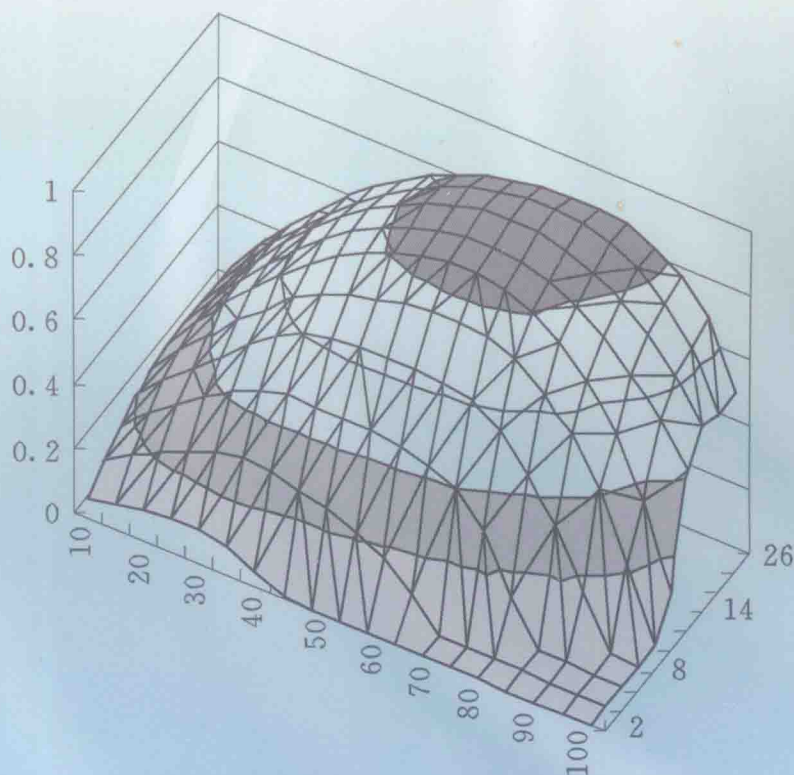


水力机械特征方程及应用

赵林明 等著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

水力机械特征方程及应用

赵林明 夏万禄 刘建红 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书给出了具有线性特性的水力机械特征方程。水力机械特征方程揭示了水力机械特性的内在规律,借助线性函数数据拟合方法,建立了水力机械内特性和外特性之间的联系,具有广泛的应用价值。

本书同时介绍了水力机械特征方程在水轮机内部水流流动分析、水轮机高效率区某些特性的扩展、水轮机过渡过程的计算、水轮机调节过程的分析和水泵性能分析等方面的应用情况。

本书可供从事水利水电工程、水电站动力设备运行管理和水力机械设计和试验的技术人员学习参考使用,也可以作为相关专业高校师生的参考学习教材。

图书在版编目(C I P)数据

水力机械特征方程及应用 / 赵林明, 夏万禄, 刘建红著. — 北京: 中国水利水电出版社, 2014. 9
ISBN 978-7-5170-2525-2

I. ①水… II. ①赵… ②夏… ③刘… III. ①水力机械—特征方程 IV. ①TV131.63

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第219025号

书 名	水力机械特征方程及应用
作 者	赵林明 夏万禄 刘建红 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (发行部)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 10.5印张 248千字
版 次	2014年9月第1版 2014年9月第1次印刷
印 数	0001—2000册
定 价	32.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究



前 言

早在 20 世纪 80 年代末，赵林明在研究水轮机流量调节方程的时候，经过推导，发现混流式水轮机在导水机构的某一开度下，其能量特性存在一个线性关系，当时应用这一线性关系，结合一些数值分析方法，可以求出水流在水轮机转轮进出口的平均流速，初步建立了水轮机内外特性之间的一些联系。1990 年，赵林明将所研究的成果，整理成论文《水轮机流量调节方程的应用研究》，并将论文发表在当年的《华北水利水电学院学报》上，论文中所介绍的内容，开创了水轮机方面研究的新领域。后来，刘小兵从流体力学的角度，考虑到水轮机和水泵两个方面，导出了水力机械的单位工作参数方程，也验证了赵林明所导出的水轮机线性特性的正确性。

在赵林明发表论文《水轮机流量调节方程的应用研究》以后 20 多年间，赵林明本人以及一些学者和工程技术人员相继在此基础上，对水轮机的线性特性进行了应用研究，并在水轮机内部的水流流动分析、水轮机能量特性的扩展、水轮机的过渡过程分析、水轮机的调节过程分析和水泵的设计分析中，取得了一定的研究成果。将这些研究成果加以整理，并将水力机械线性特性相应的公式定义为水力机械的特征方程，最终形成了本书的有关内容，以供广大相关工程技术人员参考，同时也推动水力机械特征方程的进一步应用。

本书第一章、第二章、第三章由夏万禄撰写，第四章、第五章、第六章由席江撰写，第七章由刘建红撰写，赵林明教授撰写了第八章，并对全书进行统稿。本书在编写过程中得到了王小红、王晓丹、张变梅、张国鹏、曹庆蛟等研究生的帮助，同时得到了河北工程大学水利水电工程重点学科和中国水利水电第十工程局有限公司机械安装分局的大力支持，书中参考了所列参考文献中的部分内容，在此一并表示感谢。

