G A O D E N G S H U X U E

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学 上册

主　编　唐晓文
副主编　李　林　唐燕贞　兰友发
主　审　韩　明

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

上册

主　编　唐晓文

副主编　李　林　唐燕贞　兰友发

主　审　韩　明

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是在认真贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神，并按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，根据本科院校学生的基础和特点以及一些高等院校向应用技术大学转型的新趋势而编写的.

全书分上下两册，此为上册. 内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，附录包括二阶和三阶行列式简介，常用曲线方程与图像，积分表，数学建模与数学实验. 每章分若干节，每节都配有习题，同时每章还配有综合习题，书末附有习题的参考答案.

本书体系结构严谨、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题习题丰富. 适合作为普通高等院校（非数学专业）高等数学课程的教材使用，可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 唐晓文主编. -- 上海：同济大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5608-5557-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①唐… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 143697 号

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学(上册)

主　编　唐晓文

副主编　李　林　唐燕贞　兰友发

主　审　韩　明

责任编辑 张　莉　**责任校对** 徐春莲　**封面设计** 潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

（上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　销　全国各地新华书店

印　刷　江苏句容排印厂

开　本　787 mm×960 mm　1/16

印　张　19

字　数　380 000

印　数　4 101—7 200

版　次　2014 年 7 月第 1 版　2014 年 8 月第 2 次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-5557-8

定　价　35.00 元

前　言

“高等数学”是普通高等院校本科各专业普遍开设的一门公共基础课程，在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用. 为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求，适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变，结合一些高等院校向应用技术大学转型的新要求，并按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，在多次研讨和反复实践的基础上，编写了这套教材.

全书以通俗易懂的语言，深入浅出地介绍了高等数学的知识. 全书分上下两册，上册共5章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用. 附录包括二阶行列式和三阶行列式简介，常用曲线方程与图像，积分表，数学建模与数学实验. 下册也有5章，内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程. 附录包括数学建模与数学实验. 全书每章分若干节，每节都配有习题，同时，每章还配有综合习题，书末附有比较详细的习题参考答案.

带*号的内容可根据教学需要和学时安排酌情增删，附录是学习高等数学的辅助内容，可供教学时参考.

本书具有以下几方面的特点：

(1) 淡化理论推导过程，加强训练强化应用

在有些章节中淡化了定理证明的推导过程. 既简明易懂，又解决了课时少、内容多的矛盾. 同时，本书经过精心设计与编选，配备了相当丰富的习题，包括填空题、选择题、计算题、应用题. 目的是使学生理解基本概念和基本定理的实质，掌握重要的解题方法和应用技巧.

(2) 内容结构设计合理，突出重点消除难点

平面极坐标是积分中经常用的重要内容，因此，在第5章中比较详细地介绍了平面极坐标与直角坐标的关系，给出了一些常用曲线的极坐标方程，为后面的学习奠定了一定的理论基础；第二类线面积分是高等数学的难点，一般的书都是通过物理意义抽象出第二类线面积分的概念，本书是把第二类线面积分以一种特殊的第一类线面积分引入，不但消除了难点问题，而且直接得到了两类积分之间的关系，同时也突出了第一类线面积分在线面积分的重要作用.

(3) 引入专业案例教学，提高学生学习兴趣

根据应用技术大学的新要求，为专业学习打下扎实的基础，在重要的章节附有实际应用例题，例如在讲曲面面积时，研究了通讯卫星的信号覆盖率问题，附录中还给出了数学模型举例. 以此培养学生学习数学的兴趣，调动学生学习数学的积极性，提高学生分析问题和解决问题的能力.

(4) 渗透数学建模思想，注重理论联系实际

将数学实验和数学建模的思想渗透到高等数学的教学中一直是高等数学教育改革的努力方向. 本书将与高等数学课程各章节紧密呼应的“数学建模”和“数学实验”内容，作为附录放在教材的后面. 它既可以供学生自学，也可以供教师参考，特别是还可以作为一门独立的和高等数学配套的同时进行的实验课程. 该课程既可以由老师上课，也可以供师生讨论，还可以直接在老师的指导下以学生为主体进行课程实践. 这是一种新的值得期待的尝试.

本书体系结构严谨、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题习题丰富. 适合作为普通高等院校各专业高等数学课程的教材使用，可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

本书的编写大纲由唐晓文提出，并经过编者充分讨论而确定. 具体分工如下：第 1 章至第 5 章由唐燕贞编写，第 7 章、第 8 章及附录由李林编写，第 6 章、第 9 章及第 10 章由唐晓文编写，本书的习题以及参考答案由兰友发编写，王峰、王明锋、薛蓉华、连广鑫也参加了编写工作. 全书由唐晓文统稿定稿.

