

全国十二大考研辅导机构指定用书

2015 李永乐·王式安考研数学系列

考研数学

数学三

复习全书

基础篇

专为大三提前复习、在职考研和基础薄弱者编著

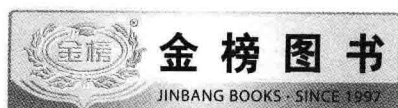
主 编 李永乐 王式安

编委 王式安 刘喜波 李永乐 武忠祥 胡金德 蔡燧林
(按姓氏笔划排序)

金榜图书官方微博: <http://weibo.com/51906740>



国家行政学院出版社



全国十二大考研辅导机构指定用书

2015 李永乐·王式安考研数学系列

考研数学

复习全书

数学三

基础篇

主 编 李永乐 王式安

编委 王式安 刘喜波 李永乐 武忠祥 胡金德 蔡燧林
(按姓氏笔划排序)

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书. 基础篇. 数学三/李永乐, 王式安主编. —
北京: 国家行政学院出版社, 2013. 9
ISBN 978-7-5150-0831-8

I. ①考… II. ①李… ②王… III. ①高等数学—研
究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 134596 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识, 凡有防
伪标识的为正版图书, 敬请读者识别。

考研数学复习全书. 基础篇. 数学三

主 编: 李永乐 王式安

责任编辑: 姚敏华

装帧设计: 金榜图文设计室

出版发行: 国家行政学院出版社

(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)

电 话: (010)68920640 68929037

编 辑 部: (010)68928761 68929009

印 刷: 保定市中画美凯印刷有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 14.5

字 数: 343 千字

版 次: 2013 年 10 月第 1 版

印 次: 2013 年 10 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5150-0831-8

定 价: 39.80 元

图书如有印装质量问题, 请与印刷厂联系调换

电话: (010)51906740

版权所有 侵权必究

前言

《考研数学复习全书·基础篇(数学三)》是专门针对硕士研究生入学考试的大三提前复习、在职考研及基础薄弱考生而编写。整本书包含考研数学要求的基本知识架构,内容的阐述以初等数学水平为起点。希望通过对本书的学习,在较短时间内,厘清考研数学(包括微积分、线性代数、概率论和数理统计)的基本知识点,掌握入学考试所必需的基本概念、基本理论和基本计算方法,让数学基础薄弱甚至零基础的同学能有一个较大的提升和质的突破,实现“基础过关”。

本书为“李永乐·王式安考研数学系列”之一,由李永乐、王式安老师为主编的团队编写。基础篇旨在帮助基础薄弱的考生完成过渡阶段学习,编写方式上有以下特点:

一、突出实用知识

从作者团队多年的考研辅导经验来看,许多学生在开始复习时往往出现对基本知识点不明确的情况,所以,本书特意在开篇增加部分初等数学的介绍,而且在每章的开头就列出了考试大纲上的内容要点,这些都是考点,是必须掌握的。

二、结构层次分明

本书借鉴了多套经典教材编写的优点,整合考试内容,呈现给读者简明扼要的知识,独到的要点、方法归纳,以便于读者高效复习,形成完整的知识体系,从而为以后提高解题能力和数学思维水平奠定基础。

三、概念深入理解

整本书的核心目的是提升数学考试能力,任务就是解题。只有对基本概念深入理解,对基本定理和公式牢牢记住,才能找到解题的突破口和切入点。对所有重点、难点、考点,书中都相应的提供例题,这些例题有些就是过去的考题,有些是精心编制的。例题讲解做到基础解法给出详细步骤和计算过程,在学习过程中真正理解所学内容。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo.com/@金榜图书官方微博。

由于编写时间的限制,书中难免存在些不足或纰漏,敬请读者批评指正。最后,祝同学们复习顺利,考研成功!