限于作者水平，书中的疏漏和不当之处，敬请读者批评指正。

作者

2014 年 5 月

目 录

前言

第一章 基础知识	1
第一节 水力机械	1
第二节 数学方法	5
第二章 水力机械的特征方程	21
第一节 水力机械特征方程的导出	21
第二节 水力机械特征方程的实验验证	23
第三章 特征方程在水轮机内部流动分析中的应用	29
第一节 水流在水轮机内部的流动及研究方法	29
第二节 基于特征方程的水轮机速度三角形的计算方法	30
第三节 水轮机内部水力损失的近似计算	40
第四章 特征方程在水轮机特性扩展中的应用	58
第一节 水轮机的全特性	58
第二节 基于特征方程的水轮机特性扩展方法	64
第五章 特征方程在水轮机过渡过程分析中的应用	68
第一节 水轮机的过渡过程	68
第二节 基于内特性法的水轮机过渡过程分析	75
第六章 特征方程在水轮机调节过程分析中的应用	87
第一节 水轮机的调节系统	87
第二节 基于特征方程的水轮机传递函数的计算方法	89
第七章 特征方程在水泵性能研究中的应用	97
第一节 水泵的特性	97
第二节 轴流泵特征方程的统计特性	99
第八章 展望	162
参考文献	163

第一章 基础知识

本书主要介绍研究水力机械一些特性的一种新的方法，因此，本章给出水力机械的一些基本概念，以及一些必要的数学方法。

第一节 水 力 机 械

水力机械是实现水流能量和固体机械能之间互相转换的一种使用范围极广的通用机械，一般包括水轮机、水泵和水泵水轮机。水轮机是把水流能量转换成旋转机械能的水力机械，而水泵是把旋转机械能转换成水流能量的水力机械，水泵水轮机一般用于抽水蓄能水电站，它既可作为水轮机运行，又可作为水泵运行。图 1-1 和图 1-2 分别给出了用 3D 技术生成的混流式水轮机和轴流转桨式水轮机的结构图。

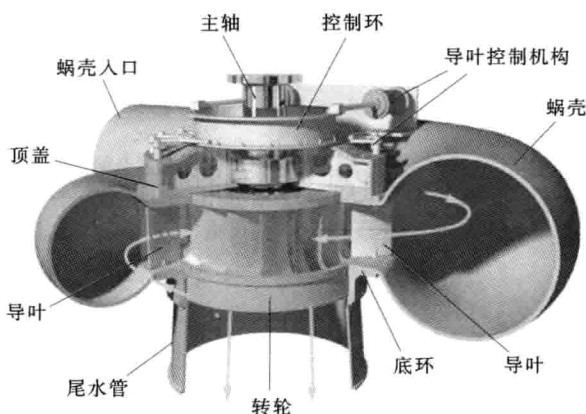


图 1-1 混流式水轮机

从利用水流能量角度看，水轮机只是近代的一种机械，在古代，人们也注意到了水中所蕴含的能量，并因此创造出水碓、水排和水磨等机械工具，将水流能量转化为机械能，用于农业和手工业生产。我国在西汉时期就已出现水碓，它除加工粮食外，还有捶纸浆、碎矿石等多种用途。水碓的传动方式是由水流冲动立式水轮，轮轴上的短横木拨动碓梢，促使碓头一起一落进行舂捣。水排是一种水力驱动的冶炼鼓风机，它由水轮带动连杆以推动鼓风。水排在东汉初年即已成形，比欧洲类似机械的出现要早 1000 多年。水磨在魏晋南北朝时期已见记载，水磨的水力传动部分有卧轮式和立轮式两种，通常由一只立轮或一只卧轮与若干齿轮相接，每只齿轮则对应一只石磨。流水推动立轮或卧轮转动，轮盘再将能量传递至齿轮，从而带动石磨转动。下面重点介绍一下水排。

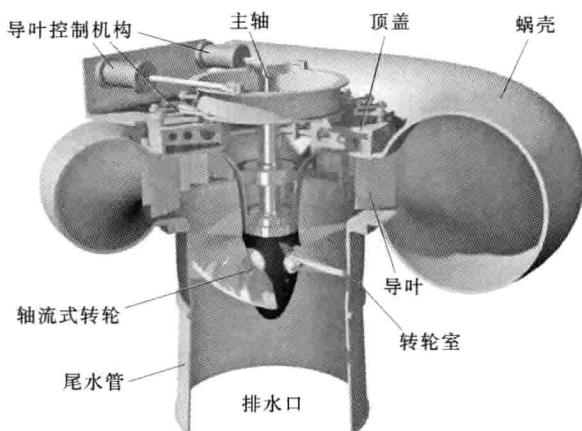


图 1-2 轴流转桨式水轮机

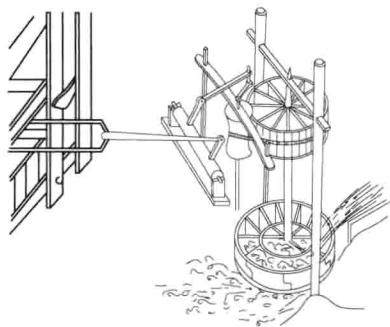


图 1-3 水排

如图 1-3 所示的水排，是我国古代一种冶铁用的水力鼓风装置，在公元 31 年由杜诗创制，其原动力为水流能量，通过曲柄连杆机构将回转运动转变为连杆的往复运动。人类早期的鼓风器大都是皮囊，我国古代又叫“橐”。一座炉子用好几个橐，放在一起，排成一排，就叫“排囊”或“排橐”。用水力推动这种排橐，就叫“水排”。关于水排的记载，最早见于《东观汉记》《后汉书》等文献。《后汉书·杜诗传》称：“（建武）七年，遇南阳太守，善于计略，省爱民役。造作水排，铸为农器，用力少，见功多，百姓便

