普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

温永仙　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

温永仙　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

全书分为四部分，共11章. 第一部分为概率论基础，共5章，包括随机事件及其概率、一维随机变量与概率分布、多维随机变量与概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理. 第二部分为数理统计，共4章，主要阐述数理统计的基本概念参数估计、假设检验、单因素方差分析与一元线性回归等内容. 第三部分即第10章，是总复习小结和自我检测题. 第四部分即第11章，是对概率论与数理统计的发展史作简单的介绍. 前9章每章节的习题分为两部分，第一部分侧重于基本概念和基本定理的应用，第二部分侧重于概率与统计综合应用和部分数学考研试题.

本书可作为普通高等学校本科非数学专业的大学数学基础课教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 温永仙主编. —北京：科学出版社，2014
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-040708-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①温… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 106732 号

责任编辑：李淑丽 李梦华 / 责任校对：郑金华
责任印制：阎 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2014年8月第一次印刷 印张：21 1/2
字数：564 000

定价：42.80元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

本书是编者根据多年讲授概率论与数理统计课程所积累的经验,并参考了国内外许多同类优秀教材的基础上编写而成,可作为普通高等学校本科非数学专业学习概率统计的数学基础课教材.

由于概率论与数理统计课程是学生在大学里首次接触到以随机现象为研究对象的数学课程,其研究对象、研究方法、思维方式等都有别于其他数学课程.因此,本书尽量用通俗的说法去阐述概率论与数理统计深奥的概念与定理,增强学生对概率论与数理统计基本思想、基本方法的理解,达到突出概率统计思想方法,加强学生应用能力培养的目的.

全书分四大部分:第一部分为概率论基础,包括随机事件及其概率、一维随机变量与概率分布、多维随机变量与概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等5章内容;第二部分为数理统计,着重介绍统计的基本概念、估计和检验的基本思想和方法,单因素方差分析和一元线性回归分析的内容,共4章;第三部分即第10章,是总复习小结和自我检测题,读者在学习完前9章的内容基础上,对所学知识归纳总结,并自行检测概率统计基本理论和基本知识掌握程度;第四部分即第11章,在介绍概率论与数理统计的基本知识后,对概率论与数理统计的发展史进行阐述,使读者有一个初步的了解.

本书在例题和习题的选择上尽可能扩大范围,涉及多个专业,例如,农林、保险、医学、经济等,在习题中选取了一些历届硕士研究生入学考试的试题.各章末附有习题,习题分为两部分,第一部分基于基本概念和基本定理的应用,第二部分侧重于概率与统计综合应用和部分数学考研试题.书末附有习题参考答案,便于读者学习.

本书基本内容前10章可在60学时内全部授完.第11章可作为选读内容.本书基本上只用到微积分的知识,凡具备高等数学知识的读者都可以使用本书作为学习概率论与数理统计课程的教材或参考书.

本书在编写的过程中,得到同事们的大力支持,在此表示衷心感谢!

由于编者的水平所限,虽经多次修改,书中仍难免存在疏漏和不足,恳请读者批评指正.

编　者

2014年2月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

在自然界及人类的社会生活中，事物都是相互联系和不断发展的. 在彼此联系和发展过程中，根据它们是否存在必然的因果联系，可以分为两类不同的现象：**确定性现象**和**不确定性现象**. 确定性现象是指在一定条件下，必定会导致某种确定的结果，也可定义为在相同的条件下，每次试验得到的结果是完全相同的现象. 比如，在标准大气压下，水加热到 100℃必会沸腾；同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引；在十进制下，有 $1+1=2$ 成立，这种联系是一种必然性的. 通常我们所学的高等数学、线性代数等数学课程都是专门研究这种确定性现象. 不确定性现象是在一定条件下，它的结果是不确定的. 不确定性现象又大致可分为：随机现象、模糊、灰色、粗糙. 其中**随机现象**是指在一定的条件下，就一次试验而言，某种结果可能发生，也可能不发生. 随机现象在现实生活中是大量存在的. 例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能国徽一面朝上，也可能数字一面朝上，在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么；用同一支手枪射击同一目标，各次射击的弹着点不尽相同，在射击之前无法预测弹着点的确切位置；检验产品质量，任意抽取的某一产品有可能是正品，也可能是次品；桥牌选手在拿到牌之前并不知道他将拿到一手怎样的牌等都是随机现象. 随机现象的不确定性主要体现在相同的条件下，多次进行同一试验，所得结果是不完全一样，而且无法准确地预测下一次所得结果. 从表面上看，随机现象似乎是杂乱无章的、没有什么规律. 但是，如果同类的试验大量重复多次，其随机现象的出现就呈现出一定的规律性. 随机现象所呈现的这种规律性，随着我们观察次数的增多而越加明显. 比如，掷一枚均匀硬币，每一次投掷很难判断是哪一面朝上，但是如果多次重复地掷这枚硬币，就会越来越清楚地发现它们两面朝上的次数大体相同. 这种在大量重复试验中所呈现的随机现象固有规律性，称为**随机现象的统计规律性**. 概率论是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科. 数理统计则以概率论为基础，研究如何依据大量次数的随机试验中所得到的数据，推断事物本质特征的各种方法. 概率统计的理论与方法在应用上十分广泛，它几乎遍及所有科学技术领域、国民经济和工农业生产的各个部门之中.

