

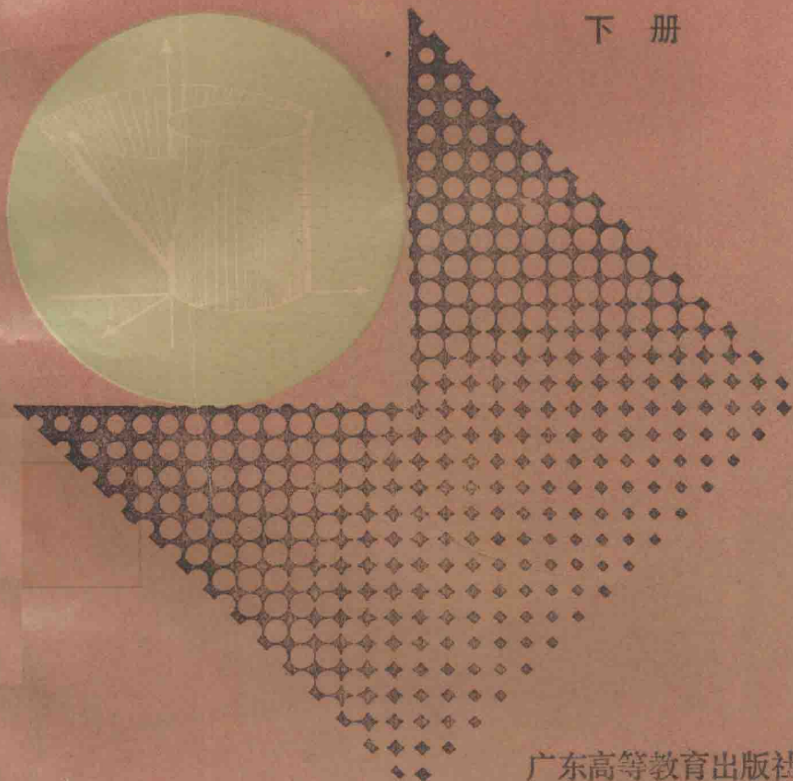
GAODENGXUEXIAO
HANSHOUSHIYONGJIAOCAI

高等学校函授试用教材

高等数学

熊钰庆 张希光 主编

下 册



广东高等教育出版社

高等学校函授试用教材

高等数学

(下册)

熊钰庆 张希光 主编

广东高等教育出版社

内 容 提 要

本书系根据1984年原教育部颁发试行的《中学教师进修高等师范本科物理专业教学大纲》编写的。全书分上、下两册。上册内容包括：变量与函数，极限与函数连续性，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程等章。下册内容包括：无穷级数，空间解析几何，多元函数的微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，场论，行列式与矩阵等章。每章有内容提要，并附有小结和习题。书末附有各章习题答案。全书内容约需面授150学时。

