高职高专公共基础课"十二五"规划教材

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

周世新◎主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专公共基础课“十二五”规划教材

高 等 数 学

主　编　周世新
副主编　司桂荣　李元占

机 械 工 业 出 版 社

本书是以教育部最新修订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为指导，以“必需，够用”为原则，适当降低了难度，在认真分析、研究高职高专院校高等数学课程教改经验的基础上编写而成. 在体系安排上，注重贯彻循序渐进的原则，精心配备了各章节的例题、习题和复习题，题型新颖多样，形成梯度，并备有答案.

主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、线性代数与线性规划简介，共8章.

本书可作为高职高专理工类、经管类各专业高等数学的教材，也可作为其他全日制高职高专院校、成人院校、高等教育自学考试、专升本的教材或参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/周世新主编. —北京：机械工业出版社，2011.6
高职高专公共基础课“十二五”规划教材
ISBN 978-7-111-33933-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 051991 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：王玉鑫 责任编辑：李大国 责任校对：姜 婷
封面设计：王伟光 责任印制：李 妍
北京富生印刷厂印刷
2011 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 15 印张 · 367 千字
0001－3000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-33933-5
定价：29.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务 网络服务

社服务中心：(010)88361066
销 售 一 部：(010)68326294
销 售 二 部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203

门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

前　　言

随着高职高专院校课程改革力度的不断加大，基础理论课教学内容与学时正在逐步被压缩，而传统教材的难度普遍偏大，重理论，轻应用．为了适应这种新形势的需要，我们以高职高专教育的培养目标为依据，本着“以必需、够用为度”的编写原则，突出“理清概念，强化基础，联系实际，注重应用”的特色，集思广益，编写了这本书．

本书共分8章，主要包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、线性代数与线性规划简介．这些内容基本可以满足高职高专院校绝大多数专业对高等数学教学的需求，其他各院校不同的专业，在“必需、够用”的原则下，可以方便地选取自己所需内容．

本书在吸收同类教材优点的基础上，结合高职高专教材改革的实际情况，精心组织教材内容，具有以下几个特点：

1. 弱化逻辑推理，注意把握理论推导证明的深度，并保持了系统的完整性．

2. 对传统教材体系进行整体优化，削枝强干，注重实用、讲求实效、学以致用，删减一些不必要的内容，努力体现高等职业教育和成人教育的特色．

3. 注重数学思想和数学方法的介绍，对基本概念、公式、定理的解释力求言简意赅；对一些较繁琐的定理，一般只给出结论或从几何直观角度予以说明．

4. 在整体结构设计上，每章设有基本要求，便于教师备课和学生学习；每章后有小结，内容不但包括了本章的基本知识、基本方法和难点解析，还有常见的问题类型，便于学生自学和总结；在每章后还增加了阅读材料，在抽象的数学学习过程中增添了生动的元素，同时又扩大了学生对数学家的了解，开阔了视野、拓展了思维空间，满足了数学爱好者的需求．

5. 精选每一道例题和习题，并做到每节有习题，每章有复习题；题型多样，题量充足，且具有一定的梯度、密度；所选例题、习题富有启发性、应用性，没有单纯性的技巧和难度较大的习题；习题中包含了部分专升本考试题目，以满足部分学生专升本复习与考试的需要；书后附有所有习题和复习题的参考答案，能较好地满足教师教学和学生复习考试的需求．

6. 重视联系实际，体现数学的应用．考虑到学生在数学基础状况方面有较大差异，因此，在编写过程中注意了应用的度，力求实事求是，努力满足教学的实际需要．

7. 考虑到矩阵及线性规划应用非常广泛，有一部分专业需要用到这些内容；另外，了解这些知识，对提高学生的职业能力和素质也是有益的，因此，本书中设置了第8章——线性代数与线性规划简介．

参加本书编写的人员都是在高职高专院校教学一线从事高等数学教学的教师，他们在多年教学实践中积累了丰富的教学经验，对高职高专数学教学有较深的体会和认识，十分熟悉广大高职高专学生的数学基础、能力及特点，这为编写出一本师生双方都满意的教材提供了有力保障．

该书由周世新副教授担任主编，司桂荣、李元占任副主编，具体分工为：周世新负责整体结构的设计和总撰稿工作，并负责第三、四、六、七章内容的编写工作，还给出了各章习题和复习题的参考答案；司桂荣编写第一、五章，李元占编写第二、八章.

