高等代数与解析几何

曾令淮　段辉明　李玲　编著

清华大学出版社

高等代数与解析几何

曾令淮　段辉明　李玲　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书涵盖现行理工科所用的高等代数教材内容以及空间解析几何的基础知识，内容包含三部分：空间解析几何、多项式、线性代数，具体分为行列式、几何空间、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、一元多项式、线性空间、线性变换、欧几里得空间共10章内容.

本书适合于工科院校数学类各专业，而且前6章内容还适合理工科院校非数学类不开设高等数学而开设工科数学分析的专业讲授，后4章内容也可以作为这些专业学生的考研参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何/曾令淮，段辉明，李玲编著. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-37301-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①曾…　②段…　③李…　Ⅲ. ①高等代数—高等学校—教材　②解析几何—高等学校—教材　Ⅳ. ①O15　②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第159930号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　张：21.5　　字　数：520千字
版　　次：2014年9月第1版　　印　次：2014年9月第1次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：39.00元

产品编号：060962-01

前　言

本书是作者在使用多年的讲义基础上,结合工科类院校数学专业的教学实际,汲取国内其他教材的长处整理而成.它将高等代数与空间解析几何的内容结合在一起,用代数的方法解决几何问题,用几何的直观勾勒代数理论.

高等代数和空间解析几何是大学数学的两大专业基础课程.前者的基本内容是多项式理论、矩阵理论、向量空间和线性变换理论;后者的基本内容是向量代数、空间直线和平面、常见曲面、坐标变换、二次曲线方程的化简等.多年来,我国大部分高校的数学专业,都是将这两门课分开教学.高等代数是研究线性空间及其上的线性变换的学科,课程中大量的公式、定理、推论都是采用严格的演绎论证方法,抽象程度高,逻辑性强.学生在学习知识时很难深刻理解其中的抽象概念和复杂结论,学习效率不高.利用几何直观方法,把抽象的问题形象化,结合直观的形象对抽象内容加以理解,可以帮助学生理解概念,发现研究思路,有效开展推理、猜想,直至问题解决.因此,在教学中运用几何直观与演绎论证相结合的方法,不仅是学生学好高等代数的需要,而且对培养学生分析问题的能力和养成科学的思维品质都具有十分重要的意义.事实上,高等代数为解析几何提供研究方法,而解析几何为高等代数提供直观背景.近年来,一般大学数学课程中的高等代数和空间解析几何课程的课时减少了许多,而对数学内容的要求却没有多大变化.因此,给这两门课的教学造成了一定的困难.另外,从纯数学的观点来看,高等代数与空间解析几何,这两门课有许多重叠的地方.因此,将这两门课整合成一门课是必要的.

本书将代数与几何融合为一门课程,更密切了它们的联系,避免了重叠,利用几何为代数提供直观背景来发展学生的想象能力,可以消除代数的抽象感,应用代数处理几何问题,可以使学生感受到代数应用的广泛性,使学生对代数与几何的理解更加深刻.

本书注重学生的学习体验,习题中题目与教学内容的难度相匹配,题目难易度有层次,便于学生学习.每章末有本章小结,介绍了相应章节知识的基本概念与基本解题方法,并配有复习题,便于学生复习巩固.

感谢重庆邮电大学理学院的领导和同事对本书编写提供的支持与帮助.限于时间仓促,书中难免有纰漏之处,恳请读者指正.

编　者

2014 年 5 月

目　　录

第1章 行 列 式

行列式是数学的重要基本概念之一，也是代数学的主要研究对象之一. 在初等数学中，我们用代入消元法或加减消元法求解二元和三元线性方程组，从它们的解可以看出，线性方程组的解完全由未知量的系数与常数项所确定. 为了更清楚地表达线性方程组的解与未知量的系数和常数项的关系，本章先引入二阶和三阶行列式的概念，并在二阶和三阶行列式的基础上，给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质，进而把 n 阶行列式应用于解 n 元线性方程组.

1.1 二阶和三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

已知二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用消元法，可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

显然，上面解中的分母都是由方程组未知量的四个系数所确定，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称其为**二阶行列式**. 其中 a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表示该元素位于第 j 列.