本书的主审韩明教授对本书作了认真的审查，提出了许多宝贵的修改意见和建议，在此表示诚挚的谢意.

在编写过程中，参考了书后所列的参考文献，对参考文献的作者表示衷心的感谢. 本书的出版还得到同济大学出版社和编者单位领导及同事的大力支持，在此一并表示感谢.

虽然编者力求本书通俗易懂，简明流畅，便于教学，但由于水平有限，肯定还有一些不尽如人意之处，诚挚欢迎专家和读者提出宝贵意见、本书将不断改进与完善，突出自己的特色，更好地为教学服务.

唐晓文

2014 年 6 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，也是高等数学中最重要的基本概念之一. 极限的概念是微积分的理论基础，极限方法是研究变量的一种基本方法. 连续是函数的一个重要性态. 本章介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1　函　　数

1.1.1　集　合

"集合"是数学中的一个重要概念，现代数学各个分支几乎都构筑在严格的集合理论上. 为今后学习的需要，本节从介绍微积分所涉及的有关集合的一些基本知识开始.

1. 集合与元素

所谓集合，就是具有某种特定性质的事物的全体，简称集，组成这个集合的事物称为该集合的元素，简称元. 通常用大写字母 A, B, X, Y, … 表示集合，用小写字母 a, b, x, y, … 表示元素. 若集合不含任何元素，则称为空集，记为 Φ. 仅含有限个元素的集合称为有限集，否则，称为无限集.

若元素 x 在集合 A 中，则称 x 属于 A，记为 $x \in A$；若元素 x 不在集合 A 中，则称 x 不属于 A，记为 $x \notin A$.

设 A, B 是两个集合，若集合 A 中的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$（读为 A 包含于 B），或 $B \supset A$（读为 B 包含 A）.

若集合 A 和 B 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 和 B 相等，记为 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A \subsetneqq B$.

例如，一般用字母 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数集，$\mathbf{Z}$ 表示全体整数集，$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数集合和 $\mathbf{R}$ 表示全体实数集合，则 $\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. 另外，通常 $\mathbf{R}^*$ 表示非零的实数的集合，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合.

2. 集合的表示方法

表示集合的方法有两种，一种是枚举法，即把集合中的元素一一列举出来，如

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, \mathbf{Z}=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

另一种是描述法，即把元素的特性描述出来，例如

$$\mathbf{R}^+=\{x \mid x>0\};$$

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q} \mid p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 和 } q \text{ 互质}\right\}.$$

3. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差三种.

设 A, B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集(简称并)，记为 $A\cup B$, 即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

一般地，n 个集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的并集记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, 即

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\{x \mid x\in A_1 \text{ 或 } x\in A_2 \text{ 或} \cdots \text{或 } x\in A_n\}.$$

由所有属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集(简称交)，记为 $A\cap B$, 即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

一般地，n 个集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的交集记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, 即

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\{x \mid x\in A_1 \text{ 且 } x\in A_2 \cdots \text{且 } x\in A_n\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集(简称差)，记为 $A\backslash B$, 即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

有时仅把问题限于某一个确定的集合 X 中进行，所研究的其他集合 A 是它的子集，这时，称集合 X 为全集或基本集，称 $X\backslash A$ 为 A 的余集或补集，记为 A^C. 即

$$A^C=\{x \mid x\in X \text{ 且 } x\notin A\}.$$

集合的并、交、差三种运算满足下列法则：

设 A, B, C 为任意三个集合，则有

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

(4) 对偶律 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$，$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

以上法则都可根据集合相等的定义验证.

为了表达的方便，引入逻辑记号“$\forall$”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”. 记号“$\exists$”表示“存在”.

此外，还可以定义两个集合的笛卡儿乘积.

设 A、B 是任意两个集合，$\forall x \in A$，$\forall y \in B$，组成一个有序对 (x, y)，把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的笛卡儿乘积或直积，记为 $A \times B$，即 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}$.

例如，$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } y \in \mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

直积可以推广到多个集合，例如：$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}$ 即为空间上全体点的集合. $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记为 $\mathbf{R}^3$.

4. 区间和邻域

区间是一类用得较多的数的集合. 设 a 和 b 为实数，且 $a < b$.

数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记为 (a, b)，即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a, b]$，即 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

数集 $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 和 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 均称为半开区间，分别记为 $(a, b]$ 和 $[a, b)$.

a，b 称为上述各区间的端点，数 $b-a$ 称为区间长度，由于 a，b 是有限的实数，故上述各区间均称为有限区间.

此外，引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）和 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如，$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$ 和 $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ 等均为无限区间.

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty, +\infty)$，它也是无限区间.