由于编写时间仓促，加之作者水平有限，书中疏漏、不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以便今后改进.

编　者

目　　录

第1章　函　　数

本章是微积分学的最基础部分．函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，是微积分学中最重要的概念之一和研究的基本对象，也是研究现代科学技术和经济问题必不可少的高等数学基本知识．本章先复习中学已学习过的函数及其性质，进而给出基本初等函数与初等函数的定义．

【基本要求】

1. 理解函数的概念，会求函数的定义域、表达式及函数值，会求分段函数的定义域、函数值，并会作出简单的分段函数的图形．

2. 理解和掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性，会判断所给函数的类别．

3. 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系（定义域、值域、图形），会求单调函数的反函数．

4. 理解复合函数的概念，熟练掌握复合函数的复合过程．

5. 掌握基本初等函数的简单性质及其图形．

6. 了解初等函数的概念．

7. 会建立简单实际问题的数学模型．

8. 理解需求函数、供给函数、成本函数、收益函数、利润函数等几种常见经济函数的意义，会根据所给条件建立相应经济函数关系式．

1.1　函数的概念

1.1.1　区间和邻域

1. 区间

在实际问题中，一个变量根据所研究问题的条件，一般有着一定的变化范围，如果超出这个范围，就会使研究的问题失去意义．在数学中常用区间表示一个变量的变化范围，下边介绍一些常用的区间记号（设 a 与 b 是两个实数，且 $a\leqslant b$）．

（1）闭区间：满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，记作 $[a,b]$，在数轴上表示为以 a，b 为端点且包含端点 a 和 b 的线段．

（2）开区间：满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 的集合 $\{x\mid a<x<b\}$，记作 (a,b)，在数轴上表示为以 a，b 为端点但不包含端点 a 和 b 的线段．

（3）半开半闭区间：满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的全体实数 x 的集合 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$，记作 $[a,b)$，在数轴上表示为以 a，b 为端点包含端点 a 但不包含端点 b 的线段．类似地，满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$，记作 $(a,b]$，在数轴上表示为以 a，b 为端点不包含端点 a 但包含端点 b 的线段．

除了上述有限区间外，还有五种无穷区间：

(1) $[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$ 表示满足不等式 $x \geqslant a$ 的全体实数 x 的集合，在数轴上表示为以 a 为左端点的右半轴.

(2) $(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$ 表示满足不等式 $x>a$ 的全体实数 x 的集合，在数轴上表示为以 a 为左端点但不包括点 a 的右半轴.

(3) $(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$ 表示满足不等式 $x \leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，在数轴上表示为以 b 为右端点的左半轴.

(4) $(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$ 表示满足不等式 $x<b$ 的全体实数 x 的集合，在数轴上表示为以 b 为右端点但不包括点 b 的左半轴.

(5) $(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$ 表示全体实数，在几何上就表示整个数轴.

注意："$+\infty$"、"$-\infty$"是引用的符号，不能作为数看待.

2. 邻域

下面给出高等数学中经常用到的邻域的概念.