本书可作为高等师范院校物理专业函授本科和中学物理教师进修的教材，也可作为夜大学等其他形式成人教育和自学用书。

本书由华南师范大学盛国庚教授和朱希尧副教授共同主编。上册由盛国庚（第一章、第二章、第三章、第四章、第五章、第六章、第七章、第八章、第九章、第十章、第十一章、第十二章、第十三章、第十四章、第十五章、第十六章、第十七章、第十八章、第十九章、第二十章、第二十一章、第二十二章、第二十三章、第二十四章、第二十五章、第二十六章、第二十七章、第二十八章、第二十九章、第三十章、第三十一章、第三十二章、第三十三章、第三十四章、第三十五章、第三十六章、第三十七章、第三十八章、第三十九章、第四十章、第四十一章、第四十二章、第四十三章、第四十四章、第四十五章、第四十六章、第四十七章、第四十八章、第四十九章、第五十章、第五十一章、第五十二章、第五十三章、第五十四章、第五十五章、第五十六章、第五十七章、第五十八章、第五十九章、第六十章、第六十一章、第六十二章、第六十三章、第六十四章、第六十五章、第六十六章、第六十七章、第六十八章、第六十九章、第七十章、第七十一章、第七十二章、第七十三章、第七十四章、第七十五章、第七十六章、第七十七章、第七十八章、第七十九章、第八十章、第八十一章、第八十二章、第八十三章、第八十四章、第八十五章、第八十六章、第八十七章、第八十八章、第八十九章、第九十章、第九十一章、第九十二章、第九十三章、第九十四章、第九十五章、第九十六章、第九十七章、第九十八章、第九十九章、第一百章）编写，下册由朱希尧（第一章、第二章、第三章、第四章、第五章、第六章、第七章、第八章、第九章、第十章、第十一章、第十二章、第十三章、第十四章、第十五章、第十六章、第十七章、第十八章、第十九章、第二十章、第二十一章、第二十二章、第二十三章、第二十四章、第二十五章、第二十六章、第二十七章、第二十八章、第二十九章、第三十章、第三十一章、第三十二章、第三十三章、第三十四章、第三十五章、第三十六章、第三十七章、第三十八章、第三十九章、第四十章、第四十一章、第四十二章、第四十三章、第四十四章、第四十五章、第四十六章、第四十七章、第四十八章、第四十九章、第五十章、第五十一章、第五十二章、第五十三章、第五十四章、第五十五章、第五十六章、第五十七章、第五十八章、第五十九章、第六十章、第六十一章、第六十二章、第六十三章、第六十四章、第六十五章、第六十六章、第六十七章、第六十八章、第六十九章、第七十章、第七十一章、第七十二章、第七十三章、第七十四章、第七十五章、第七十六章、第七十七章、第七十八章、第七十九章、第八十章、第八十一章、第八十二章、第八十三章、第八十四章、第八十五章、第八十六章、第八十七章、第八十八章、第八十九章、第九十章、第九十一章、第九十二章、第九十三章、第九十四章、第九十五章、第九十六章、第九十七章、第九十八章、第九十九章、第一百章）编写。全书由盛国庚教授审定。本书在编写过程中，得到了华南师范大学物理系领导和同事们的大力支持，特别是物理系系主任朱希尧教授，在百忙之中审阅了全书，并提出了许多宝贵意见，使本书得以顺利出版。本书在编写过程中，还参考了国内外许多物理教材和有关文献，在此一并致谢。本书在编写过程中，得到了华南师范大学物理系领导和同事们的大力支持，特别是物理系系主任朱希尧教授，在百忙之中审阅了全书，并提出了许多宝贵意见，使本书得以顺利出版。本书在编写过程中，还参考了国内外许多物理教材和有关文献，在此一并致谢。

（物理系物理教研室）

前 言

随着函授等成人教育事业的蓬勃发展，迫切需要能保证教育质量体现函授等成人教育特点、适应于自学的教材。华中师范大学、华南师范大学、陕西师范大学、广西师范大学、湖南师范大学、湖北大学、河南大学、河南师范大学、陕西教育学院和湖北教育学院十所高等学校，根据原教育部颁发试行的《中学教师进修高等师范本科物理专业教学大纲》，结合各校多年来举办函授和中学教师进修的实践，合编了物理专业函授教材十七门。本书是该系列教材之一。

在编写过程中，我们力图使教材符合培养规格，保证教学质量，达到全日制高师本科物理专业的科学水平。为了使教材体现函授等成人教育的特点，适合于自学，除每章有提要、小结、习题和书末附有答案外，选择的例题较典型而全面，公式的推导较详细，注意突破难点和适当联系中学物理教学实际。

本书由华南师范大学熊钰庆教授和张希光副教授担任主编。全书分上、下两册。上册由黄明慧（第一、二、三章）、张希光（第四、七章）、梁国礼（第五、六章）编写，由张希光统编审定；下册由李玉新（第八、十章）、熊钰庆（第十一、十二、十三章）、李永宁（第九、十四章）编写，由熊钰庆统编审定。黄明慧老师对全书的审定提出许多宝贵的意见。蔡永猷老师为本书绘制全部插图，特此致谢。

由于我们编写函授教材的经验不足，水平有限，加之时间仓促，书中难免有不少缺点和错误，诚恳希望使用本书的教师和读者批评指正。

十校物理专业函授教材编写组

一九八六年十一月

目 录

第八章 无穷级数	(1)
§ 8-1 常数项级数的概念和主要性质	(1)
一、常数级数的一般概念	(1)
二、无穷级数的收敛概念	(2)
三、无穷级数的基本性质	(5)
习题 8-1	(9)
§ 8-2 正项级数的审敛法	(10)
一、正项级数的比较审敛法	(10)
二、正项级数的比值审敛法	(12)
三、正项级数的根值审敛法	(15)
四、正项级数的积分审敛法	(17)
习题 8-2	(19)
§ 8-3 任意项级数	(20)
一、交错级数及其审敛法	(20)
二、绝对收敛与条件收敛	(22)
习题 8-3	(24)
§ 8-4 函数项级数	(24)
一、函数项级数的基本概念	(24)
二、一致收敛性概念	(27)
三、函数项级数一致收敛性的判别法	(29)
四、一致收敛级数的性质	(30)
习题 8-4	(33)
§ 8-5 幂级数	(33)
一、幂级数的概念及其收敛性	(33)
二、幂级数的运算	(37)