1.1　随机事件及运算

1.1.1　随机试验

研究随机现象，首先要对研究对象进行大量的观察、试验，这里的试验是一个广义的术语，它包括各种各样的试验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 如果一个试验满足以下三个特点，则称之为随机试验.

(1)可重复性：可以在相同条件下重复进行；

(2)多样性和明确性：每次试验的可能结果不止一个，并且可以预知试验的所有可能

结果；

(3)不确定性：进行一次试验前不能确定将会出现何种结果.

以后简称随机试验为**试验**，采用字母 E 来表示. 下面举几个随机试验的例子.

例 1 试验 E_1：掷一枚硬币，观察落在桌面上究竟是正面朝上还是反面朝上的情况(不妨约定国徽面为正面).

例 2 试验 E_2：记录某电话传呼台在单位时间内收到的呼叫数.

例 3 试验 E_3：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的使用寿命.

例 4 试验 E_4：掷两枚不同的硬币，记录它们正反面朝上的情况.

例 5 试验 E_5：将一米长的绳子任意截成三段，记录各段的长度.

1.1.2 样本空间及随机事件

随机试验的一个特点是试验结果不止一个，且可以预知所有可能结果. 我们把随机试验中每一种可能出现的、最简单的、不能再分的结果称为随机试验的**样本点**，用 ω 表示；而由全体样本点构成的集合称为**样本空间**，记为 Ω.

用集合表示法，例 1 的样本空间可写成 $\Omega_1=\{\mathrm{H},\mathrm{T}\}$，“H”代表的是正面朝上，“T”代表的是反面朝上，则 $\omega=\mathrm{H}$ 代表的是硬币正面朝上，$\omega=\mathrm{T}$ 代表的是硬币反面朝上. 在例 2 中 $\Omega_2=\{0,1,2,\cdots\}$，这里 0,1,2,…分别代表电话传呼台在单位时间内收到的呼叫数是 0 次，1 次，2 次等. 在例 3 中设这批灯泡最长使用寿命为 T，则 $\Omega_3=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant T\}$，这里的 x 指灯泡使用寿命. 在例 4 中 $\Omega_4=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H}),(\mathrm{T},\mathrm{T})\}$，$\omega=(\mathrm{H},\mathrm{T})$ 代表的是第一枚硬币正面朝上且第二枚硬币反面朝上的样本点，其余类似. 在例 5 中 $\Omega_5=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1>0,x_2>0,x_3>0$ 且 $x_1+x_2+x_3=1\}$，如 $\omega=(0.1,0.7,0.2)$ 代表的是三段长度分别为 0.1,0.7,0.2 的样本点.

样本空间根据样本点的个数不同，可以分为有限集或无限集，如 Ω_1 是有限集和 Ω_2 是无限集；也可以分为某个区域或离散点集，如 Ω_3 是某个区域和 Ω_4 是离散点集；还可以分为一维点集或多维点集，如 Ω_3 是一维点集和 Ω_5 是多维点集. 样本空间的这样划分，对后面学习随机变量知识是有利的.

在实际问题中，我们常常关心的不是某一个试验结果，而更注重的是满足某些条件的样本点所组成的样本空间子集. 比如，玩骰子游戏，规定大点是 4,5,6 点，小点是 1,2,3 点，那么对玩家来讲更关心的是什么时候出现大点或小点，而不是某个具体的点数. 我们把这些满足某些条件的样本点所构成的集合称为**随机事件**，简称**事件**，用英文大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示. 如果在一次试验当中，出现的结果 $\omega\in A$，则称随机事件 A **发生**，否则称它**不发生**.