如图 1-1 所示，设 x_0 与 δ 是给定的两个实数，且 $\delta>0$，则以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $N(x_0,\delta)$. 其中，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，即

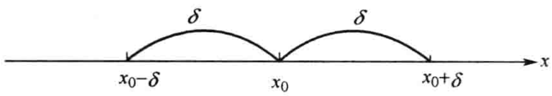

图 1-1

$$N(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

由于 $\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$，所以

$$N(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

表示与点 x_0 距离小于 δ 的一切点 x 的全体. 有时会用到点 x_0 的 δ 邻域中把中心 x_0 去掉，此时称为**点 x_0 的去心 δ 邻域**，记作 $N(\hat{x}_0,\delta)$，即

$$N(\hat{x}_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

其中，$0<|x-x_0|$ 表示 $x \neq x_0$.

例如，$N(2,1)=\{x \mid |x-2|<1\}=(1,3)$ 表示以点 $x_0=2$ 为中心，以 1 为半径的邻域；而 $N(\hat{2},1)=\{x \mid 0<|x-2|<1\}=(1,2)\cup(2,3)$ 表示以点 $x_0=2$ 为中心，以 1 为半径的去心邻域.

1.1.2　函数的定义

函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联. 到 1837 年，德国数学家狄利克莱抽象出了直至今日仍为人们易于接受，并且较为合理的函数概念.

关于函数的定义，在初中就介绍过了，在高中学了集合过后又有了一个定义，我们不妨回忆一下.

定义 1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个非空数集，若当变量 x 在集合 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f，有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\qquad x \in D$$

其中，变量 x 称为自变量；f 称为对应法则；变量 y 称为 x 的函数(或因变量)；自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$，通过对应规律 f，函数 y 有确定的值 y_0 与之相对应，则称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0 = y\big|_{x=x_0} = f(x_0)$$

函数值的集合，称为函数的值域，记作 Z. $Z=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$.

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

函数分为单值函数和多值函数. 在函数定义中，如果对于每个 $x\in D$，按照对应法则 f，对应的函数值 y 总是唯一的，那么这样定义的函数称为**单值函数**；如果对于每个 $x\in D$，按照对应法则 f，总有确定的函数值 y 与之对应，但这个 y 值不是唯一的，那么这样定义的函数称为**多值函数**. 例如，$y^2=x$，当 x 任取一个正数时，对应的 y 值有两个，所以这个函数是一个多值函数. 对于多值函数加上限定条件就可以转化为单值函数，上述函数若加上 $y\geqslant 0$（或 $y\leqslant 0$），则可以转化为单值函数. 本书中所讨论的函数除非特别说明，均指的是单值函数.

y 是 x 的函数，可以记作 $y=f(x)$，也可以记作 $y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$ 等，但同一函数在同一问题的讨论中应取定一种记法. 当同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律. 为方便起见，有时也用记号 $y=y(x)$，$u=u(x)$，$s=s(x)$ 等表示函数，这种函数的记号也称为函数的解析表达式.

函数的表示方法通常有三种：表格法、图形法和解析法. 常用的是解析法，即通过分析把变量之间的对应关系用一个公式表示出来.

例1 据统计，某地 2010 年 7 月 19 ~29 日每天的最高气温见表 1-1.

表 1-1

日期(7 月)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温/℃	29	31	31	30	24	21	23	19	26	28	30

这个表格表达了该地区的最高温度是日期的函数. 这里虽然不存在任何计算温度的公式，但是每一天都会产生出一个唯一的最高气温，即对每个日期都有一个唯一最高气温与之相对应.

1.1.3 函数的两个要素

1. 定义域

自变量的取值范围称为函数的定义域.

（1）定义域的表示方法：用不等式描述的集合；用区间表示；用邻域表示.

（2）定义域的求法：研究任何函数都要先考虑其定义域，在求函数的定义域时，要考虑以下情况：

① 分式的分母不能为零；

② 偶次开方时，被开方式非负；

③ 指数函数和对数函数中，底数大于零且不等于 1，对数函数的真数大于零；

④ 含反三角函数 $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 时，要满足 $|x|\leqslant 1$；

⑤ 若函数同时含有以上几种情况，则要取其公共部分.

例2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$； (2) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}+\lg\frac{x^2+2x}{3}$；

(3) $y=\log_{(3x-1)}(8-2^x)$.