习题 8—5	(40)
§ 8-6 函数的幂级数展开式	(41)
一、函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数	(41)
二、函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式	(43)
三、几个初等函数的泰勒展开式	(44)
习题 8—6	(48)
§ 8-7 幂级数的应用	(49)
一、近似计算	(49)
二、计算定积分的近似值	(52)
三、欧拉公式	(53)
习题 8—7	(54)
§ 8-8 傅立叶级数	(54)
一、三角函数系的正交性	(54)
二、函数的傅立叶级数	(55)
三、函数的傅立叶展开式	(60)
习题 8—8	(63)
§ 8-9 正弦级数和余弦级数	(64)
一、奇函数和偶函数的傅立叶级数	(64)
二、函数展开成正弦级数和余弦级数	(67)
习题 8—9	(70)
§ 8-10 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数及其复数形式	(70)
一、周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数	(70)
二、傅立叶级数的复数形式	(74)
习题 8—10	(79)
小结	(80)
第九章 空间解析几何与矢量代数	(83)
§ 9-1 空间直角坐标系	(83)
一、空间点的直角坐标	(83)

(311)	二、空间两点间的距离	(85)
(311)	习题 9—1	(85)
(311)	§ 9-2 矢量及其加减法 矢量与数量的乘积	(86)
(311)	一、矢量的概念及其表示	(86)
(311)	二、矢量的加减法	(87)
(311)	三、数与矢量的乘法	(89)
(311)	习题 9—2	(90)
(311)	§ 9-3 矢量的坐标表示法	(90)
(311)	一、矢量在轴上的投影与投影定理	(90)
(311)	二、矢量的坐标表示法	(93)
(311)	三、矢量的模与方向余弦的坐标表示式	(95)
(311)	习题 9—3	(98)
(311)	§ 9-4 矢量的数量积	(99)
(311)	一、矢量数量积的概念	(99)
(311)	二、矢量的数量积的运算规律	(100)
(311)	三、矢量数量积的坐标表示式	(101)
(311)	习题 9—4	(102)
(311)	§ 9-5 矢量的矢量积	(103)
(311)	一、矢量积的概念	(103)
(311)	二、矢量积的运算规律	(104)
(311)	三、矢量积的坐标表示式	(105)
(311)	习题 9—5	(107)
(311)	§ 9-6 矢量的混合积	(108)
(311)	一、混合积的坐标表示式	(108)
(311)	二、混合积的几何意义	(109)
(311)	习题 9—6	(110)
(311)	§ 9-7 平面及其方程	(110)
(311)	一、平面的点法式方程	(110)
(311)	二、平面的一般方程式	(112)
(311)	三、平面的截距式方程	(114)

(08)	四、点到平面的距离	(115)
(88)	习题 9—7	(116)
(8)	§ 9-8 空间直线及其方程	(117)
(8)	一、空间直线的一般方程	(117)
(78)	二、直线的参数方程与标准方程	(118)
(08)	三、直线与直线、直线与平面的一些问题	(122)
(87)	习题 9—8	(124)
(0)	§ 9-9 空间曲面与曲线及其方程	(125)
(68)	一、曲面方程的概念	(125)
(16)	二、球面	(126)
(60)	三、柱面	(127)
(80)	四、旋转曲面	(128)
(66)	五、空间曲线	(131)
(80)	六、几种常见的二次曲面	(134)
(00)	习题 9—9	(138)
(10)	小结	(139)

第十章 多元函数的微分法及其应用

(8)	§ 10-1 多元函数的基本概念	(145)
(10)	一、多元函数的概念	(145)
(60)	二、二元函数的极限和连续性	(150)
(70)	习题 10—1	(154)
(8)	§ 10-2 偏导数	(154)
(80)	一、偏导数的定义及其求法	(154)
(00)	二、偏导数的几何意义	(157)
(01)	三、高阶偏导数	(158)
(01)	习题 10—2	(160)
(8)	§ 10-3 全微分及其应用	(161)
(11)	一、全微分的定义	(161)
(11)	二、二元函数可微与偏导存在的关系	(162)