通过引入集合概念，我们把随机事件当作样本空间的子集. 凡是样本空间的子集都称为随机事件. 样本空间 Ω 也是它本身的子集，称为**必然事件**，记号为 Ω. 在一次试验当中，不管出现什么结果，它必属于样本空间 Ω，所以必然事件必定会发生. 空集是任何集合的子集，它不包含样本空间的任何样本点，它必然不会发生，称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$. 必然事件和不可能事件事实上都是确定性的，但在这里我们把它当作随机事件的特殊情况. 另外，称只有一个样本点所组成的集合为**基本事件**，记号为 $\{\omega\}$，相应由若干个基本事件组合而成的事件称为**复合事件**.

例 6　抛掷一枚骰子，观察其点数的情况. 设 A 表示出现偶数点的事件，即 $A=\{$出现的点数是 2,4,6$\}$为一个随机事件；设 $B=\{$出现的点数是6$\}$，它为一个基本事件；设 $C=\{$出现的点数不超过 6$\}$，任何一次试验其结果都不超过 6，所以 C 为一个必然事件，即 $C=\Omega$；设 $D=\{$出现的点数是 8$\}$，显然它是不会发生的，它为一个不可能事件，即 $D=\varnothing$.

1.1.3　事件的关系与运算

在集合论中，集合之间有一定的关系和运算. 随机事件是一个集合，所以讨论事件之间的关系及其运算是有必要的.

1. 事件的包含和相等关系

定义 1　设试验 E 中有两个事件 A 与 B，事件 A 中每个样本点都属于事件 B，则称事件 B 包含事件 A 或事件 A 包含于事件 B，记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$). 其含义是若 A 发生必然导致 B 发生. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记号为 $A=B$. 事件的包含关系可用韦恩图表示，见图 1-1(a).

例 7　掷一枚骰子试验，$A=\{$出现的点数是 5$\}$，$B=\{$出现的点数是奇数$\}$，$C=\{$出现的点数是 1,3,5$\}$，则 A 发生必然导致 B 发生，$A\subset B$，另外 $B=C$.

性质 1　(1)若 $A\subset B$，则可以等价地说 B 不发生必然导致 A 不发生；

(2)对于任一个事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$；

(3)传递性：$A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

2. 和事件

定义 2　设试验 E 中有两个事件 A 与 B，称由 A 与 B 中一切样本点共同组成的集合为 A 与 B 的**和事件**. 其含义是事件 A 与 B 至少有一个发生，记为 $A\cup B$. 加以推广，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，它表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和事件记为$\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$，它表示的是可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$中至少有一个事件发生. 用韦恩图表示和事件，见图 1-1(b).

例 8　测试灯泡寿命的试验中，令 $A=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 500\}$(灯泡寿命不超过 500 小时)，$B=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 1000\}$(灯泡寿命不超过 1000 小时)，则 $A\cup B=B=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 1000\}$(灯泡寿命不超过 1000 小时).

3. 积事件

定义 3　设试验 E 中有两个事件 A 与 B，称既属于 A 又属于 B 的样本点所构成的集合为 A 与 B 的**积事件**. 其含义是事件 A 与事件 B 同时发生，记为 $A\cap B$ 或 AB. 加以推广，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$，它表示 n 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的积事件记为$\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$，它表示的是可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$同时发生. 用韦恩图表示积事件，见图 1-1(c).

例 9　在抛掷骰子的试验中，记事件 $A=\{$出现的点数是 2,4,6$\}$，事件 $B=\{$出现的点数是 3,4,5$\}$，则 $AB=\{$出现的点数是 4$\}$，即只有掷骰子出现 4 点时，A 与 B 同时发生.

4. 互斥事件(互不相容事件)

定义 4　设试验 E 中有两个事件 A 与 B,若 A 与 B 没有公共的样本点,则称 A 与 B 为**互斥事件或互不容事件**.其含义是事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$.加以推广,若 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\varnothing$,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **总起来是互不相容**;若 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,3,\cdots,n)$,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **两两互不相容**.两两互不相容则一定总起来是互不相容的,反之不真.用韦恩图表示互斥事件,见图 1-1(d).特别地,当 A 与 B 互斥时,即 $AB=\varnothing$,$A\cup B$ 可记为 $A+B$.若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 可记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

例 10　设试验 E,样本空间为 Ω,基本事件 $\{\omega_i\}$ 与基本事件 $\{\omega_j\}(i\neq j)$ 是互不相容的事件.