解 (1) 由题意得$\begin{cases}1-x\neq 0\\4-x^2\geqslant 0\end{cases}$，所以所求函数的定义域为$[-2,1)\cup(1,2]$.

(2) 由题意得$\begin{cases}\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1\\x^2+2x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3\\x>0 \text{ 或 } x<-2\end{cases}$，所以所求函数的定义域为$(0,3]$.

(3) 要使函数有意义，必须满足

$$\begin{cases}8-2^x>0\\3x-1>0,\\3x-1\neq 1\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x<3\\x>\frac{1}{3}\\x\neq\frac{2}{3}\end{cases}$$

故所求函数的定义域为$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},3\right)$.

【课堂练习】 求下列函数的定义域：(1)$y=\sqrt{3x-5}$；(2)$y=\frac{1}{\lg(3x-2)}$.

2. 对应规则

函数的对应规则是指由自变量的取值确定因变量取值的规律.

例 3 $f(x)=5x^2-2x+1$ 表示一个特定的函数，f 确定的对应规律为

$$f(\quad)=5(\quad)^2-2(\quad)+1$$

例 4 设 $y=f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}$，求$f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

解
$$y\Big|_{x=\frac{2}{\pi}}=f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}.$$

函数的定义域、对应法则称为函数的两个要素.

一个函数若它的定义域、对应法则确定，则其值域就确定. 因此，两个函数表达式是否表示同一个函数，主要就看其定义域、对应法则是否一样.

例 5 判断下列函数表达式是否表示同一个函数.

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\frac{x^2}{x}$； (2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$； (4) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(5) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$； (6) $f(u)=\sqrt{u}$，$g(x)=\sqrt{x}$.

解 根据函数的定义域、对应法则是否相同进行判断可知：(1)否；(2)否；(3)是；(4)是；(5)否；(6)是.

3. 函数的值域

函数值的取值的集合，称为函数的值域.

一般地，求一个函数的值域都比较麻烦，由于在高等数学中用的比较少，因此这里不再仔细地介绍，大家掌握好如何求函数值就行了.

例 6 求函数$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$在 $x=0$，3，a，$\dfrac{1}{a}$，$3a-2b$ 的函数值.

解 $f(0)=\dfrac{0+1}{0-1}=-1$；　$f(3)=\dfrac{3+1}{3-1}=2$；　$f(a)=\dfrac{a+1}{a-1}$；

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{1}{a}+1}{\frac{1}{a}-1}=\frac{1+a}{1-a};\ f(3a-2b)=\frac{3a-2b+1}{3a-2b-1}.$$

例 7 若$f(x-1)=3x^2-5$，求$f(x)$.

解法 1
$$\begin{aligned}f(x-1)&=3x^2-5=3(x^2-2x+1)+6x-3-5\\&=3(x-1)^2+6x-6-2\\&=3(x-1)^2+6(x-1)-2\end{aligned}$$

故$f(x)=3x^2+6x-2$.

解法 2 令 $x-1=t$，则 $x=t+1$. 将此代入表达式

$$\begin{aligned}f(t)&=3(t+1)^2-5\\&=3t^2+6t-2\end{aligned}$$

故$f(x)=3x^2+6x-2$.

1.1.4 分段函数

例 8 求绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$的定义域、值域，并画出草图.

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，其图形如图 1-2 所示.

例 9 求符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$的定义域、值域，并画出草图.

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-3 所示.

