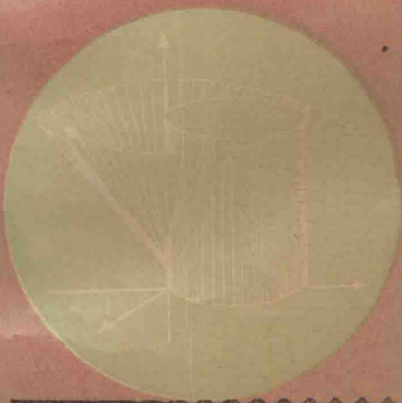
GAODENGXUEXIAO
HANSHOUSHIYONGJIAOCAI

高等学校函授试用教材

高等数学

熊钰庆　张希光　主编

下册



广东高等教育出版社

高等学校函授试用教材

高 等 数 学

（下册）

熊钰庆 张希光 主编

广东高等教育出版社

内 容 提 要

本书系根据1984年原教育部颁发试行的《中学教师进修高等师范本科物理专业教学大纲》编写的。全书分上、下两册。上册内容包括：变量与函数，极限与函数连续性，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程等章。下册内容包括：无穷级数，空间解析几何，多元函数的微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，场论，行列式与矩阵等章。每章有内容提要，并附有小结和习题。书末附有各章习题答案。全书内容约需面授150学时。

本书可作为高等师范院校物理专业函授本科和中学物理教师进修的教材，也可作为夜大学等其他形式成人教育和自学用书。

前　言

随着函授等成人教育事业的蓬勃发展，迫切需要能保证教育质量体现函授等成人教育特点、适应于自学的教材。华中师范大学、华南师范大学、陕西师范大学、广西师范大学、湖南师范大学、湖北大学、河南大学、河南师范大学、陕西教育学院和湖北教育学院十所高等学校，根据原教育部颁发试行的《中学教师进修高等师范本科物理专业教学大纲》，结合各校多年来举办函授和中学教师进修的实践，合编了物理专业函授教材十七门。本书是该系列教材之一。

在编写过程中，我们力图使教材符合培养规格，保证教学质量，达到全日制高师本科物理专业的科学水平。为了使教材体现函授等成人教育的特点，适合于自学，除每章有提要、小结、习题和书末附有答案外，选择的例题较典型而全面，公式的推导较详细，注意突破难点和适当联系中学物理教学实际。

本书由华南师范大学熊钰庆教授和张希光副教授担任主编。全书分上、下两册。上册由黄明慧（第一、二、三章）、张希光（第四、七章）、梁国礼（第五、六章）编写，由张希光统编审定；下册由李玉新（第八、十章）、熊钰庆（第十一、十二、十三章）、李永宁（第九、十四章）编写，由熊钰庆统编审定。黄明慧老师对全书的审定提出许多宝贵的意见。蔡永猷老师为本书绘制全部插图，特此致谢。

由于我们编写函授教材的经验不足，水平有限，加之时间仓促，书中难免有不少缺点和错误，诚恳希望使用本书的教师和读者批评指正。

十校物理专业函授教材编写组

一九八六年十一月

目　录

第八章　无 穷 级 数

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分，它是表示函数、研究函数的性质以及进行数值计算的一种工具．无穷级数的理论是非常丰富的，应用也是多方面的．它大大开拓了应用微积分解决各种问题的范围．幂级数、傅立叶级数是无穷级数理论中两个重要的组成部分．本章在首先介绍无穷 级数的一 些基本概念之后，着重讨论幂级数和傅立叶级数．

§8—1　常数项级数的概念和主要性质

一、无穷级数的一般概念

给定一个序列（数列或函数列）

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots,$$

把此序列一项项地加起来，即

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

就称为无穷级数，简称级数，用记号$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$来表示．其中第$n$项$u_n$叫做级数的一般项或通项。

如果级数的每一项都是常数，我们称这种级数为常数项级数；如果级数的每一项都是函数，称这种级数为函数项级数。函数项级数中每一项都是幂函数的无穷级数称为幂级数。

例如　$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots,$$

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots,$$

都是常数项级数。又如

$$1-x+x^2-x^3+\cdots(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots,$$

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx+\cdots,$$

都是函数项级数．我们先从最简单的常数项级数谈起．

二、无穷级数的收敛概念

无穷级数是无限多项的累加，只在一定条件下才有意义．如果它能等于一个有限数，我们就说这个级数有“和”，或者说它可以求和，否则就说它没有“和”．为了讲清这个重要概念，我们先看几个具体的例子．注意从有限项的和出发，观察它们的变化趋势，由此理解无穷级数中无穷多项相加的含义．

例1　讨论级数

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots,$$

即

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}+\cdots+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10^{n-1}}+\cdots,$$

这是以$\frac{1}{10}$为公比、首项为$\frac{3}{10}$的等比级数（又称几何级数），它的前n项和为

$$s_n=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10^{n-1}},$$

由等比数列前n项和公式

$$s_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

得

$$s_n=\frac{\frac{3}{10}\left[1-(\frac{1}{10})^n\right]}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right),$$

因为

$$\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=\frac{1}{3},$$

所以称这个级数的和就是$\frac{1}{3}$，即

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots.$$

例 2 讨论级数

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots.$$

这是一个公差为1的等差级数．我们知道它的前n项和为

$$s_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

显然

$$\lim_{n\to+\infty} s_n=+\infty.$$

这样的级数我们认为没有和．

例 3 讨论级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots.$$

第一项是1　　　　　　记$s_1=1$，

前两项之和是$1-1$　　　记$s_2=0$，

前三项之和是$1-1+1$　　记$s_3=1$，

……　　　　　　　　　……

继续加下去，总是得0或1，s_n不趋向于一个固定的数，这时我们也说级数没有和．

分析上面三个例子，级数各项无限累加的结果可归纳为两种情形；一种是前n项和s_n当$n\to+\infty$时有$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=s$，这常数$s$就是级数的和，这种级数的无限项累加是有意义的，我们称此级数收敛．另一种级数的前n项和s_n，当$n\to+\infty$时，或无限增大，或摇摆不定，都不趋向于一个确定的常数，这种级数的无限项累加没