三、全微分在近似计算及误差估计中的应用	(165)
习题 10—3	(168)
§ 10-4 多元复合函数的求导法则及隐函数的求导公 式	(168)
一、多元复合函数的求导法则	(168)
二、全微分形式的不变性	(173)
三、隐函数的求导公式	(174)
习题 10—4	(177)
§ 10-5 偏导数的几何应用	(178)
一、空间曲线的切线与法平面	(178)
二、曲面的切平面及法线	(180)
习题 10—5	(183)
§ 10-6 多元函数的极值及其求法	(184)
一、多元函数的极值	(184)
二、多元函数的最值	(187)
三、条件极值——拉格朗日乘数法	(189)
习题 10—6	(193)
小结	(193)

第十一章 重积分

§ 11-1 二重积分的概念和性质

- 一、引出二重积分概念的实例
- 二、二重积分的概念
- 三、二重积分的性质

§ 11-2 二重积分在直角坐标系中的计算方法

- 一、面积元素
 - 二、计算方法
- 习题 11—2

§ 11-3 二重积分在极坐标系中的计算方法

- 一、面积元素

二、计算方法	(217)
习题11—3	(221)
§ 11-4 二重积分的应用	(222)
一、几何上的应用	(222)
二、物理上的应用	(226)
习题11—4	(231)
§ 11-5 三重积分的概念	(232)
一、非均匀物体的质量	(232)
二、三重积分的定义	(233)
§ 11-6 三重积分在直角坐标系中的计算方法	(234)
一、体积元素	(234)
二、计算方法	(234)
三、三重积分的应用	(236)
习题11—6	(239)
§ 11-7 柱面坐标系及球面坐标系中三重积分的计算方法	(240)
一、柱面坐标系中的计算方法	(240)
二、球面坐标系中的计算方法	(243)
习题11—7	(248)
小结	(250)
第十二章 曲线积分与曲面积分	(251)
§ 12-1 对弧长的曲线积分	(251)
一、对弧长的曲线积分的概念	(251)
二、对弧长的曲线积分的性质	(253)
三、对弧长的曲线积分的计算法	(254)
习题12—1	(258)
§ 12-2 对坐标的曲线积分	(259)
一、对坐标的曲线积分的概念	(259)
二、对坐标的曲线积分的性质	(262)

三、对坐标的曲线积分的计算法	(265)
四、两类曲线积分之间的联系	(270)
五、对坐标曲线积分的矢量形式	(271)
习题12-2	(273)
§ 12-3 平面曲线积分与二重积分的联系——格林公式	(274)
习题 12-3	(282)
§ 12-4 平面上曲线积分与路径无关的条件	(282)
习题 12-4	(289)
§ 12-5 曲线积分的应用	(289)
一、曲线积分在几何上的应用	(289)
二、曲线积分在物理上的应用	(291)
习题12-5	(295)
§ 12 6 对面积的曲面积分	(296)
一、对面积的曲面积分概念	(296)
二、对面积的曲面积分计算法	(298)
习题12-6	(304)
§ 12 7 对坐标的曲面积分	(305)
一、对坐标的曲面积分概念	(305)
二、对坐标的曲面积分的性质	(311)
三、对坐标的曲面积分的计算法	(312)
四、两类曲面积分之间的联系	(318)
习题12-7	(319)
§ 12 8 高斯定理	(320)
一、曲面积分与三重积分之间的联系——高斯公式	(320)
二、曲面积分与曲面无关的条件	(326)
三、高斯公式的矢量形式	(327)
习题12-8	(327)
§ 12-9 斯托克斯定理	(328)
一、空间曲面边界闭曲线的方向	(329)

二、空间曲线积分与曲面积分的联系——斯托克斯定理	(329)
三、空间曲线积分与路径无关的条件	(336)
习题12—9	(337)
小 结	(337)

第十三章 场论 (340)

§13-1 场的基本概念	(340)
一、数量场与矢量场	(340)
二、数量场的等值面	(341)
三、矢量场的矢线	(343)
习题13—1	(345)
§13-2 数量场的方向导数与梯度	(346)
一、方向导数	(346)
二、梯度	(347)
三、梯度和方向导数的直角坐标表示式	(349)
四、梯度的运算法则	(351)
习题13—2	(353)
§13-3 矢量场的流量与散度	(353)
一、流量与散度	(353)
二、散度在直角坐标系中的表示式	(357)
三、高斯定理的矢量形式	(358)
四、散度的运算法则	(358)
习题13—3	(361)
§13-4 矢量场的环流与旋度	(362)
一、矢量场的环流	(362)
二、矢量场的旋度	(365)
三、旋度的运算法则	(369)
习题13—4	(370)
§13-5 管量场、势量场和调和场	(370)
一、管量场	(370)