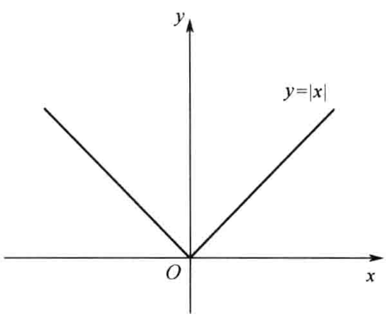

图 1-2

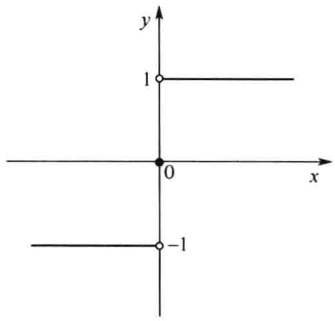

图 1-3

例 10 狄利克莱函数 $y=D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 是有理数}\\ 0 & x\text{ 是无理数}\end{cases}$，此函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{0,1\}$，这个函数不能用图形把它表示出来.

有的函数在其定义域的不同范围内，要用两个或两个以上的数学式子来表示，这一类函

数称为**分段函数**.

注意：(1) 分段函数虽有几个式子，但它们合起来表示一个函数，而不是几个函数.

(2) 对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的解析式中去.

(3) 分段函数的定义域是各个段的自变量的取值范围的总和.

习题 1.1

一、选择题

1. 下列数学结构是函数的是(　　)(a,b,c 为互异实数).

A. $f(x)=\begin{cases}-x & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$；　　B. $y=\sqrt{\sin x-2}$；

C. 自变量 $x\in\{a,b,c\}$，$f:\begin{matrix}a\,b\,c\\ \downarrow\downarrow\downarrow\\ 1\,1\,1\end{matrix}$；　　D. $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{1-x}}$.

2. 函数 $y=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{x-2}}$的定义域为(　　).

A. $\{x\mid x>-2\}$；　　B. $\{x\mid x\geqslant 2\}$；

C. $\{x\mid x\geqslant -2\}$；　　D. $\{x\mid x>2\}$.

3. 函数 $y=\sqrt{x-1}+\ln(3-x)$的定义域为(　　).

A. $[1,+\infty)$；　B. $(-\infty,3)$；　C. $[1,3]$；　D. $[1,3)$.

4. 下列各组函数中是相同函数的是(　　).

A. $y=\dfrac{x}{x}$与 $y=1$；　　B. $y=2\ln|x|$与 $y=\ln x^2$；

C. $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2x}$；　　D. $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$.

5. 下列各组函数中是相同函数的是(　　).

A. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$；　　B. $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$；

C. $y=\ln x^6$ 与 $y=6\ln x$；　　D. $y=\ln x$ 与 $y=3\ln x$.

二、填空题

1. 设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，则 $f(x)=$________.

2. 开区间(a,b)用集合方法表示为________.

3. 设函数 $f(x+1)=x^2-2x$，则 $f(x)=$________.

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}10 & x<0\\ 100 & x=0\\ x^2+1 & x>0\end{cases}$，则$f(-3)=$________；$f(0)=$________；$f(10)=$________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x & -\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant 0\\ 1+x^2 & 0<x\leqslant 2\end{cases}$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$________.

6. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$与 $g(x)=x-1$ 在区间________上是相同函数.

三、解答题

1. 设$f(x)=\arccos(\ln x)$，求$f(e^{-1})$，$f(1)$，$f(e)$.

2. 设$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，求$\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

3. 设$f(x)=\sqrt{x-1}+e^x$，求：(1)函数的定义域；(2)$f(1)$，$f(2)$；(3)$f(x^2)$.

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ x+1 & x\geqslant 0\end{cases}$，作出$f(x)$的图形.

5. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过50kg时按基本运费计算，每千克收0.30元；当超过50kg时，超重部分按每千克0.45元收费，试求某地的行李费y(单位:元)与质量x(单位:kg)之间函数关系，并画出该函数的图形.

1.2 函数的几个特性

1.2.1 函数的单调性

设函数$f(x)$在区间I上有定义，若对区间I内任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$或$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在区间I上是单调增加的或单调减少的，区间I称为单调区间. 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

例1 因为函数$y=x^2$在区间$(-\infty,0]$内是单调减少的，在区间$[0,+\infty)$内是单调增加的，所以$(-\infty,0]$和$[0,+\infty)$是它的单调区间，但在区间$(-\infty,+\infty)$内函数不是单调的.