之。”唐李贤注：“冶铁者为排以吹炭，今激水以鼓之也。”这是关于杜诗在东汉初年（公元 31 年）到南阳做太守时制造水排之事的记载。杜诗创制的水排，具体的结构当时缺乏记载，直到元朝王桢在他著的《王桢农书》中，才对水排作了详细的介绍。

根据王桢的介绍，水排的结构是：选择湍急的河流的岸边，架起木架，在木架上直立一个转轴，上、下两端各安装一个大型卧轮，在下卧轮（水轮）的轮轴四周装有叶板，承受水流，是把水流能量转变为机械转动的装置；在上卧轮的前面装一鼓形的小轮（旋鼓），与上卧轮用“弦索”相连（相当于现在的传送皮带）；在鼓形小轮的顶端安装一个曲柄，曲柄上再安装一个可以摆动的连杆，连杆的另一端与卧轴上的一个“攀耳”相连，卧轴上的另一个攀耳和盘扇间安装一根“直木”（相当于往复杆）。这样，当水流冲击下卧轮时，就带动上卧轮旋转。由于上卧轮和鼓形小轮之间有弦索相连，因此上卧轮旋转一周，可使鼓形小轮旋转几周，鼓形小轮的旋转又带动顶端的曲柄旋转，这就使得和它相连的连杆运动，连杆又通过攀耳和卧轴带动直木往复运动，使排扇一启一闭，进行鼓风。

杜诗创制的水排，不仅运用了主动轮、从动轮、曲柄、连杆等机构把圆周运动变为拉杆的直线往复运动；还运用了皮带传动，使直径比从动轮小的旋鼓快速旋转。它在结构上，已具有了动力机构、传动机构和工作机构三个主要部分，因此实际上可以看作是现代



水轮机的前身，水排的出现标志着中国复杂机器的诞生。远在 1400 多年以前，就能创制出这样完整的水力机械，确实显示了中国古人的高度智慧和创造才能，在世界科技史上占有重要的地位。在欧洲，使用水力鼓风设备的鼓风炉到 11 世纪才出现，而普遍使用却是 14 世纪的事了。水力鼓风有十分重要的意义，它加大了风量，提高了风压，增强了风力在炉里的穿透能力。这一方面可以提高冶炼强度，另一方面可以扩大炉缸，加高炉身，增大有效容积。这就大大地增加了生产能力。足够强大的鼓风能力，足够高大的炉子，是炼出生铁的必要条件。欧洲人能在 14 世纪炼出生铁来，和水力鼓风的应用是有一定关系的。水排的发明是人类利用自然力的一次伟大胜利。

从把机械能或是其它能量转换成水流能量来说，水泵也是一种近代的水力机械（见图 1-4），古人们也发明了一些把机械能或是其它能量转换成水流能量的装置，以把水提升到高处，例如在农业生产中，我国古人发明了桔槔、辘轳、翻车、筒车、戽斗、刮车等提水工具，以帮助农业灌溉，其中有些工具在今天的一些偏僻乡村仍然在使用。

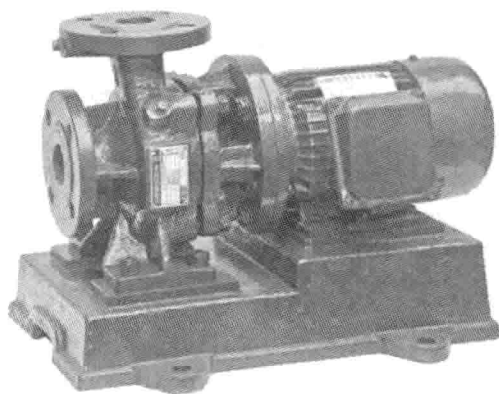


图 1-4 水泵（右侧是电动机）

桔槔是利用杠杆原理的人力提水机械，横杆的一端系提水桶，用手操纵横杆另一端的升降以取水。辘轳是利用轮轴原理的起重机具，多用于汲取井水。翻车是用木板做成长槽，槽中放置数十块与木槽宽度相称的刮水板（或木斗），刮水板之间由铰关依次连接，首尾衔接成环状。木槽上、下两端各有一带齿木轴，转动上轴，则带动刮水板循环运转，同时将板间的水体自下而上带出。戽斗是两边各系有两根绳的小桶，两人同时操作，可以提水至高处的田地。刮车则是一个转轮，轮直径约 5 尺^①，轮上辐条宽约 6 寸^①，用人力摇动转轮，将水提升到高处。

目前，国家非常重视清洁能源的开发，加大了水力资源的开发力度。在中国的西南地区，大批巨型水电工程开始建设，龙滩、小湾、糯扎渡、向家坝、溪洛渡、瀑布沟等水电站，其单机容量都在 500~700MW 之间。例如，澜沧江小湾水电站单机容量为 700MW，糯扎渡水电站单机容量为 650MW，溪洛渡水电站单机容量为 700MW，此外还有单机容量为 1000MW 的水电站，这些水电站中，都装有巨型水轮机。而对于水泵来说，一般安装在各类泵站中，目前我国仅用于防洪、农业灌溉和城市供排水的固定泵站即有 50 余万座，在用的各类泵数百万台，总装机容量超过 72000MW。南水北调东线工程从长江至山东东平湖输水主干线长约 617km，沿途设 13 个梯级，共 34 座泵站。其中一期工程总装机容量为 364590kW，总提水流量 4444.4m³/s。至于在钢铁、电力、石油、化工、矿山等工业部门运行的各类水泵，其数量几乎无法统计。因此，水力机械在我国当前国民经济中，发挥了重要的作用，而进一步从不同的角度对水力机械的各种特性进行研究，是有着