编者

第一篇 微积分

第0章 预备知识 (1)

第一节 集合、不等式 (1)

一、集合 (1)

二、常见不等式 (2)

第二节 基本初等函数 (3)

一、常数函数 (3)

二、幂函数 (3)

三、指数函数 (3)

四、对数函数 (4)

五、三角函数 (4)

六、反三角函数 (8)

七、双曲函数与反双曲函数 (10)

第三节 极坐标系 (12)

一、建系 (12)

二、极坐标系与直角坐标系的互化 (12)

三、曲线的极坐标方程 (12)

四、常见的曲线极坐标方程 (12)

第一章 函数 极限 连续 (14)

第一节 函 数 (14)

一、函数的定义 (14)

二、函数的表示法 (15)

三、具有某些特性的函数 (15)

第二节 极 限 (18)

一、极限概念 (18)

二、运算法则 (21)

第三节 函数的连续与间断 (23)

一、连续性概念 (23)

二、间断点 (23)

三、闭区间上的连续函数的性质 (24)

第二章 一元函数微分学 (26)

第一节 导数与微分,导数的计算 (26)

一、导数与微分 (26)

二、基本求导法则与公式 (28)

第二节 导数的应用 (32)

一、单调性的判定 (32)

二、极值与最值 (32)

三、凹凸性与拐点 (33)

四、洛必达法则 (34)

五、渐近线的求法 (36)

第三节 中值定理、不等式与零点问题 (37)

一、中值定理 (37)

二、不等式的证明 (40)

三、零点问题 (41)

第三章 一元函数积分学 (43)

第一节 不定积分与定积分的概念、性质 (43)

..... (43)

一、原函数与不定积分 (43)

二、积分基本性质 (44)

第二节 不定积分与定积分的计算 (48)

..... (48)

一、基本积分公式 (48)

二、基本积分方法 (48)

第三节 反常积分及其计算 (54)

一、反常积分 (54)

二、对称区间上奇、偶函数的反常积分

..... (55)

第四节 定积分的应用 (57)

一、基本方法 (57)

二、重要几何公式与物理应用 (57)

第五节 定积分的综合题 (59)

第四章 多元函数微积分学 (62)

第一节 多元函数的极限与连续 (62)

一、二元函数的概念 (62)

二、二元函数的极限与连续 (62)

第二节 多元函数的微分 (65)

一、二元函数的偏导数与全微分 (65)

..... (65)

二、复合函数的偏导数与全微分 (67)

..... (67)

三、隐函数的偏导数与全微分 (68)

第三节 极值与最值 (70)

一、无条件极值 (70)

二、条件极值 (70)

三、最值问题 (71)

第四节 二重积分 (72)

一、二重积分的概念 (72)

二、二重积分的性质 (72)

三、二重积分的计算 (73)

第五章 无穷级数 (79)

第一节 常数项级数 (79)

一、级数的概念与性质 (79)

二、正项级数的判敛准则 (81)

三、交错级数 (81)

三、绝对收敛及性质 (82)

四、几何级数与 p 级数及其敛散性.....

..... (83)

第二节 幂级数 (83)

一、函数项级数及收敛域与和函数.....

..... (83)

二、幂级数 (84)

三、幂级数的性质 (84)

四、函数的幂级数展开 (85)

第六章 常微分方程与差分方程 (87)

..... (87)

第一节 一阶微分方程 (87)

一、微分方程的概念 (87)

二、几类一阶微分方程及其解法.....

..... (88)

第二节 二阶线性微分方程 (91)

一、线性微分方程 (91)

二、线性微分方程解的性质 (91)

第三节 微分方程的应用 (95)

一、几何问题 (95)

二、变化率问题 (96)

第四节 差分方程 (96)

一、差分方程的概念 (96)

二、一阶常系数线性差分方程的解法...

..... (97)

第七章 经济应用 (100)

一、边际 (100)

二、弹性 (101)

三、复利与贴现 (104)

第二篇 线性代数

第一章 行列式 (106)

一、 n 阶行列式的概念 (106)

二、行列式的性质 (108)

三、行列式按行(或列)展开公式

..... (111)

四、几个重要公式 (112)

第二章 矩 阵 (114)

第一节 矩阵的概念及运算 (114)

一、矩阵的概念 (114)

二、矩阵的运算 (115)

三、常见的矩阵 (116)

四、矩阵的运算规则 (116)

第二节 可逆矩阵 (118)

一、可逆矩阵的概念 (118)

二、 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件

..... (118)

三、逆矩阵的运算性质 (118)

四、求逆矩阵的方法 (119)

第三节 初等变换、初等矩阵 (121)