注 二阶行列式的定义可用对角线法则来记忆，把 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的连线称为副对角线，则二阶行列式就等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

利用二阶行列式的定义，若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq0$ 时，二元线性方程组(1.1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

其中分母 D 是由方程组(1.1.1)的系数所确定的二阶行列式(称之为方程组(1.1.1)的**系数行列式**)，x_1 的分子 D_1 是用方程组的常数项替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用方程组的常数项替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1.1.1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases}3x_1+5x_2=1,\\ x_1+3x_2=2.\end{cases}$$

解 因方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&5\\1&3\end{vmatrix}=4\neq0,$$

所以方程组有唯一解，又因为

$$D_1=\begin{vmatrix}1&5\\2&3\end{vmatrix}=-7,\quad D_2=\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=5,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{7}{4},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{5}{4}.$$

1.1.2 三阶行列式

对于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1.1.2}$$

用 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$ 乘第一个方程，$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$ 乘第二个方程，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ 乘第三个方程，再把所得的三个式子相加，则可消去未知量 x_2 和 x_3，得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{13}b_2a_{32}+a_{12}a_{23}b_3-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

于是当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq0$$

时，可解出 x_1.

引入记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为**三阶行列式**.

三阶行列式等于 6 项的代数和，每项均为取行列式中不同行不同列的三个元素乘积再冠以正负号.

三阶行列式的定义也可按对角线法则记忆(图 1-1-1)，实线上的三个数相乘所得到的项带正号，虚线上的三个数相乘所得到的项带负号.

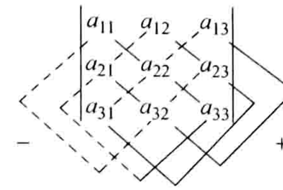

图 1-1-1

按三阶行列式定义，三元线性方程组(1.1.2)当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

它们分别是将系数行列式 D 的第 1 列、第 2 列、第 3 列换成常数项所得的行列式.

例 1.1.2 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}$.

解 (1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4$$
$$-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3)=-14;$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12=x^2-5x+6.$$

例 1.1.3 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=1, \\ x_1-3x_2-4x_3=-10. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}=-4+(-6)+2-1-3-16=-28\neq0,$$

所以方程组有唯一解. 又由

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -10 & -3 & -4 \end{vmatrix}=-4+(-20)+(-3)-(-10)-3-8=-28,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\1&-10&-4\end{vmatrix}=-4+(-1)+(-20)-1-10-(-8)=-28,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&1\\1&-3&-10\end{vmatrix}=-10+(-2)+(-6)-1-(-3)-40=-56,$$

得方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=2.$$

习题 1.1

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

2. 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-3,\\x_1-2x_2+2x_3=2,\\2x_1-5x_2+4x_3=4;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x_1-4x_2-x_3=1,\\x_1-5x_2-3x_3=2,\\x_1-x_2-x_3=-1.\end{cases}$

1.2 排列

如何将二阶、三阶行列式概念推广到 n 阶行列式？

重新分析二阶、三阶行列式的定义，有

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

观察得知，它们是一些乘积项的代数和，且每一项都是由行列式中位于不同行不同列的元素作乘积而得；二阶行列式有 2(即 2!)项，三阶行列式有 6(即 3!)项；取正号的项与取负号的项各占一半.

由此，我们可以定义 n 阶行列式为 $n!$ 项的代数和，每项由行列式中位于不同行不同列的 n 个元素作乘积而得. 但需要解决的问题是：哪些项取正号，哪些项取负号？为此引入排

列及其逆序数的相关问题.

在数学中,把考察的对象叫元素,把 n 个不同元素排成的一列,称之为这 n 个元素的一个全排列,简称排列.这里仅考察 n 个不同数字的排列.

1.2.1 排列及其逆序数

定义 1.2.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 元排列**.

如排列 32514,12354,25314 等都是 5 元排列.

一般地,n 元排列共有 $n!$ 种排列方法.

在一个排列中,我们规定各元素之间有一个标准次序,对 n 元排列,规定由小到大的次序为**标准次序**,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说它们构成一个**逆序**,即在排列 $p_1p_2\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n$ 中,若数 $p_s>p_t$,则称 p_s 与 p_t 构成一个逆序.

定义 1.2.2 一个排列中所有逆序的总数称为该排列的**逆序数**,排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

排列 $p_1p_2\cdots p_k\cdots p_n$ 中排在数 p_k 前而比 p_k 大的数的个数称为 p_k 在此排列中的逆序数,记为 t_k.