① 此处为古时度量。



重要意义的。

研究水力机械的特性,主要研究集中在水力机械的效率、稳定性和空化性能以及过渡过程等几个研究领域中,空化的研究最为困难,所得成果与实际需要之间的差距也最大。从水力机械的能量特性来说,在设计工况下,水轮机运行效率最高能达到 95% 以上,水泵也能达到 90% 以上,几乎已经达到极限,这表明有关水力机械能量特性的理论已经相当完备,设计计算方法已经比较成熟。稳定性对于大型水力机械具有特别重要的意义,特别是在大型水电机组中,对于稳定性的关注已经超过了对于效率的关注。这一方面是因为继续提高效率的空间已经很小,另一方面则是因为水力振动对于大型机组的危害大大高于中小型机组。因此,对于大型水力机械的稳定性研究成为当前水力发电领域内最活跃的研究方向。

目前对于大型水电机组稳定性的研究有三种主要的方法。其一是模型试验,在招标过程中,对于水力模型的水压脉动的相对幅值都有明确的限制指标,制造商主要依靠模型试验检验水轮机的水力稳定性。其二是数值分析,采用动态数值分析方法预测水轮机的水力稳定性,并根据计算结果进行诊断,提出改进方法。数值分析方法主要为专业研究机构 and 高等学校的研究者采用,目前这方面发表的论文数量相当多。第三种方法是对运行的机组进行在线监测,根据监测结果对机组进行故障诊断并作为状态检修的依据。这也是目前我国水电领域非常活跃的一个研究方向,同时也是一个非常活跃的市场。

相对于能量特性和稳定性而言,关于水力机械内空化现象的研究是比较薄弱的。为了避免空化现象的发生,水力机械产品出厂前都会进行空化试验(模型试验或真机试验)来测定其空化性能(空化系数 σ 或空化余量 $NPSH$),然后依据测得的数据并考虑一定的安全裕量来确定机器在现场的安装高程或采取其它措施。从逻辑上来说,这样建设的水电站或水泵站不应该发生空化,但实际运行中的水力机械受到严重空蚀破坏的情况还是时有发生。与之相反,在现场运行时总是能够保证效率值达到出厂前测定的数值。这样的对比充分说明了目前对空化现象的认识是非常不完备的,还不能对水力机械的空化性能进行准确的预测,甚至难以进行准确的测量。造成这个现象的原因,在于空化现象本身的复杂性以及测量的困难。虽然对于空化发生的机理、影响空化发展的因素以及空蚀破坏的基本规律进行了大量的研究,也取得了相当的进展,但这些研究成果基本是定性的分析或粗略的定量分析,在空化的准确的定量分析方面,近半个世纪以来都没有取得突破性的进展。

目前对于水力机械中空化现象的研究,有两个值得关注和期待的研究方向(或者说研究方法)。第一是对大型水力机械进行现场的空化监测。目前受测量技术的限制,通常是对空化所产生的噪声(包括可闻的声波和超声波)进行现场监测,并据此对空化的发生和发展程度作出预测。这样的研究一方面直接服务于机组的安全运行和状态检修;另一方面现场在线监测可积累大量的数据,对空化的研究是非常宝贵的第一手资料。第二是空化的数值模拟。空化的数值模拟近年来得到越来越多的关注,几种主要的商业 CFD 软件都增加了空化模型。空化的数值模拟目前还处于发展和探索阶段,还不像流场分析那样成熟和在工程中得到广泛应用,但这是一个极有希望的发展方向。相信最终可以像目前的流场分析一样,成为水力机械空化性能预测和优化设计的重要工具。

但是,应用各种复杂的数值计算方法,对水力机械性能进行研究,需要掌握较为深厚



的数值分析知识, 计算过程也比较复杂。对于需要大致了解水力机械的一些特性的情况下, 也需要研究一些别的分析水力机械各种特性的方法。

第二节 数 学 方 法

本书给出近似地分析水力机械的一些特性的简便方法, 这些方法涉及一些数学方法, 本书简要介绍这些方法。

一、数据拟合方法

(一) 数据拟合问题

在科学研究、工程技术问题和社会经济领域中, 常常需要研究变量与变量之间的相互关系, 由于种种原因, 在许多情况下, 变量之间的关系不能用准确的解析式描述, 而是通过试验、观测, 得到一些反映变量之间关系的数据。可以通过这些数据, 找出变量之间的内在关系, 同时, 通过这些数据和一定的算法, 求出一个解析式, 用以近似地描述变量之间的关系, 并供实际应用。

将通过数据和一定的算法求出近似地描述变量之间关系的解析式的方法, 称为数据拟合方法。在数据拟合方法中, 需要解决两个问题, 第一个问题是, 选择什么形式的解析式 (一般将相应的解析式称为拟合函数) 用于数据拟合; 第二个问题是, 如何确定拟合函数中的拟合系数。

【例 1-1】 经过试验, 得到反映变量 x 、 y 之间关系的数据, 见表 1-1。

表 1-1 反映变量 x 、 y 之间关系的数据

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.20	0.21	0.22
y	42.0	43.5	45.0	45.5	45.0	47.5	49.0	53.0	50.0	55.0	55.0	60.0