以后在不需要明确所论区间是否包含端点以及是有限区间还是无限区间时，就简称为“区间”，并且用常用字母 I 表示它.

邻域也是常用到的一类集合. 设 $\delta > 0$，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为 a 的一个 δ 邻域，记为 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\},$$

其中，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，如图 1.1 所示. $U(a, \delta)$ 也可表示为 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$.

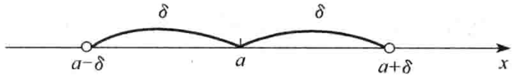

图 1.1

有时,用到的邻域需要把邻域中心去掉,由于 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$,故集合 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 不包含点 a,称为点 a 的去心 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

另外,把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.不关心 δ 的大小时,就将 a 的邻域表示为 $U(a)$.

1.1.2 映 射

1. 映射概念

设 X, Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中的每一个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记为

$$f:X\to Y.$$

其中,y 称为元素 x 在映射 f 下的像,并记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$,而 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个原像;集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f=X$; X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f=f(X)=\{y\mid y=f(x),\ x\in X\}.$$

例 1.1.1 设 $X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $Y=\{a,b,c,d\}$,下面所规定的对应法则 f 显然是一个映射:

$$f(\alpha)=a,\quad f(\beta)=b,\quad f(\gamma)=d,$$

f 的定义域与值域分别为 $D_f=X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $R_f=\{a,b,d\}\subset Y$.

例 1.1.2 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对每个 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=x^2$.显然,f 是个映射,f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=\{y\mid y\geqslant 0\}$,它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集.

例 1.1.3 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$,对每个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\sin x$,显然,f 是个映射,其定义域 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,值域 $R_f=[-1,1]$.

概括起来,构成一个映射必须具备下面三个基本要素:

(1) 集合 X,即定义域 $D_f=X$;

(2) 集合 Y,即限制值域的范围: $R_f\subseteq Y$;

(3) 对应法则 f,使得每个 $x\in X$,有唯一确定的元素 $y=f(x)$ 与之对应.

需要指出两点:

(1) 映射要求元素的像必须是唯一的;

（2）映射不要求原像也具有唯一性.

在例 1.1.2 中，Y 中与 $x=-2$ 和 $x=2$ 对应的元素都是 $y=4$，这不影响 f 成为一个映射.

设 f 是集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 一一映射（或双射）.

例 1.1.1 和例 1.1.3 是单射，例 1.1.3 是满射，因而例 1.1.3 是双射.

2. 逆映射、复合映射

设 f 是从 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$ 有唯一的 $x\in X$，满足 $f(x)=y$，于是，可以定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即 $g:R_f\to X$.

对每一个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域为 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域为 $R_{f^{-1}}=X$.

设有两个映射 $g:X\to Y_1$，$f:Y_2\to Y$，其中，$Y_1\subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定义出一个从 X 到 Y 的对应法则，它将对每个 $x\in X$ 映成 $f[g(x)]\in Y$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Y 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 的复合映射，记作 $f\circ g$，即 $f\circ g:X\to Y$，$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$，$x\in X$.

注 由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是 $R_g\subset D_f$，如果这一条件得不到满足，就不能构成复合映射.

例 1.1.4 设有映射 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$g(x)=\sin x$，映射 $f:[-1,1]\to[0,1]$，对每个 $u\in[-1,1]$，$f(u)=\sqrt{1-u^2}$，则映射 g 和 f 构成的复合映射 $f\circ g:\mathbf{R}\to[0,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|.$$

例 1.1.5 设映射 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有 $u=g(x)=1-x^2$，$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$，对每个 $u\in\mathbf{R}^+$，有 $f(u)=\ln u$，但 $R_g=(-\infty,1]\not\subset D_f$，因此不能构成复合映射 $f\circ g$. 但若将映射 g 的定义域缩小，就可以构成复合映射，比如令 $g:X=(-1,1)\to\mathbf{R}$，每个 $x\in X$，有 $u=g(x)=1-x^2$，和 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 对每个 $u\in\mathbf{R}^+$，有 $f(u)=\ln u$，则 $R_g=(0,1]\subset D_f$，于是就可以构成复合映射 $f\circ g:X=(-1,1)\to\mathbf{R}$，对每个 $x\in X$，有

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=\ln(1-x^2).$$

一般地，若 $R_g\subset D_f$ 不成立，但 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$，且在映射 g 下 $R_g\cap D_f$ 的原像集 $X_0\subset X$，则将 g 限制在 X_0 上，这时 $R_g\subset D_f$，于是可定义一个由 X_0 到 Y 的复合映射 $f\circ g$. 在后面定义的复合函数时，我们将采用与此一致的说法.