显然

$$t(p_1p_2\cdots p_n)=\sum_{k=1}^{n}t_k.$$

例 1.2.1 计算排列 32415 的逆序数.

解 $t(32415)=0+1+0+3+0=4$.

定义 1.2.3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1.2.2 计算下列排列的逆序数,并讨论它们的奇偶性.

(1) 217986354;　　　(2) $n(n-1)(n-2)\cdots321$.

解 (1) $t(217986354)=0+1+0+0+1+3+4+4+5=18$,故排列 217986354 是偶排列.

(2) $t(n(n-1)(n-2)\cdots321)=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$,故排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 当 $n=4k,n=4k+1$ 时是偶排列,当 $n=4k+2,n=4k+3$ 时是奇排列,其中 k 为自然数.

1.2.2 对换

定义 1.2.4 在排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,这样作出新排列的手续叫**对换**;将相邻两个数对调,叫**相邻对换**.

定理 1.2.1 一个排列中任意两个元素对换,排列的奇偶性改变.

证明 先考察相邻对换情形.设排列

$$p_1\cdots p_kabq_1\cdots q_s,$$

对换 a 与 b 得到新排列

$$p_1\cdots p_k baq_1\cdots q_s.$$

由逆序数的定义，排列 $p_1\cdots p_k abq_1\cdots q_s$ 中 a 与 b 对换后，除 a,b 外，其余元素的逆序数不变；而当 $a>b$ 时，a 的逆序数不变，b 的逆序数减 1；当 $a<b$ 时，a 的逆序数加 1，b 的逆序数不变，总之 $t(p_1\cdots p_k abq_1\cdots q_s)$ 与 $t(p_1\cdots p_k baq_1\cdots q_s)$ 相差 1，即排列 $p_1\cdots p_k abq_1\cdots q_s$ 与排列 $p_1\cdots p_k baq_1\cdots q_s$ 的奇偶性不同.

再考虑一般情形. 设排列

$$p_1\cdots p_k ac_1\cdots c_l bq_1\cdots q_s,$$

对换数 a 与 b 得到新排列

$$p_1\cdots p_k bc_1\cdots c_l aq_1\cdots q_s.$$

这只需先将 a 依次与 $c_1,\cdots,c_l,b$ 对换，共进行 $l+1$ 次相邻对换得到排列

$$p_1\cdots p_k c_1\cdots c_l baq_1\cdots q_s,$$

再将 b 依次与 $c_l,\cdots,c_1$ 对换，共进行 l 次相邻对换得到排列

$$p_1\cdots p_k bc_1\cdots c_l aq_1\cdots q_s.$$

于是对排列 $p_1\cdots p_k ac_1\cdots c_l bq_1\cdots q_s$ 作 $2l+1$ 次相邻对换即可得到新排列

$$p_1\cdots p_k bc_1\cdots c_l aq_1\cdots q_s.$$

而 $2l+1$ 是奇数，因此排列 $p_1\cdots p_k ac_1\cdots c_l bq_1\cdots q_s$ 与排列 $p_1\cdots p_k bc_1\cdots c_l aq_1\cdots q_s$ 的奇偶性不同.

利用定理 1.2.1 容易证明下面两个定理.

定理 1.2.2 任意一个 n 元排列与标准顺序排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互换，并且所作对换的次数与 n 元排列有相同的奇偶性.

定理 1.2.3 在全部 n 元排列中，偶排列与奇排列各有 $\frac{n!}{2}(n\geqslant 2)$ 个.

习题 1.2

1. 由数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个排列中，位于第 k 个位置的数 n 构成多少个逆序？

2. 计算下列排列的逆序数，并判断排列的奇偶性.

(1) 3412；　(2) 7564132；　(3) 24315876；　(4) 127485639.

3. 计算下列排列的逆序数.

(1) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$；　(2) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

4. 选择 i 与 j 使下述 9 元排列

(1) $1245i6j97$ 为奇排列；　(2) $3972i51j4$ 为偶排列.

5. 假设 n 个数码的排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n$ 的逆序数是 k，求排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的逆序数.

1.3 *n* 阶行列式

为给出 n 阶行列式的定义，先来分析三阶行列式的结构. 由三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$