应用数据拟合方法, 可以建立近似反映变量 x 、 y 之间关系的解析式为

$$f(x) = 28.5340 + 130.6022x \quad (1-1)$$

这里, 将解析式 (1-1) 称为拟合表 1-1 中所列数据的拟合函数, 其中 28.5340 和 130.6022 称为拟合函数中拟合系数的值。

推广到一般, 设已知数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)$, 用函数 $f(x) = f(c_j, x)$ 对这些数据拟合, 称函数 $f(x) = f(c_j, x)$ 为拟合函数, 拟合函数中的系数 $c_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 称为拟合系数。

上面所述中的确定拟合函数, 就是如何针对数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)$, 选择拟合函数 $f(x) = f(c_j, x)$ 的具体形式; 而确定拟合系数, 就是确定拟合函数中系数 $c_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 的值。

(二) 线性函数数据拟合方法

1. 线性函数数据拟合问题

设已知数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)$, 如果可以用广义形式的函数



$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) \quad (1-2)$$

对这些数据拟合, 则称为线性函数数据拟合问题。

拟合函数式 (1-2) 中, $\phi_j(x)$ ($j = 0, 1, \cdots, n$) 称为拟合基函数, 且彼此线性无关。 c_j ($j = 0, 1, \cdots, n$) 为拟合系数。

【例 1-2】 在 [例 1-1] 中, 拟合函数式 (1-2) 中的拟合基函数分别是

$$\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x$$

拟合系数 $c_0 = 28.5340$, $c_1 = 130.6022$ 。由于拟合函数式 (1-2) 是一个线性式子, 可以采用较为简单的方法, 确定拟合系数 c_j ($j = 0, 1, \cdots, n$) 的值。

2. 最小二乘法确定拟合系数的计算原理

在选定拟合基函数 $\phi_j(x)$ ($j = 0, 1, \cdots, n$) 以后, 可以通过最小二乘法确定拟合系数 c_j ($j = 0, 1, \cdots, n$) 的值, 具体计算原理如下。

设用拟合函数式 (1-2) 对数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \cdots, m$) 进行拟合, 拟合值是 $f(x_i)$, 定义拟合误差为

$$\delta_i = y_i - f(x_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \quad (1-3)$$

确定拟合函数式 (1-2) 中的拟合系数 c_j ($j = 0, 1, \cdots, n$), 使拟合误差 δ_i 的平方和为最小, 即使

$$I = \sum_{i=1}^m \delta_i^2 = \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^m [y_i - c_0\phi_0(x) - c_1\phi_1(x) - \cdots - c_n\phi_n(x)]^2 \quad (1-4)$$

为最小。

由式 (1-4) 可以看出, 在选定拟合基函数 $\phi_j(x)$ ($j = 0, 1, \cdots, n$) 以后, 有

$$I = f(c_0, c_1, \cdots, c_n) \quad (1-5)$$

根据多元函数极值原理, 为使 I 最小, 应该有

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, n) \quad (1-6)$$

成立。

将式 (1-4) 代入式 (1-6) 中, 得出

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = -2 \sum_{i=1}^m [y_i - c_0\phi_0(x) - c_1\phi_1(x) - \cdots - c_n\phi_n(x)] \phi_j(x) = 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, n) \quad (1-7)$$

对式 (1-7) 进行整理, 得到求出拟合系数 c_j ($j = 0, 1, \cdots, n$) 的方程组为

$$A \times C = B \quad (1-8)$$

其中矩阵



$$A = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m \phi_0(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=1}^m \phi_0(x_i)\phi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^m \phi_0(x_i)\phi_n(x_i) \\ \sum_{i=1}^m \phi_1(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=1}^m \phi_1(x_i)\phi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^m \phi_1(x_i)\phi_n(x_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^m \phi_n(x_i)\phi_0(x_i) & \sum_{i=1}^m \phi_n(x_i)\phi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^m \phi_n(x_i)\phi_n(x_i) \end{vmatrix} \quad (1-9)$$

列向量

$$C = (c_0, c_1, \cdots, c_n)^T \quad (1-10)$$

以及

$$B = \left[\sum_{i=1}^m \phi_0(x_i)y_i, \sum_{i=1}^m \phi_1(x_i)y_i, \cdots, \sum_{i=1}^m \phi_n(x_i)y_i \right]^T \quad (1-11)$$

式 (1-8) 是一个线性代数方程组, 一般称为法方程。由于矩阵 A 是一个对称正定的矩阵, 因此法方程有唯一的解, 可以采用主元素高斯消去法解法方程。

3. 拟合过程

在已知数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \cdots, m)$ 以后, 选定拟合函数中的基函数 $\phi_j(x) (j = 0, 1, \cdots, n)$, 将数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \cdots, m)$ 代入式 (1-9) 和式 (1-11) 中, 求得矩阵 A 和列向量 B , 然后解法方程式 (1-8), 求出拟合系数 $c_j (j = 0, 1, \cdots, n)$, 这样就得到了拟合函数式 (1-2)。

求得拟合函数以后, 通过计算拟合误差式 (1-3), 来检验拟合精度, 一般不仅要计算拟合误差的最大值, 还要计算拟合误差的平均值, 以判断拟合函数的实际应用价值。