5. 互逆事件(对立事件)

定义 5　设试验 E 中有两个事件 A 与 B,若 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称 A 与 B 为**互逆事件**,或称对立事件.其含义是事件 A 与事件 B 不能同时发生且事件 A 与事件 B 至少有一个发生.这时,我们称 B 为 A 的**逆事件**,记号为 $\overline{A}$,同样 A 也为 B 的逆事件,记号为 $\overline{B}$.用韦恩图表示互逆事件,见图 1-1(e).

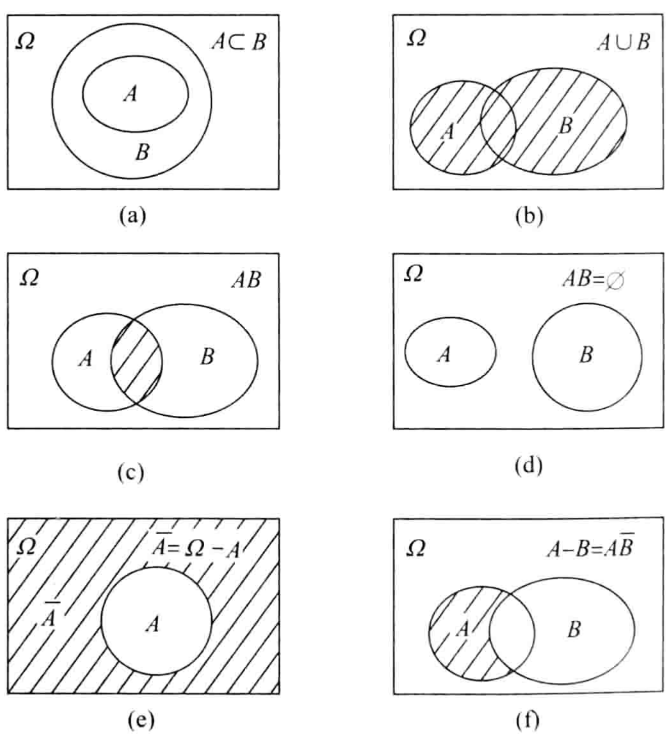

图 1-1

若 A 是任意事件,则有以下式子成立:

$$A\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=\Omega,\quad \overline{\overline{A}}=A.$$

例 11　掷一颗骰子,令 $A=\{$出现奇数点$\}$,$B=\{$出现偶数点$\}$,则 $AB=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$,所以 $B=\overline{A}$,即 B 与 A 是互逆事件.

6. 差事件

定义 6　设试验 E 中有两个事件 A 与 B,称属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合为

A 与 B 之差. 其含义是事件 A 发生但事件 B 不发生，记号为 $A-B$. 不难发现 $A-B=A-AB=A\overline{B}$，$\overline{A}=\Omega-A$. 用韦恩图表示差事件，见图 1-1(f).

例 12　设 A 表示张三是亚洲人，B 表示张三是日本人，则 $A-B$ 表示张三是亚洲人但不是日本人.

和集合运算一致，事件之间的运算有以下几个性质：

(1)幂等律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

(2)交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(3)结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(4)分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(5)德 · 摩根(De Morgan)定律　$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$，加以推广有 $\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A}_i$，$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A}_i$.

例 13　设 A,B,C 是样本空间 Ω 中的三个随机事件，试用 A,B,C 的运算表达式表示下列随机事件.

(1)事件 A 与 B 发生但 C 不发生；

(2)事件 A,B,C 中至少有一个发生；

(3)事件 A,B,C 中至少有两个发生；

(4)事件 A,B,C 中恰好有两个发生；

(5)事件 A,B,C 中至多有一个事件发生.

解　(1)$AB\overline{C}$；(2)$A\cup B\cup C$；(3)$AB\cup BC\cup AC$；(4)$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(5)$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

例 14　一工人生产了 n 个零件，设 $A_i=\{$第 i 个零件是正品$\}(i=1,2,\cdots,n)$. 试用文字叙述下列事件：(1)$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$；(2)$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

解　(1)$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 表示 n 个零件全是正品；

(2)$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$ 表示至少有一个零件不是正品.