注 映射 g 和 f 的复合是有顺序的，这就是说，$f\circ g$ 有意义并不代表着 $g\circ f$ 也

一定有意义，即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 有意义，复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

1.1.3 函 数

1. 函数概念

定义 1.1.1 设非空数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中，x 为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$.

函数定义中，对每个 $x \in D$，按照法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记为 $f(x)$，即 $y = f(x)$. 函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 f 的值域，用 $f(D)$ 或 R_f 表示. 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

函数概念的几点说明：

(1) 按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值，但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x)$，$x \in D$”或“$y = f(x)$，$x \in D$”来表示定义在 D 上的函数. 这时应理解为由它所确定的函数 f.

(2) 表示函数的符号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如“g”，“ϕ”，“ψ”，“F”等. 相应地，函数记为 $y = g(x)$，$y = \phi(x)$ 或 $y = F(x)$ 等. 有时还可以用因变量的符号表示函数，即 $y = y(x)$.

(3) 函数是实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 中，因此构成函数的两个基本要素是：一是定义域，二是对应法则. 若两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数是相同的函数，否则就是表示不同的函数.

(4) 函数的定义域的确定通常有两种方式：一是对有实际背景的函数，根据它的实际意义来确定定义域；另一种是不考虑函数的实际意义，只抽象地研究用数学式子表示的函数，这时约定：函数的定义域就是自变量所能取的使数学式子有意义的一切实数值. 这种定义域称为函数的自然定义域. 例如函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的自然定义域是 $[-1, 1]$，$y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ 的自然定义域是 $(-1, 1)$. 一般来说，给出一个函数的具体表达式的同时，应该指出它的定义域. 否则表明默认它的定义域就是自然定义域.

2. 函数的图形

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $x \in D$，对应的函数值为 $y = f(x)$. 这样，以 x 为横坐标、以 y 为纵坐标就在 xOy 平面上确定了一点 (x, y). 当 x

取遍 D 上的每一个数值时,就得到点 (x, y) 的一个集合 C,即 $C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$. 则点集 C 称为函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 的图形,如图 1.2 所示. 图中的 R_f 表示函数的值域.

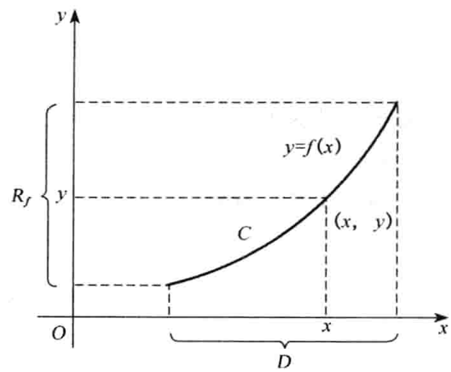

图 1.2

3. 函数的表示法

熟知的函数的表示法有三种:表格法、图形法和解析法.

表格法,即变量间的函数关系用列表的方法来表示,这种方法有利于查找函数值. 例如火车的时刻表,银行的外汇兑换表,等等.

图形法,即在坐标平面上把函数的图形描绘出来.

解析法,即把变量间的函数关系用方程给出,这些方程通常称为函数的解析表达式. 具体地,又分为三种情形:

(1) 显函数,即函数 y 由 x 的解析式直接表示出来. 例如 $y = \arctan x + x^2$.

(2) 隐函数,即 x 和 y 的对应关系由方程 $F(x, y) = 0$ 来确定. 例如 $xy + \ln y = 1$.

(3) 分段函数,即一个函数在其定义域的不同范围内具有不同的解析表达式.

下面给出几个分段函数的例子以及它们的图形表示.

例 1.1.6 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数,其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 它的图形如图 1.3 所示.

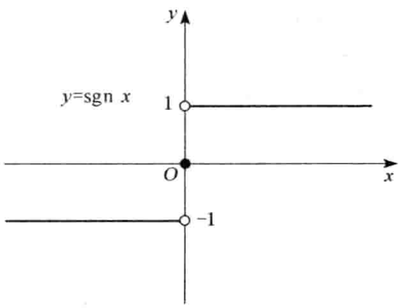

图 1.3

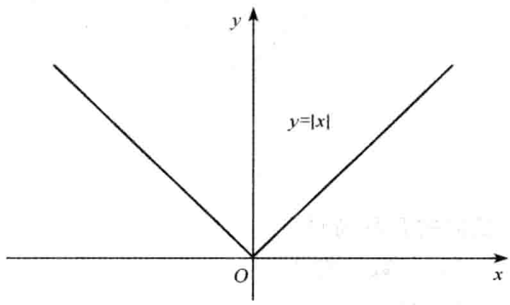

图 1.4

例 1.1.7 函数