在一般情况下, 可以选用幂函数系列, 作为拟合函数式 (1-2) 中的拟合基函数, 即选取

$$\phi_j(x) = x^j (j = 0, 1, \cdots, n) \quad (1-12)$$

这样, 方程式 (1-8) 中的矩阵 A 和列向量 B 变为

$$A = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m 1 & \sum_{i=1}^m x_i & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^n \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{2n} \end{vmatrix} \quad (1-13)$$

$$B = \left[\sum_{i=1}^m y_i, \sum_{i=1}^m x_i y_i, \cdots, \sum_{i=1}^m x_i^n y_i \right]^T \quad (1-14)$$

4. 算例

经查 ZZ560—46 型水轮机的模型综合特性曲线, 得最优单位转速下, 水轮机空蚀系数与单位流量的关系数据, 如表 1-2 所示。



表 1-2 ZZ560—46 型水轮机最优单位转速下空蚀系数与单位流量的关系数据

序号 i	1	2	3	4	5	6
单位流量 Q_{11i}	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
空蚀系数 σ_i	0.300	0.321	0.374	0.446	0.531	0.630

用拟合函数

$$f(Q_{11}) = c_0 + c_1 Q_{11} + c_2 Q_{11}^2 \quad (1-15)$$

对表 1-2 中的数据 (Q_{11i}, σ_i) 进行拟合。取 Q_{11} 为 x , σ 为 y , 经计算, 法方程中由式(1-13)定义的矩阵 A 为

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 7.8 & 10.84 \\ 7.8 & 10.84 & 15.912 \\ 10.84 & 15.912 & 24.3760 \end{vmatrix} \quad (1-16)$$

由式(1-14)定义的列向量 B 为

$$B = (2.602, 3.6178, 5.32628)^T \quad (1-17)$$

将式(1-16)和式(1-17)代入法方程中, 解得拟合系数是 $c_0 = 0.36070$, $c_1 = -0.26525$, $c_2 = 0.23125$ 。最后得到拟合函数为

$$f(Q_{11}) = 0.36070 - 0.26525 Q_{11} + 0.23125 Q_{11}^2 \quad (1-18)$$

该拟合函数的拟合值以及拟合误差列在表 1-3 中。

表 1-3 ZZ560—46 型水轮机最优单位转速下空蚀系数拟合结果

序号 i	1	2	3	4	5	6
原空蚀系数值 σ_i	0.300	0.321	0.374	0.446	0.531	0.630
拟合值 $f(Q_{11i})$	0.297	0.327	0.375	0.443	0.528	0.633
拟合误差 δ_i	0.003	-0.006	-0.001	0.003	0.003	-0.003

从表 1-3 中数据可以看出, 用拟合函数式(1-18)反映表 1-2 中数据 (Q_{11i}, σ_i) 所表示的 ZZ560—46 型水轮机, 在最优单位转速下的空蚀系数与单位流量之间的关系是可行的。

线性函数数据拟合方法在工程实际中得到了广泛的应用, 在某些情况下, 线性函数数据拟合方法又是非线性函数数据拟合方法的基础。

(三) 非线性函数数据拟合方法

1. 非线性函数数据拟合问题

在线性函数数据拟合方法中, 采用线性函数式(1-2)作为拟合函数, 拟合数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)$, 但在许多情况下, 数据 (x_i, y_i) 所反映的变量 y 和 x 之间的关系是非线性的, 这时必须用非线性函数, 如

$$f(x) = c_0 + c_1 x^{c_2} \quad (1-19)$$

等, 作为拟合函数, 对相应数据进行拟合。选用非线性函数作为拟合函数的数据拟合问题, 称为非线性函数数据拟合问题。

由于非线性拟合函数中, 含有一些非线性拟合系数, 如式(1-19)中的 c_2 , 导致求



拟合系数的计算过程比较复杂。结合水轮机领域中的实际应用,本节只给出一些简单的非线性函数数据拟合方法,比较复杂的方法,可以参考有关专著。

2. 基于线性函数数据拟合方法的非线性函数数据拟合方法

这里以选用函数式(1-19)作为拟合函数为例,给出一种基于线性函数数据拟合方法的非线性函数数据拟合方法,一维优化拟合方法。

假设已经给出了 c_2 的值,并作变量变换

$$x^{c_2} \rightarrow t \quad (1-20)$$

则函数式(1-19)转化为线性函数

$$f(t) = c_0 + c_1 t \quad (1-21)$$

对给出的数据 (x_i, y_i) ,也采用式(1-20)的变换,转化为数据 (t_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, m$)。用线性函数式(1-21)对数据 (t_i, y_i) 进行拟合,根据前面给出的线性函数数据拟合方法,可以写出确定拟合系数 c_0 、 c_1 的法方程为

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m 1 & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m t_i y_i \end{vmatrix} \quad (1-22)$$

解方程式(1-22),可以方便地求出拟合系数 c_0 和 c_1 。

当拟合系数 c_0 、 c_1 和 c_2 确定以后,也就确定了拟合函数式(1-19),另外定义拟合的相对误差为

$$\bar{\delta} = \frac{f(x) - y}{y} \quad (1-23)$$

对于已知的 m 组数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, m$),平均相对误差为

$$\Delta = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\bar{\delta}_i| = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left| \frac{f(x_i) - y_i}{y_i} \right| \quad (1-24)$$

这样,就可以用式(1-24)定义的平均相对误差 Δ 来评价拟合函数式(1-19)的拟合精度。由式(1-23)和式(1-24)不难看出, Δ 越小,拟合精度越高。而从上述拟合过程也可以看出, Δ 依赖于 c_2 的值。不同的 c_2 值,有不同的 Δ 值相对应,因此,有关系式 $\Delta = f(c_2)$ 存在。可以取不同的 c_2 值进行拟合计算,然后从多个 c_2 所对应的拟合结果中,选取 Δ 最小者,作为最终的拟合结果。这样就把一个非线性数据拟合问题,转化为一个一维优化计算过程,因此,将上述方法称为一维优化拟合方法,下面给出一个例子。