一、初等变换与初等矩阵的概念

..... (121)

二、初等矩阵与初等变换的性质

..... (121)

第四节 矩阵的秩 (122)

一、矩阵秩的概念 (122)

二、矩阵秩的公式 (123)

第五节 分块矩阵 (123)

一、分块矩阵的概念 (123)

二、分块矩阵的运算 (124)

第三章 向 量 (127)

一、向量的概念 (127)

二、向量组的线性相关性 (127)

三、向量组的秩 (129)

四、正交规范化 (131)

第四章 线性方程组 (134)

一、线性方程组的表达形式 (134)

二、齐次线性方程组的解 (135)

三、非齐次线性方程组的解 (140)

四、克拉默法则 (141)

第五章 特征值和特征向量 (143)

第一节 方阵的特征值和特征向量

..... (143)

第二节 矩阵的相似对角化 (146)

第三节 实对称矩阵的相似对角化

..... (149)

第六章 二次型	(152)	第二节 正定二次型	(158)
第一节 二次型的概念	(152)		

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率	(162)	第三节 二维均匀分布和二维正态分布	(189)
第一节 随机事件、事件间的关系与运算	(162)	第四节 两个随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布	(191)
一、随机试验.....	(162)	第四章 随机变量的数字特征	(196)
二、随机事件.....	(162)	第一节 随机变量的数学期望和方差 ...	(196)
三、事件的关系与运算.....	(163)	第二节 矩、协方差和相关系数 ...	(200)
第二节 概率及概率公式	(165)	第五章 大数定律和中心极限定理 ...	(206)
一、概率公理.....	(165)	第六章 数理统计的基本概念	(209)
二、事件的独立性.....	(166)	第一节 总体、样本、统计量和样本数字特征	(209)
三、五大概率公式.....	(166)	第二节 常用统计抽样分布	(212)
第三节 古典概型与伯努利概型	(168)	一、 χ^2 分布.....	(212)
第二章 随机变量及其概率分布	(171)	二、 t 分布.....	(213)
第一节 随机变量及其分布函数	(171)	三、 F 分布.....	(213)
第二节 常用分布	(175)	四、正态总体的抽样分布.....	(214)
第三节 随机变量函数的分布	(178)	第七章 参数估计	(217)
第三章 多维随机变量及其分布	(181)	第一节 点估计	(217)
第一节 二维随机变量及其分布	(181)	第二节 估计量的求法	(220)
一、二维随机变量.....	(181)	一、矩估计法.....	(220)
二、二维离散型随机变量.....	(182)	二、最大似然估计法.....	(220)
三、二维连续型随机变量.....	(184)		
第二节 随机变量的独立性	(185)		

数学中转折点是从笛卡儿的变数,有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学.有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了.

恩格斯

第一篇 微 积 分

第0章 预备知识

微积分研究的基本对象就是定义在实数集上的函数.函数就是变量与变量之间的联系关系.函数的一些概念和基本常见函数在初等数学中就详细的学习过.本章是复习一下初等数学中一些必要知识,主要是回顾一下集合、常见不等式,基本初等函数及其它重要函数的概念与性质,最后简单介绍极坐标系的有关内容.

第一节 集合、不等式

一、集合

1. 集合概念

集合是指具有某种特定性质的事物的总体,组成集合的事物称为集合的**元素**,通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合.用小写字母 $a, b, c, d, \dots$ 表示集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素,记为 $a \in A$,读作 a 属于 A ;如果 a 不是集合 A 的元素,记作 $a \notin A$,读作 a 不属于 A .

集合的表示可采用列举法或描述法.列举法是把集合的全体元素一一列举出来, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.描述法是指若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成,则 M 可表示为 $M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$.例如圆心在原点的单位圆圆周上的点构成的集合表示为: $\{(x, y) \mid x, y \text{ 为实数}, x^2 + y^2 = 1\}$.

下面是高等数学中常用的几个数集和集合:

N 表示自然数构成的集合,称为**自然数集**. $N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

在表示数集的字母的右上角标上“+”来表示该数集内排除 0 与负数的集.

N^+ 表示全体正整数构成的集合, $N^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

R 表示全体实数构成的集合,称为**实数集**.