1.2　事件的频率与概率

随机试验中有若干个随机事件，在一次试验中它们有可能发生，也有可能不发生，在试验前是无法预知的，但是它们发生的可能性大小却是存在，而且是客观的量. 例如，抛掷一枚不均匀的硬币，显然必有一面朝上的可能性超过另外一面；多次重复抛掷一枚均匀骰子，出现奇数点的可能性与出现偶数点的可能性相当；购买体育彩票获得特等奖的可能性远远低于没有中奖的可能性. 那么如何定量描述这种可能性大小呢？

我们先用概率这个名词来表示随机事件发生可能性大小，即这种标志着随机事件发生可能性大小的数量指标就称为随机事件发生的**几率或概率**. 随机事件 A 的概率记为 $P(A)$. 那么如何定义概率以及如何计算概率呢？在概率论的发展过程中，主要有两种定义方式. 一

种是概率的统计定义，另外一种是概率的公理化定义.

1. 概率的统计定义

设 E 为一随机试验，A 是一随机事件，在相同条件下重复进行 n 次试验，若事件 A 发生了 k 次，则称 k 为事件 A 发生的**频数**，称 $\frac{k}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)=\frac{k}{n}$. 可以证明，频率具有以下三个性质：

(1)**非负性** $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2)**规范性** $f_n(\Omega)=1$；

(3)**频率的有限可加性** 若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 m 个两两互不相容的随机事件，则 $f_n\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i)$.

频率的大小反映了一个随机事件发生的频繁程度. 如果频率越大直观感觉事件发生的可能性越大. 例如，一个人买体育彩票获得特等奖频率远远低于没有中奖的频率，所以有理由相信获得特等奖的可能性远远低于没有中奖的可能性. 但是，不同的试验所得到事件的频率有可能不同，如重复抛掷一枚均匀硬币十次，发生正面九次，频率为 0.9；在相同条件下另外进行十次试验有可能出现正面 1 次，频率为 0.1. 频率出现了波动，显然用 0.9 或 0.1 来表示出现正面的可能性大小是行不通的.

在 1.1 节，我们已经提过随机现象从表面上看似乎是杂乱无章的、没有什么规律. 但是，如果相同的随机现象大量重复出现，它的总体就会呈现出一定的规律性. 大量相同随机现象所呈现的这种规律性，随着我们观察次数的增多而越加明显. 历史上不少的科学试验验证了这种规律性的存在. 例如，历史上几位著名学者所进行的抛掷一枚均匀硬币试验，结果见表 1-1.

表 1-1 抛硬币试验

试验者	抛掷次数 n	出现正面次数 k	频率 $\frac{k}{n}$
De Morgan	2048	1061	0.5181
De Morgan	2048	1048	0.5117
De Morgan	2048	1017	0.4966
De Morgan	2048	1039	0.5073
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005
Winnie	30000	14994	0.4998

从表 1-1 中不难看出，随着试验次数的增加，频率越来越稳定，越来越靠近 0.5，在这个常数附近摆动. 类似于这种随着试验次数的增加，频率会逐渐稳定在一个常数的附近，呈现出稳定性，我们称之为**随机事件的统计规律性**. 事件的频率稳定性是客观存在的，它已经得到人们证实.

定义 1 在相同条件下大量重复试验 n 次，随机事件 A 出现了 k 次，随机事件 A 发生的

频率 $f_n(A)=\dfrac{k}{n}$ 稳定在某个常数 p 的附近，我们称这个稳定值 p 为随机事件 A 的**概率**，记为 $P(A)=p$.

上述用频率的稳定值来定义事件的概率，称为概率的统计定义.

2. 概率的公理化定义

数学是一门严谨的科学，它是不允许有模糊不清的概念存在. 概率的统计定义是从经验中给出的，不能作为概率的数学定义，它主要存在以下两个方面的问题：首先，在统计定义中要求进行大量重复试验，这个“大量重复试验”没有明确的界定，是十分含糊的；其次，没有给出精确确定频率稳定值的方法，它是主观给出的，这就存在一定问题，如在抛掷一枚均匀硬币试验中，数值 0.5 还是 0.51 或其他值为频率稳定值呢？故给出严格的概率定义，就显得很有必要了. 1933 年苏联数学家科尔莫戈罗夫（Колмогоров）基于测度论知识给出了概率的公理化定义.