二、势量场	(372)
三、调和场	(374)
§ 13-6 矢量微分算符	(375)
一、利用算符表示梯度、散度和旋度	(375)
二、二阶微分运算	(377)
三、微分算符对两个函数乘积的作用	(378)
§ 13-7 曲线坐标	(379)
一、球面坐标系	(379)
二、柱面坐标系	(380)
三、应用举例	(381)
小 结	(384)
第十四章 行列式与矩阵	(385)
§ 14-1 n 阶行列式及其性质	(385)
一、全排列	(385)
二、 n 阶行列式的定义	(387)
三、行列式的性质	(390)
四、行列式按行(列)展开	(393)
五、克莱姆法则	(399)
习题 14-1	(402)
§ 14-2 矩阵及其运算	(403)
一、线性变换与矩阵	(403)
二、矩阵的运算	(406)
三、逆矩阵	(413)
习题 14-2	(419)
§ 14-3 向量组的线性相关性与矩阵的秩	(421)
一、引 例	(421)
二、 n 维向量	(423)
三、向量的线性相关与线性无关	(424)
四、矩阵的秩	(427)

五、矩阵的初等变换	(433)
习题 14—3	(436)
§ 14-4 线性方程组	(436)
一、线性方程组解的存在定理	(438)
二、非齐次线性方程组	(438)
三、齐次线性方程组	(441)
习题 14—4	(444)
§ 14-5 利用矩阵的初等行变换解线性方程组	(444)
习题 14—5	(448)
§ 14-6 方阵的特征值与特征矢量	(448)
一、方阵的特征值与特征矢量	(448)
二、相似矩阵	(452)
习题 14—6	(458)
小结	(459)

第八章 无穷级数

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分，它是表示函数、研究函数的性质以及进行数值计算的一种工具。无穷级数的理论是非常丰富的，应用也是多方面的。它大大开拓了应用微积分解决各种问题的范围。幂级数、傅立叶级数是无穷级数理论中两个重要的组成部分。本章在首先介绍无穷级数的一些基本概念之后，着重讨论幂级数和傅立叶级数。

§ 8—1 常数项级数的概念和主要性质

一、无穷级数的一般概念

给定一个序列（数列或函数列）

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots,$$

把此序列一项项地加起来，即

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

就称为无穷级数，简称级数，用记号 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 来表示。其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项或通项。

如果级数的每一项都是常数，我们称这种级数为常数项级数；如果级数的每一项都是函数，称这种级数为函数项级数。函数项级数中每一项都是幂函数的无穷级数称为幂级数。

例如 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots,$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots,$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots,$$

都是常数项级数。又如

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \cdots,$$

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx + \cdots,$$

都是函数项级数。我们先从最简单的常数项级数谈起。

二、无穷级数的收敛概念

无穷级数是无限多项的累加，只在一定条件下才有意义。如果它能等于一个有限数，我们就说这个级数有“和”，或者说它可以求和，否则就说它没有“和”。为了讲清这个重要概念，我们先看几个具体的例子。注意从有限项的和出发，观察它们的变化趋势，由此理解无穷级数中无穷多项相加的含义。

例1 讨论级数

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots,$$

即
$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} + \cdots + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10^{n-1}} + \cdots,$$

这是以 $\frac{1}{10}$ 为公比、首项为 $\frac{3}{10}$ 的等比级数（又称几何级数），它的前 n 项和为

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10^{n-1}},$$

由等比数列前 n 项和公式

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

得

$$s_n = \frac{\frac{3}{10} \left[1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right),$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{3},$$

所以称这个级数的和就是 $\frac{1}{3}$ ，即

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots.$$

例2 讨论级数

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$$

这是一个公差为1的等差级数。我们知道它的前 n 项和为

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

显然

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty.$$

这样的级数我们认为没有和。

例3 讨论级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

第一项是1 记 $s_1 = 1$,

前两项之和是 $1 - 1$ 记 $s_2 = 0$,

前三项之和是 $1 - 1 + 1$ 记 $s_3 = 1$,

.....

继续加下去，总是得0或1， s_n 不趋向于一个固定的数，这时我们也说级数没有和。

分析上面三个例子，级数各项无限累加的结果可归纳为两种情形；一种是前 n 项和 s_n 当 $n \rightarrow +\infty$ 时有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ ，这常数 s 就是级数的和，这种级数的无限项累加是有意义的，我们称此级数收敛。另一种级数的前 n 项和 s_n ，当 $n \rightarrow +\infty$ 时，或无限增大，或摇摆不定，都不趋向于一个确定的常数，这种级数的无限项累加没