Z 表示全体整数构成的集合,称为**整数集**.

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Q 表示全体有理数构成的集合, 称为有理数集.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}.$$

邻域 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$.

去心邻域 $U^\circ(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$.

开区间 $(a, b), (a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

闭区间 $[a, b], [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$,

半开区间, $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

2. 集合的关系与运算

设 A, B 是两个集合, 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$, 读作 A 包含于 B .

若 A, B 互为子集, 即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$.

不含任何元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$, 且规定空集是任何集合的子集.

A 与 B 的并集(简称并), 记作 $A \cup B$,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

A 与 B 的交集(简称交), 记作 $A \cap B$,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

A 与 B 的差集(简称差). 记作 $A - B$,

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\},$$

A 的补集, 记作 $\bar{A}$,

集合 A 是集合 I 的子集, 则称 $I - A$ 为 A 的补集(或余集).

设 A, B, C 为三个任意的集合, 则有

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

(4) 对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

二、常见不等式

(1) 绝对值不等式 $-|x| \leq x \leq |x| \Rightarrow 0 \leq x + |x| \leq 2|x|, \forall x \in R$.

(2) 三角不等式 $|x + y| \leq |x| + |y|, ||x| - |y|| \leq |x - y|, \forall x, y \in R$.

(3) 平均值不等式 $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy, \forall x, y \in R$.

特别 $x, y \geq 0, \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$\frac{x+y}{2}$ 称为算术平均值, $\sqrt{xy}$ 称为几何平均值. 可推广到 n 个实数.

(4) $\sin x \leq x \leq \tan x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 等号仅在 $x = 0$ 时成立.

(5) $m, n > 0, k > 0. m > n, \frac{n}{m} < \frac{n+k}{m+k}$.

不等式不能只记作公式,而要记作公式的变形,在适当时应用,如下三角不等式的应用:

$$|\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta)| \leq |\sin(\alpha + \beta)| + |\cos(\alpha + \beta)|.$$

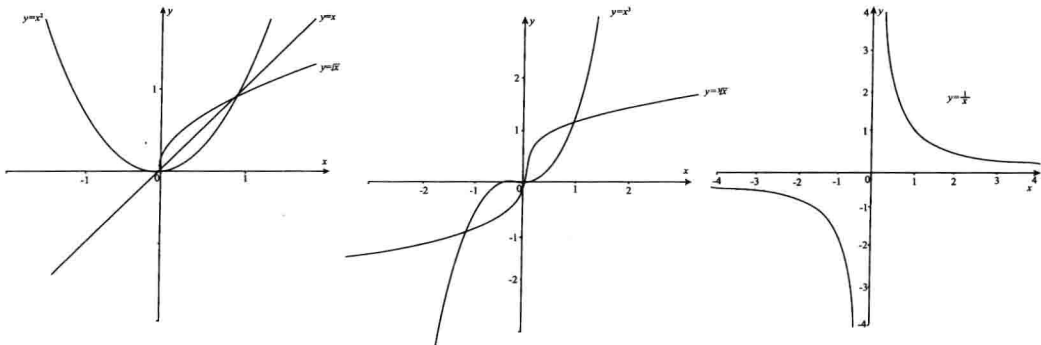
第二节 基本初等函数

一、常数函数

1. $y = C, C$ 为常数.
2. 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $\{C\}$.
3. 性质: 偶函数, 有界, 周期函数, 不存在最小正周期.
4. 图像: 直角坐标系上, 平行于 x 坐标轴的一条直线.

二、幂函数

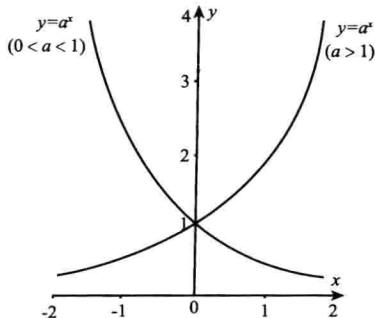
$$y = x^a, a \in R.$$



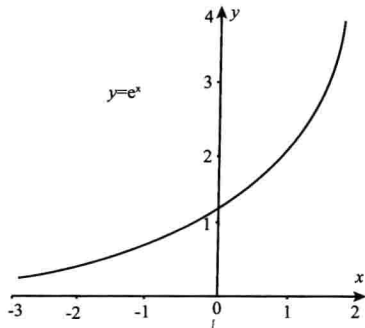
参数 a 的不同, 函数的性质各不相同. $x > 0$ 时, 不论 a 为何值都有定义. 图像经过 $(1, 1)$ 点.