定义 2　设 E 是随机试验，Ω 是试验 E 的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，如果满足下列三个公理化条件，则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的**概率**：

(1)**非负性**　任意事件 $A\subset\Omega$，$P(A)\geqslant 0$；

(2)**规范性**　$P(\Omega)=1$；

(3)**可列可加性**　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两互不相容的可列个事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i).$$

由概率的公理化定义可知，每一个随机事件 A 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，因此事件 A 的概率是一个客观的确定值，这个值对随机事件发生可能性的大小作定量化的度量.

3. 概率的基本性质

由概率的三条公理化条件，可以推出概率的一些基本性质.

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

证明　令 $\phi_i=\varnothing(i=1,2,\cdots)$，$\phi_i\cap\phi_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$ 且 $\bigcup_{i=1}^{+\infty}\phi_i=\varnothing$，由可列可加性可得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}\phi_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(\phi_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(\varnothing),$$

而 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故必有 $P(\varnothing)=0$.

由概率的性质知，必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，现提出一个问题，概率为 1 的随机事件是必然事件吗？概率为 0 的随机事件是不可能事件吗？请读者思考，该问题会在 2.3 节给予回答.

性质 2(有限可加性)　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

证明　令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，结合性质 1 可得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{+\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 3　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明　因为 $A\cup\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing$,结合规范性和性质 2 可得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

结论得证.

性质 4　(1)正常差:$A\supset B, P(A-B)=P(A)-P(B)$;

(2)减法公式: $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

证明　(1)因为 $A=B\cup(A-B)$,且 $B\cap(A-B)=\varnothing$,根据有限可加性可得 $P(A)=P(B)+P(A-B)$,故有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$;

(2)因为 $A=AB\cup A\overline{B}$,且 $AB\cap A\overline{B}=\varnothing$,与(1)同理可得结论 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$ 成立.

性质 5(单调性)　$A\supset B$,有 $P(A)\geqslant P(B)$.

证明　由正常差可得 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,因为概率具有非负性,所以 $P(A)\geqslant P(B)$成立.

性质 6(有界性)　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

证明　因为$\varnothing\subset A\subset\Omega$,根据单调性可得 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$ 成立.

性质 7(加法公式)　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明　$A\cup B=A\cup(B-AB)$,且 $A\cap(B-AB)=\varnothing, AB\subset B$,由有限可加性和正常差的性质可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

概率的加法公式可以推广到多个事件,例如,读者可以很容易地证明

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)\\-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,可用数学归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots\\+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

性质 8(半可加性)　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件的事件组,则有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

证明　利用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时,由加法公式可得 $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\leqslant P(A_1)+P(A_2)$,结论成立.

假设当 $n=k$ 时,有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}P(A_i)$ 成立.

那么 $n=k+1$ 时,$P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k+1}A_i\right)=P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i\right)+P(A_{k+1})-P\left[\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i\right)\cap A_{k+1}\right]\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k+1}P(A_i)$,也有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k+1}A_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k+1}P(A_i)$ 成立,所以结论成立.

例 1　设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解　由 $ABC\subset AB$，且已知 $P(AB)=0$，得 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，故 $P(ABC)=0$.

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\dfrac{5}{8}$.

例 2　设 A,B 是两事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$. 问：(1)在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？(2)在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值，最小值是多少？

解　由加法公式，得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=1.3-P(A\cup B).$$

(1)因 $A\cup B\supset B$，故若 $P(A\cup B)=P(B)=0.7$，则 $P(AB)$ 取到最大值，最大值为 0.6.

(2)因 $A\cup B\subset \Omega$，故若 $P(A\cup B)=P(\Omega)=1$，则 $P(AB)$ 取到最小值，最小值为 0.3.

1.3　古典概型与几何概型

1.3.1　古典概型

从本节开始，我们将研究各种类型的随机现象. 首先讨论一类最简单也是早期所研究的随机现象，这类随机现象具有下列两个特征：

(1)试验的样本空间 Ω 中只含有有限多个基本事件，称为**有限性**；

(2)在每次试验中，每个基本事件出现的可能性相同，称为**等可能性**.