单调增加函数的图形：x与y同增同减；单调减少函数的图形：x与y增减相反，分别如图1-4和图1-5所示.

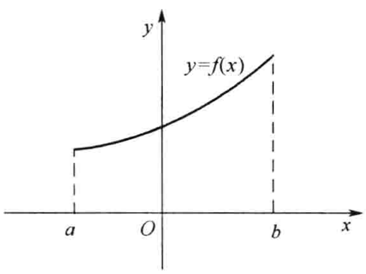

图1-4

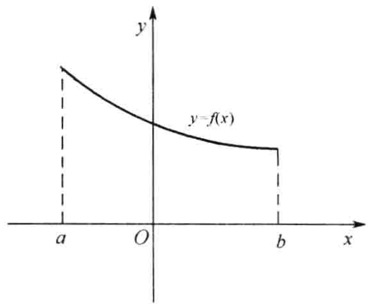

图1-5

1.2.2 函数的奇偶性

如果函数$y=f(x)$的定义域D是关于原点对称的区间，且对$\forall x\in D$有$f(-x)=-f(x)$，则称函数$y=f(x)$为区间D上的奇函数；若有$f(-x)=f(x)$，则称函数$y=f(x)$为区间D上的偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称，分别如图 1-6，图 1-7 所示.

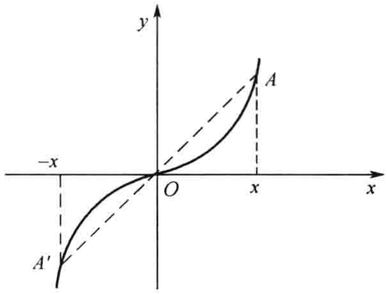

图 1-6

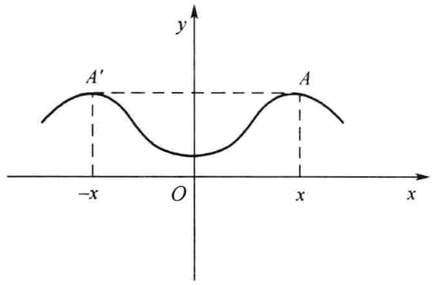

图 1-7

例 2 判断下列函数的奇偶性.

（1）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；（2）$f(x)=x+\cos x$；（3）$f(x)=x^2\mathrm{e}^{-|\sin x|}$.

解 （1）函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$$

故此函数是奇函数.

（2）因为$f(-x)=-x+\cos(-x)=-x+\cos x$，所以此函数为非奇非偶函数.

（3）因为$f(-x)=(-x)^2\mathrm{e}^{-|\sin(-x)|}=x^2\mathrm{e}^{-|\sin x|}=f(x)$，所以此函数为偶函数.

1.2.3 函数的周期性

若存在不为零的数 T，使得对于任意 $x\in I$，有 $x+T\in I$，且$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期. 周期函数主要针对三角函数.

例 3 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期为 2π；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的周期为 π；正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$和余弦型函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以函数 $y=\sin 2x$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$；而函数 $y=\tan\dfrac{1}{2}x$ 的周期为 $T=\dfrac{\pi}{1/2}=2\pi$.

周期函数的图形，每隔周期的整数倍重复出现.

1.2.4 函数的有界性

设函数$f(x)$的定义域为 D，如果存在一个正数 M，使得对 $\forall x\in D$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数在 D 内有界，否则称为无界.

例 4 函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$；函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 在定义域内无界；函数$f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界，但在区间$(0,1)$内有界；函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界，而在$[2,3]$内有界.

在所讨论的区间上，有界函数的图形，一定夹在平行于 x 轴的两条直线之间.