三、指数函数

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1).$$



定义域为 R , 值域为 $y > 0$.
图像经过 $(0, 1)$ 点

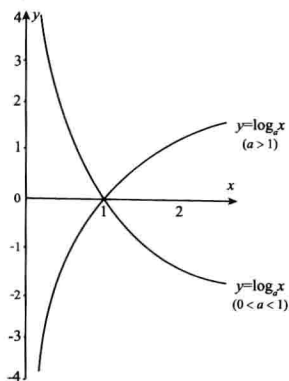


自然指数函数 $y = e^x$

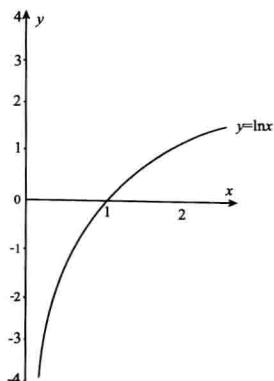
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

四、对数函数

$$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1).$$



定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 R
图像经过 $(1, 0)$

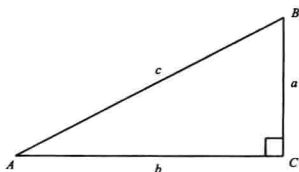


自然对数函数 $y = \ln x$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$

五、三角函数

1. 三角函数的定义

(1) 在直角三角形 ABC



如下定义六个三角函数:

正弦函数 $\sin A = \frac{a}{c}$

余弦函数 $\cos A = \frac{b}{c}$

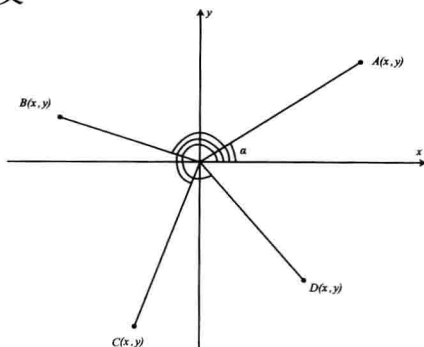
正切函数 $\tan A = \frac{a}{b}$

余切函数 $\cot A = \frac{b}{a}$

正割函数 $\sec A = \frac{c}{b}$

余割函数 $\csc A = \frac{c}{a}$

(2) 直角坐标系中的定义



如下定义六个三角函数($r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

正弦函数 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$

余弦函数 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$

正切函数 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$

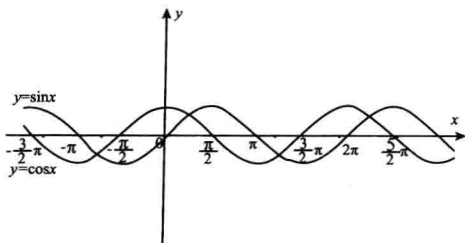
余切函数 $\cot \alpha = \frac{x}{y}$

正割函数 $\sec \alpha = \frac{r}{x}$

余割函数 $\csc \alpha = \frac{r}{y}$

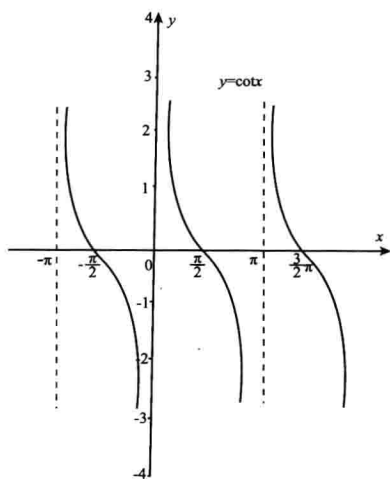
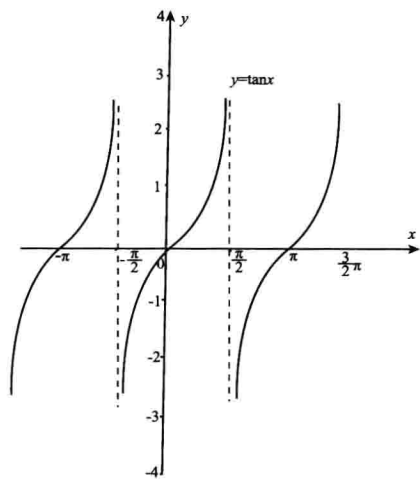
(3) 三角函数图像与性质