【例1-3】 已知数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, 11$),并列在表1-4中,用拟合函数式(1-19)对这些数据进行拟合。

表 1-4

已 知 数 据

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
y_i	1.737	2.183	2.534	2.792	3.043	3.314	3.441	3.704	3.885	4.040	4.130

当取 $c_2 = 0.35$ 时,法方程式(1-22)为



$$\begin{vmatrix} 11 & 15.4988 \\ 15.5 & 22.9166 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34.8053 \\ 51.6148 \end{vmatrix} \quad (1-25)$$

解方程式 (1-25), 求得 $c_0 = -0.1978$, $c_1 = 2.3861$, 相应的平均相对误差 Δ 为 0.01181。

取不同的 c_2 值, 经过类似于取 $c_2 = 0.35$ 时的拟合计算, 求得各 c_2 下, 拟合值的平均相对误差 Δ 值, 并列在表 1-5 中。

表 1-5 一维优化拟合计算过程

c_2	-0.15	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	1.05
Δ	0.0534	0.0275	0.0192	0.0118	0.0073	0.0087	0.0148	0.0209	0.0411

比较表 1-5 中的 Δ 值, 发现当取 $c_2 = 0.45$ 时, 平均相对误差最小, 因此, 将 $c_2 = 0.45$ 作为优化计算的最优值, 相应的有 $c_0 = 0.4652$, $c_1 = 1.7205$, 最后得到拟合表 1-4 中数据的拟合函数是

$$f(x) = 0.4652 + 1.7205x^{0.45}$$

相应的拟合值以及相对拟合误差列在表 1-6 中, 表中数据表明, 拟合结果是比较理想的。

表 1-6 拟合结果及拟合误差分析

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	1.737	2.183	2.534	2.792	3.043	13.314	3.441	3.704	3.885	4.040	4.130
$f(x_i)$	1.725	2.186	2.530	2.815	3.064	3.286	3.488	3.676	3.850	4.015	4.170
相对误差 (%)	-0.69	0.14	-0.16	0.82	0.69	-0.84	1.37	-0.76	-0.90	-0.62	0.96

可以采用一些一维优化的方法, 如经典的 0.618 法, 近代的趋化算法等, 指导对非线性拟合系数的寻优过程, 下面给出趋化算法用于一维优化拟合的计算步骤。

趋化算法模拟了细菌的趋化性, 是一种启发性的智能算法, 针对上述非线性函数数据拟合问题, 下面给出具体的拟合计算步骤。

步骤 1: 取变量 $t=0$, 给出非线性拟合系数 c_2 的初值, 解法方程式 (1-22), 求出拟合系数 c_0 、 c_1 的值, 进而求出式 (1-24) 定义的 Δ 值, 并记为 Δ_0 。

步骤 2: 如果 $t < t_{\max}$, 产生一个随机增量 Δc_2 (Δc_2 是一个可正可负的小数), 执行步骤 3; 否则, 转向步骤 5。

步骤 3: 将 Δc_2 叠加到 c_2 上, 即取 $c_2 + \Delta c_2 \rightarrow c_2$, 同样解法方程式 (1-22), 求出拟合系数 c_0 、 c_1 的值, 进而求出式 (1-24) 定义的 Δ 值, 并记为 Δ_1 。

步骤 4: 如果 $\Delta_1 < \Delta_0$, 取 $\Delta_1 \rightarrow \Delta_0$, $t = t + 1$, 转向步骤 3 继续计算; 否则, 取 $t + 1 \rightarrow t$, 转向步骤 2。

步骤 5: 取最后保留的 Δ_0 相应的拟合系数 c_0 、 c_1 和 c_2 的值, 作为最终的拟合结果。

上述计算过程, 是一个启发计算的过程, 其中的参数 $t_{\max}$ 是一个比较大的数, 如 100 等, 在计算过程中, 如果连续产生 $t_{\max}$ 个 Δc_2 , 仍然不能满足 $\Delta_1 < \Delta_0$, 说明已经求得了最优的 c_2 值。



以上计算步骤相应的计算工作量比较大,应编制程序在计算机上完成计算过程。下面给出一个应用趋化算法,建立反映水轮机工作参数间关系的经验公式的算例。

从早期的水轮机型谱上,查取混流式模型水轮机在最优工况下的有关参数,列在表 1-7 中。

表 1-7 混流式模型水轮机在最优工况下的有关参数

序 号	1	2	3	4	5	6	7
机型	HL100	HL120	HL160	HL180	HL200	HL220	HL240
特征比转速 n_s	100	120	160	180	200	220	240
单位流量 Q_{11}	0.248	0.352	0.638	0.792	0.880	1.100	1.210
单位转速 n_{11}	61.5	62.5	67.5	67.0	68.0	70.0	72.0
空蚀系数 σ	0.022	0.053	0.059	0.078	0.085	0.129	0.195

选取形式为

$$f(\bar{n}_s) = c_0 + c_1 e^{c_2 \bar{n}_s}$$

的拟合函数,分别拟合表 1-7 中数据所反映的关系 $Q_{11} = f(n_s)$, $n_{11} = f(n_s)$ 和 $\sigma = f(n_s)$,其中,为了计算方便,取 $\bar{n}_s = n_s/100$ 。应用趋化算法,求出拟合系数 c_0 、 c_1 和 c_2 的值,列在表 1-8 中。