这类随机现象在概率论发展初期即被注意，一般称这类随机现象的数学模型为**古典概率模型**，简称古典概型.

定理 1　若随机试验为古典概型，且已知样本空间 Ω 中含有 n 个基本事件，随机事件 A 中含有 m 个基本事件，则随机事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中所包含的基本事件总数}}=\frac{m}{n}. \tag{1-3-1}$$

证明　设 E 为一古典概型，其基本事件共有 n 个，分别是 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，即样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，根据等可能性假设可知 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$. 由于各 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 两两互不相容，于是有

$$1=P(\Omega)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\omega_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(\omega_i)=nP(\omega_i),$$

即得

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

若 A 是 E 的事件，不妨记 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$，则

$$P(A)=\sum_{k=1}^{m}P(\omega_{i_k})=\frac{m}{n}.$$

易知，由式(1-3-1)所确定的事件概率满足概率的三条公理化条件，即非负性、规范性和可列可加性，故 1.2 节中的概率基本性质对于式(1-3-1)所确定的事件概率也都满足.

例 1 抛掷一枚均匀骰子一次,设 A 表示"出现点数小于 4",求 $P(A)$.

解 设抛掷一枚均匀骰子的试验 E 的所有基本事件 ω_i 为"出现点数为 i"($i=1,2,3,4,5,6$),则基本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$ 中所包含的基本事件总数 $n=6$,且每个基本事件发生的可能性相同,因此该试验为古典概型.

又因为事件 $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ 所包含的基本事件个数 $m=3$,按公式(1-3-1)便得 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

例 2(德·梅尔(de Méré)问题) 一枚骰子投 4 次至少得到一个六点与两枚骰子投 24 次至少得到一个双六点,这两件事中哪一件发生的可能性更大?

解 设 $A=\{$一枚骰子投 4 次至少得到一个六点$\}$. 为了求 A 发生的概率,可以先转为求 A 的逆事件 $\overline{A}$ 发生的概率,其事件的含义是投一枚骰子 4 次没有出现六点. 不难得出 $P(\overline{A})=\frac{5^4}{6^4}$,所以 $P(A)=1-\frac{5^4}{6^4}=0.5177$.

设 $B=\{$两枚骰子投 24 次至少得到一个双六点$\}$,用同样的方法可以求出 $P(B)=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0.4914$. 因而前者发生的概率大于后者发生的概率.

古典概型有许多方面的应用,如产品抽样检查、水稻地块的调查、某种疾病的抽查等都能用这个模型,这些问题大多数都能形象化地用摸球模型来描述,以后我们直接研究摸球模型.

从形式上看,古典概型的事件概率计算公式较简单,但实际问题中,古典概型中许多概率的计算是相当困难而富有技巧,计算的主要问题是如何计算样本空间和事件所包含样本点的个数,这些计算经常要用到一些排列与组合的数学工具.

例 3(箱中抽球) 一个箱中装有 6 只球,其中 4 只白球,2 只黑球. 现从箱中抽球两次,每次随机地取一只,考虑两种抽球方式:(1)第一次抽一只球,观察其颜色后放回箱中,搅匀后再抽一球,这种抽球方式称为**放回抽样**;(2)第一次抽一球不放回箱中,第二次从剩余的球中再抽一球,这种抽球方式称为**不放回抽样**. 试分别就上面两种情况求:(1)抽到的两只球都是白球的概率;(2)抽到的两只球颜色相同的概率;(3)抽到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解 以 A,B,C 分别表示事件"抽到的两球都是白球""抽到的两球都是黑球""抽到的两只球中至少有一只是白球". 易知"抽到的两只球颜色相同"这一事件即为 $A\cup B$,而 $C=\overline{B}$.

(a)放回抽样的情况.

第一次从袋中抽球有 6 只球可供抽取,第二次从袋中抽球也有 6 只球可供抽取,由组合法的乘法原理,共有 6×6 种抽法,即样本空间中元素总数为 6×6. 对事件 A 而言,由于第一次有 4 只白球可供抽取,第二次也有 4 只白球可供抽取,由乘法原理共有 4×4 种抽法,即 A 中包含 4×4 个元素. 同理,B 中包含 2×2 个元素,于是

$$P(A)=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4}{9},\quad P(B)=\frac{2\times2}{6\times6}=\frac{1}{9}.$$

由于 $AB=\varnothing$,得