正、余弦函数



定义域为 R , 值域为 $[-1, 1]$, 周期为 2π . 正弦为奇函数, 余弦为偶函数.

正、余切函数



定义域 $\{x \mid x \in R \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$.

值域为 R .

周期为 π , 奇函数,

关于点 $(\frac{k}{2}\pi, 0)$ 对称, $k \in Z$.

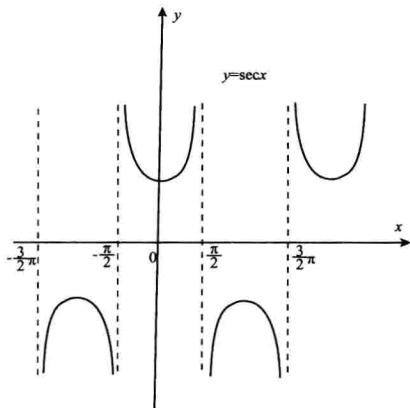
定义域 $\{x \mid x \in R \text{ 且 } x \neq k\pi, k \in Z\}$.

值域为 R .

周期为 π , 奇函数,

关于点 $(\frac{k}{2}\pi, 0)$ 对称, $k \in Z$.

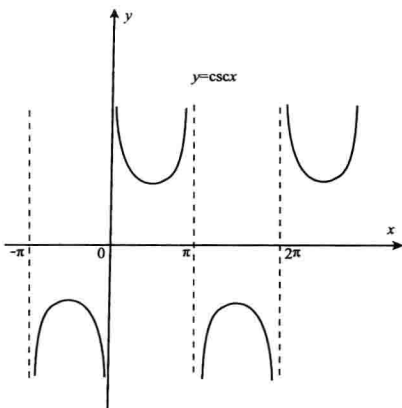
正、余割函数



定义域 $\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

值域 $\{y \mid y \leq -1 \text{ 或 } y \geq 1\}$.

周期为 2π , 偶函数, 渐近线 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



定义域 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

值域 $\{y \mid y \leq -1 \text{ 或 } y \geq 1\}$.

周期为 2π , 奇函数, 渐近线 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2 转化关系

(1) 诱导公式

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

(2) 倒数关系

$$\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$$

$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

(3) 平方关系

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(4) 两角和与差的三角函数

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

(5) 积化和差公式

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

(6) 和差化积公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

(7) 倍角公式

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

(8) 半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(9) 万能公式

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

(10) 其它公式

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \theta), \text{ 其中 } \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

$$a \sin \alpha - b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \theta), \text{ 其中 } \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

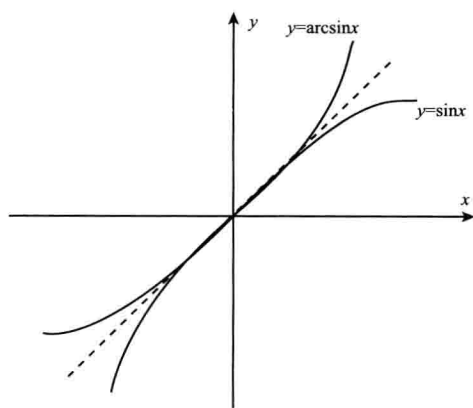
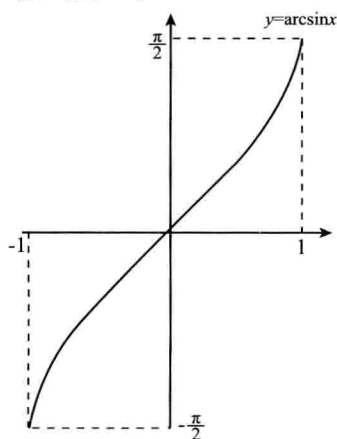
$$1 + \sin \alpha = \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

$$1 - \sin \alpha = \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

说明:三角函数公式多,记住几个常用的在今后的一些计算时会比较方便.