习题 1.2

一、判断题

1. 函数 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加. ( )
2. 函数 $y=x^2$，$x\in(0,+\infty)$ 是偶函数. ( )
3. 函数 $f(x)=3\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{3}$. ( )

二、选择题

1. 下列函数是奇函数的是( ).

A. $f(x)=x(x-x^3)$； B. $f(x)=2\sin x+x^3$；

C. $f(x)=\sin x+\cos x+2$； D. $f(x)=a^x+a^{-x}(a>1)$.

2. 下列函数是偶函数的是( ).

A. $f(x)=x(x-x^3)$； B. $f(x)=2\sin x+x^3$；

C. $f(x)=\sin x+\cos x+2$； D. $f(x)=a^x-a^{-x}(a>1)$.

3. 函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的图形对称于( ).

A. 直线 $y=x$； B. y 轴；

C. x 轴； D. 原点 $(0,0)$.

4. 下列函数中关于原点对称的是( ).

A. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$； B. $g(x)=x^3+\cos x$；

C. $h(x)=\frac{10^x+10^{-x}}{2}$； D. $t(x)=\frac{|x|}{x}$.

5. 函数 $y=x^2+3$ 在( )内是单调增加的.

A. $(0,+\infty)$； B. $(-\infty,0)$； C. $(-\infty,+\infty)$； D. $[a,b]$.

6. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间( )内有界.

A. $(0,+\infty)$； B. $[1,+\infty)$；

C. $(-\infty,0)$； D. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

7. 函数 $f(x)=\sin(x^3)$ 的图形( ).

A. 关于 x 轴对称； B. 关于 y 轴对称；

C. 关于原点对称； D. 以上都不对.

三、解答题

1. 奇函数和偶函数的图形具有怎样的对称特征？
2. 单调函数的图形具有怎样的特征？
3. 周期函数的图形具有怎样的特征？
4. 作出函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x^2-1 & x<0 \end{cases}$ 的图形并讨论其单调性.

1.3 反函数

定义 2 设给定函数 $y=f(x)$，若把 y 看做自变量，x 看做函数，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的直接反函数，函数 $y=f(x)$ 称为直接函数；将 x，y 互换便有 $y=\varphi(x)$ 称为 $y=f(x)$ 的矫形反函数，简称反函数，记作

$$y=f^{-1}(x)$$

函数与反函数定义域、值域及图形间存在以下关系：

（1）原函数的定义域和值域分别为反函数的值域和定义域.

（2）反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{e^x-1}$ 的反函数.

解 由原式变形得 $ye^x-y=1$，$e^x=\dfrac{y+1}{y}$；即 $x=\ln\dfrac{y+1}{y}$，互换 x 与 y，得 $y=\dfrac{1}{e^x-1}$ 的反函数为 $y=\ln\dfrac{x+1}{x}$.

例 2 求函数 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ 的反函数，并求反函数的定义域.

解 由 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ 可解得 $x=\ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$，交换 x，y 的位置，得所求函数的反函数为 $y=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$，其定义域为 $(0,1)$.

习题 1.3

一、选择题

1. 下列函数中互为反函数的是（　　）.

A. $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$；　　B. $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$；

C. $y=\tan x$ 与 $y=\cot x$；　　D. $y=3x$ 与 $y=\dfrac{x}{3}$.

2. 函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于（　　）对称.

A. 直线 $y=x$；　　B. y 轴 $x=0$；

C. x 轴 $y=0$；　　D. 原点 $(0,0)$.

3. 函数 $y=f(x)$ 的图形过点 (a,b)，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形必过点（　　）.

A. $(-a,b)$；　　B. $(-a,-b)$；

C. (b,a)；　　D. $(a,-b)$.

4. 函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数是（　　）.

A. $y=x^2+1$；　　B. $y=x^2+1\quad(x\leqslant0)$；

C. $y=x^2+1\quad(x\geqslant0)$；　　D. 不存在.

二、求下列函数的反函数

1. $y=x^3+2$　　2. $y=2^x+1$