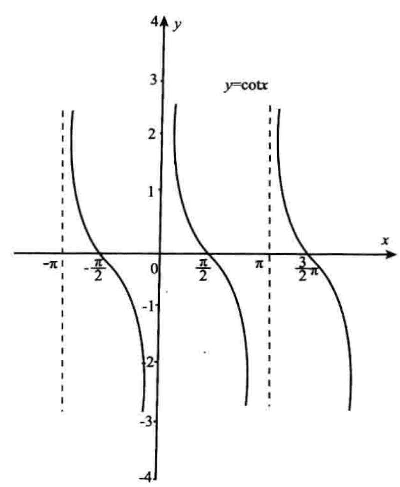
正、余弦函数



定义域为 R，值域为$[-1,1]$，周期为 2π. 正弦为奇函数，余弦为偶函数.

正、余切函数





定义域$\{x \mid x\in R$ 且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\}$.

值域为 R.

周期为 π，奇函数，

关于点$\left(\dfrac{k}{2}\pi,0\right)$对称，$k\in Z$.

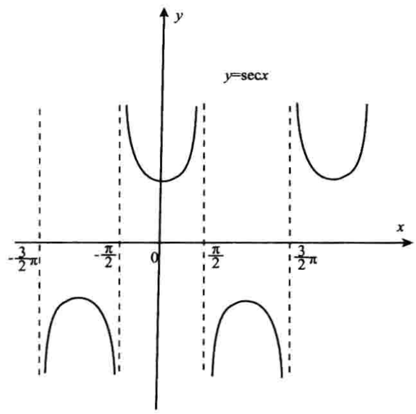
定义域$\{x \mid x\in R$ 且 $x\neq k\pi,k\in Z\}$.

值域为 R.

周期为 π，奇函数，

关于点$\left(\dfrac{k}{2}\pi,0\right)$对称，$k\in Z$.

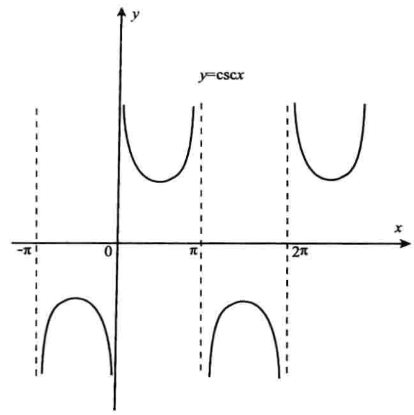
正、余割函数



定义域$\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\}$.

值域$\{y \mid y \leqslant -1$ 或 $y \geqslant 1\}$.

周期为2π,偶函数,渐近线$x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z$.



定义域$\{x \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$.

值域$\{y \mid y \leqslant -1$ 或 $y \geqslant 1\}$.

周期为2π,奇函数,渐近线$x=k\pi, k \in Z$.

2 转化关系

(1) 诱导公式

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$　　　$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$　　　$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$　　　$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$　　　$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$　　　$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

(2) 倒数关系

$\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$

$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

(3) 平方关系

$1+\tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

$1+\cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$

(4) 两角和与差的三角函数

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

(5) 积化和差公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

(6) 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(7) 倍角公式

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

(8) 半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(9) 万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

(10) 其它公式

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\theta)$,其中 $\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$

$a\sin\alpha - b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\theta)$,其中 $\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$

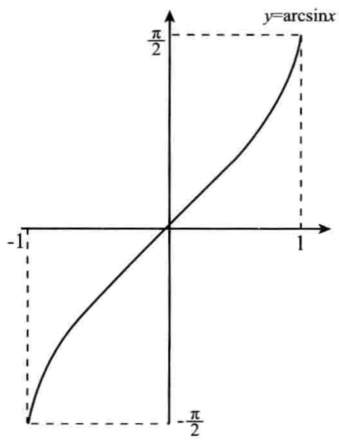
$1+\sin\alpha = \left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

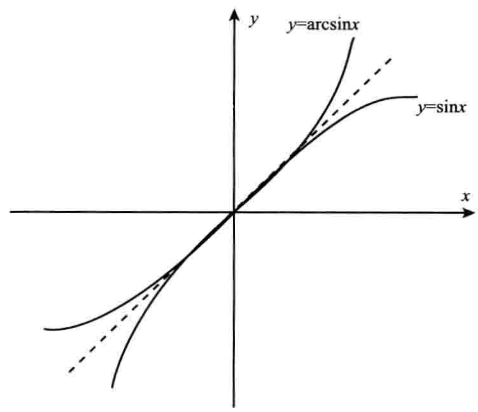
$1-\sin\alpha = \left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

说明:三角函数公式多,记住几个常用的在今后的一些计算时会比较方便.