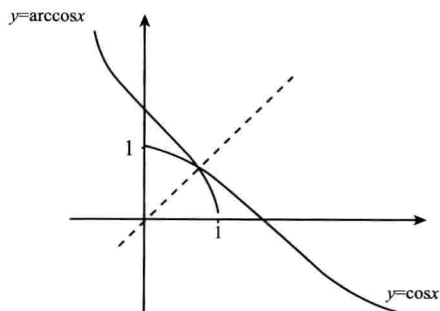
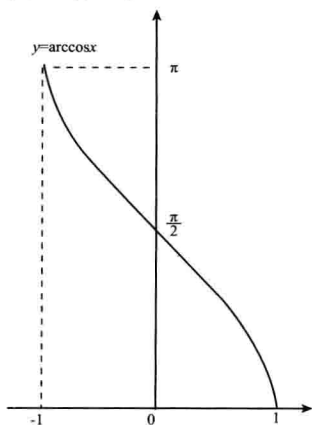
六、反三角函数

反正弦函数 $y = \arcsin x$

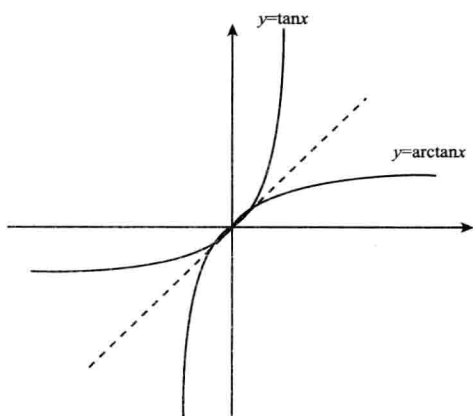
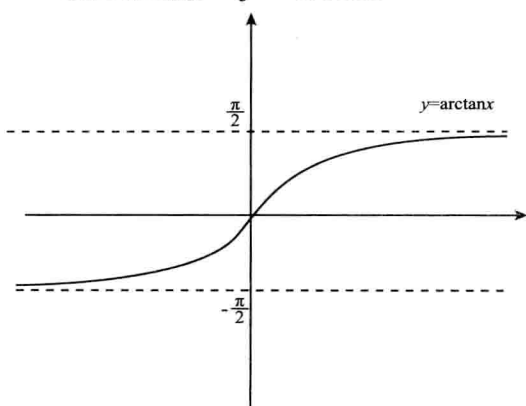


定义域 $[-1, 1]$, 值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 奇函数, 在定义域上为增函数.

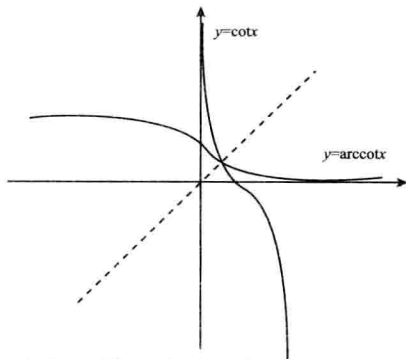
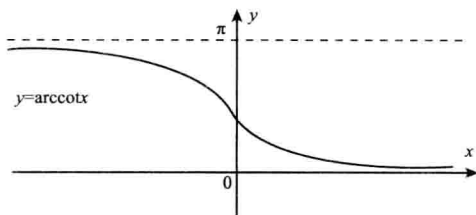
反余弦函数 $y = \arccos x$



定义域 $[-1, 1]$, 值域 $[0, \pi]$, 非奇非偶函数, 在定义域上为减函数.

反正切函数 $y = \arctan x$ 

定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 奇函数, 定义域上为增函数.

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 

定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $(0, \pi)$, 非奇非偶函数, 在定义域上为减函数.

反三角函数表示三角函数主值区间上的角(含锐角的一个单调区间).

反三角函数的恒等式:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1, 1]$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]$$

$$\cos(\arccos x) = x, x \in [-1, 1]$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\operatorname{arccos}(\cos x) = x, x \in [0, \pi]$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$