表 1-8 拟合系数值

拟合系数	c_0	c_1	c_2
拟合单位流量与比转速之间的关系 $Q_{11} = f(n_s)$	-2.036179	1.769073	0.255557
拟合单位转速与比转速之间的关系 $n_{11} = f(n_s)$	46.08044	11.12525	0.352453
拟合空蚀系数与比转速之间的关系 $\sigma = f(n_s)$	0.00407622	0.00541229	1.452

表 1-8 中所列拟合系数 c_0 、 c_1 、 c_2 对应的拟合曲线绘制在图 1-5、图 1-6 和图 1-7 中。

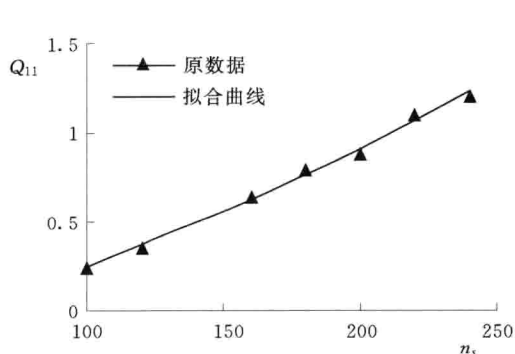


图 1-5 对 $Q_{11} = f(n_s)$ 的拟合曲线

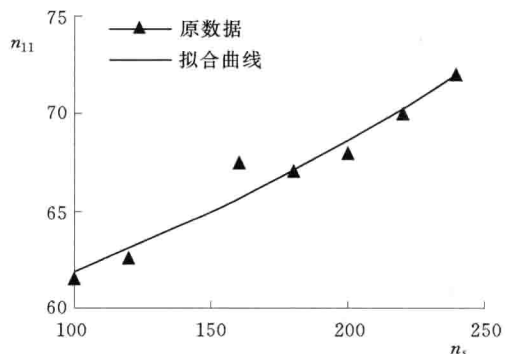
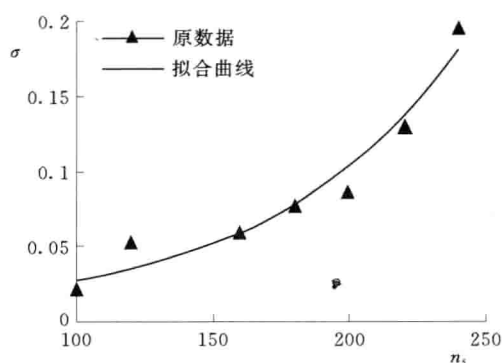


图 1-6 对 $n_{11} = f(n_s)$ 的拟合曲线

图 1-7 对 $\sigma=f(n_s)$ 的拟合曲线

当选用的非线性拟合函数比较简单的时候, 还可以通过适当的变换, 将非线性拟合问题转化为线性函数数据拟合过程, 下面仍然通过一个具体例子, 给出具体拟合计算过程。

【例 1-4】已知列在表 1-9 中测试数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 11)$, 用非线性拟合函数

$$f(x) = c_0 e^{c_1 x} \quad (1-26)$$

对这些数据进行拟合。

对式 (1-26) 两边取自然对数, 且设 $F(x) = \ln[f(x)]$, 则式 (1-26) 转化为线性函数

表 1-9

已知测试数据

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
y_i	2.21	2.72	3.41	4.21	5.29	6.73	8.26	10.52	13.17	16.46	20.47

$$F(x) = a + c_1 x \quad (1-27)$$

其中, $a = \ln(c_0)$ 。用同样的变换方式, 使数据 y_i 转换为新的数据 Y_i , 也就是取 $Y_i = \ln(y_i)$, 这样就将数据 (x_i, y_i) 转换为新的数据 $(x_i, Y_i) (i = 1, 2, \dots, 11)$ 。用线性拟合函数式 (1-27) 对数据 (x_i, Y_i) 进行拟合, 由于是线性拟合问题, 可以容易地求出确定拟合函数式 (1-27) 中拟合系数 a 、 c_1 的法方程是

$$\begin{vmatrix} 11 & 33 \\ 33 & 126.5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a \\ c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20.89223 \\ 75.00675 \end{vmatrix}$$

解法方程, 求得 $a = 0.5542$, $c_1 = 0.4484$ 。取 $a = \ln(c_0)$ 的逆变换, 有

$$c_0 = e^a = e^{0.5542} = 1.7405$$

最后得出拟合函数式 (1-26) 的具体形式是

$$f(x) = 1.7405 e^{0.4484x}$$

该拟合函数的拟合结果列在表 1-10 中, 拟合值的平均相对误差为 0.006868。

表 1-10

拟合结果比较

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	2.21	2.72	3.41	4.21	5.29	6.73	8.26	10.52	13.17	16.46	20.47
$f(x_i)$	2.18	2.73	3.41	4.27	5.34	6.68	8.36	10.46	13.09	16.38	20.50

通过 [例 1-4] 可以看出, 在将一些简单的非线性函数数据拟合问题转化为线性函数数据拟合问题的过程中, 首先要通过适当的数学变换, 将非线性拟合函数转化为线性拟合函数, 同时对被拟合的数据也要做同样的数学变换, 然后通过线性函数数据拟合方法, 求出拟合系数, 最后, 作必要的逆变换, 求出原非线性拟合函数。