六、反三角函数

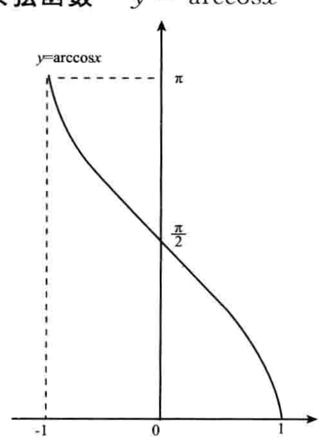
反正弦函数 $y = \arcsin x$

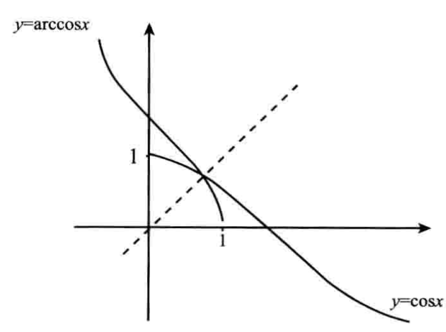




定义域$[-1,1]$,值域$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,奇函数,在定义域上为增函数.

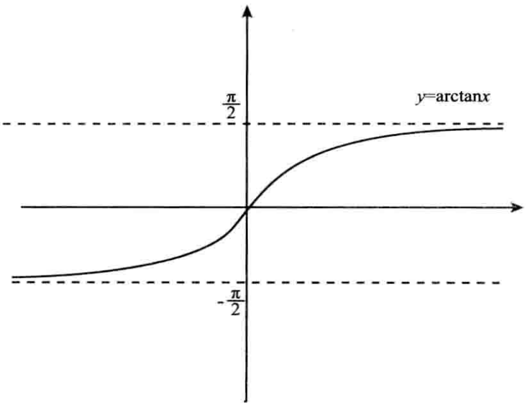
反余弦函数 $y = \arccos x$

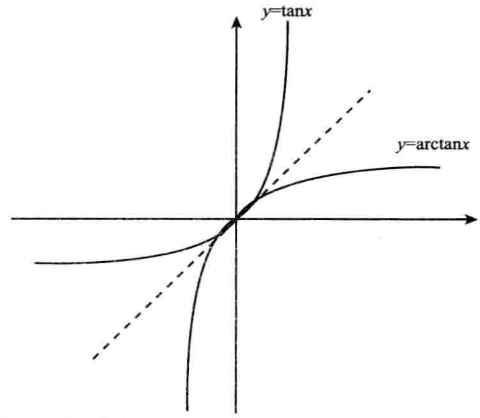




定义域$[-1,1]$,值域$[0,\pi]$,非奇非偶函数,在定义域上为减函数.

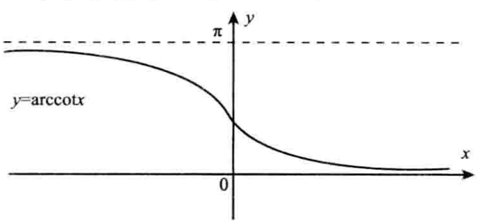
反正切函数　$y=\arctan x$

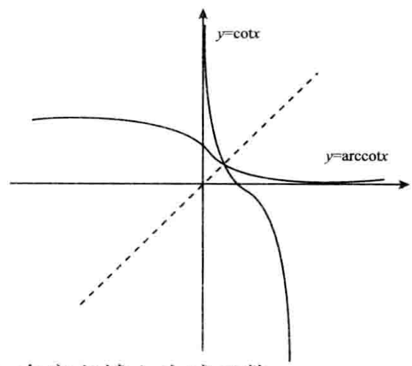




定义域$(-\infty,+\infty)$,值域$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,奇函数,定义域上为增函数.

反余切函数　$y=\operatorname{arccot}x$





定义域$(-\infty,+\infty)$,值域$(0,\pi)$,非奇非偶函数,在定义域上为减函数.

反三角函数表示三角函数主值区间上的角(含锐角的一个单调区间).
反三角函数的恒等式:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x+\operatorname{arccot}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin x)=x,x\in[-1,1]$$

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1]$$

$$\cos(\arccos x)=x,x\in[-1,1]$$

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1]$$

$$\arcsin(\sin x)=x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos(\cos x)=x,x\in[0,\pi]$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$$