

权威 实用 经典



2015

考研数学

冲刺训练200题(数学二)

主编 / 胡金德 谭泽光

- ✓ 精细分类——严格按照大纲细分专题，选编习题覆盖大纲所有考点
- ✓ 命题导航——针对每一专题，通过近10年的真题分析，全面揭示命题趋势
- ✓ 经典真题——以经典真题为例，深化考生对每一知识点命题难度、频度等特点的认知
- ✓ 冲刺训练——选取5~10道与真题难度相近的习题，精讲精练，突破难点，赢取高分



中国人民大学出版社

2015

考研数学

冲刺训练200题(数学二)

主编 胡金德 谭泽光

中国人民大学出版社

• 北京 •

图书在版编目(CIP)数据

2015 考研数学冲刺训练 200 题. 数学二/胡金德,谭泽光主编. —北京:中国人民大学出版社,2014. 3
ISBN 978-7-300-18667-2

I. ①2… II. ①胡… ②谭… III. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 316887 号

2015 考研数学冲刺训练 200 题 (数学二)

主编 胡金德 谭泽光

2015 Kaoyan Shuxue Chongci Xunlian 200 Ti (Shuxue Er)

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010—62511242 (总编室)		010—62511770 (质管部)
	010—82501766 (邮购部)		010—62514148 (门市部)
	010—62515195 (发行公司)		010—62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn (中国 1 考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司		
规 格	185mm×260mm 16 开本	版 次	2014 年 3 月第 1 版
印 张	12	印 次	2014 年 3 月第 1 次印刷
字 数	307 000	定 价	22.00 元

前 言

本书是一本系统化的考研数二知识点专项梳理及能力提高训练用书,为了使考研同学能在短时间内对考研数二所有考点有更加清楚的认识,对考研数二试题的难度和做题的速度有更加精确的把握,我们通过深入分析考研数学考试大纲的要求和精神以及近年来考研数二命题的特点和动向,编写这本书.本书将考研数二所有知识点分专题进行归类讲解,内容包括高等数学和线性代数两部分,其中高等数学共分 24 个专题,线性代数共分 14 个专题.

本书每个专题分以下三部分进行讲解:

一、命题导航——通过对考研大纲以及近年考研真题的分析,总结了每一专题在近年考研真题中的命题频率.例如:专题一“极限的求解及应用”在考研真题的选择题、填空题和解答题中均有出现,包括:2013 年第 9 题,2012 年第 10 题和 15 题,2011 年第 15 题,2010 年第 16 题,2009 年第 15 题,2008 年第 15 题,2007 年第 11 题及 2006 年第 18 题,通过这样的总结,可以使考生对不同知识点是否为常考知识点有个清楚的认识,以便在后期的复习中把握重点.另外,本部分还给出了本专题中知识点分析及解题技巧总结,以使考生对此类问题的解法有总体的把握和提升.

二、经典真题——此部分包含 1~2 道与此专题紧密相关的考研数二经典真题,并附有详细答案解析.目的是让考生对此题所含知识点在数二真题中的出题特点有更加明确的认识.另外,也让考生对考研数二真题的难度和命题特点有更加清晰的认识.

三、冲刺训练——我们依据此专项在考研数二真题中的分布情况,并结合考研数学考试大纲的要求和命题趋势,精选 5~10 道练习题,所选题目难度与考研数二真题难度接近,并略有提升.旨在让考生通过题目练习,加深对知识点的掌握,提高做题的速度和准确性,提高考生在做解答题时答案的规范性.

希望本书能成为广大考生的良师益友.由于时间仓促,书中难免有疏漏之处,诚请各位专家和读者批评指正.

最后,祝愿每一位考生都能不负努力,考取理想的学府.

编者

2014 年 3 月

目 录

第一部分 高等数学

专题一	极限的求解及应用	1
专题二	数列的极限	11
专题三	无穷小及其阶	16
专题四	函数的连续性	19
专题五	导数与微分的概念与几何意义	23
专题六	常见函数的求导法	27
专题七	利用导数研究函数的性质、状态	34
专题八	函数零点的存在与个数问题	39
专题九	微分中值定理	44
专题十	不等式证明	49
专题十一	泰勒公式及其应用	53
专题十二	一元函数积分的概念与性质	57
专题十三	常用积分求法	60
专题十四	反常积分	70
专题十五	定积分的几何、物理应用	74
专题十六	多元函数的极限、连续、偏导数与全微分	79
专题十七	复合函数求导法	83
专题十八	多元函数的极值、最值问题	90
专题十九	二重积分	95
专题二十	微分方程的概念和解的性质	100
专题二十一	一阶微分方程的求解	102
专题二十二	二阶线性微分方程	105
专题二十三	可降阶及含变限积分的方程	107
专题二十四	微分方程的简单应用	111

第二部分 线性代数

专题一	行列式计算	115
专题二	矩阵的运算	118
专题三	矩阵可逆的判别及逆矩阵求法	121
专题四	初等变换	126
专题五	矩阵方程的求解	129
专题六	向量的线性表出	134
专题七	向量组的线性相关问题	139
专题八	向量组的极大线性无关组、秩和矩阵的秩	145
专题九	线性方程组的求解和解的判定	148
专题十	方程组的公共解和同解问题	159
专题十一	矩阵的特征值和特征向量	162
专题十二	相似矩阵和相似对角化	168
专题十三	二次型及其标准形和正定性	176
专题十四	合同矩阵	182

第一部分 高等数学

专题一 极限的求解及应用

命题导航

极限概念及其计算一直是考研大纲中要求理解、掌握的重点考查内容,求极限是历年考研真题中的常考题型,在选择题、填空题、解答题中均有出现,如:13(9)题,12(10),(15)题,11(15)题,10(16)题,09(15)题,08(15)题,07(11)题,06(18)题.

求函数的极限主要有七种: $\frac{0}{0}$ 型, $\frac{\infty}{\infty}$ 型, $0 \cdot \infty$ 型, $\infty - \infty$ 型, 1^∞ 型, 0^0 型, ∞^0 型,求解方法如下:

1) 用初等数学(例如三角、对数、指数、分子与分母同乘以某式、提公因式等)中的恒等变形,使得能约分的就约分;

2) 如果有因式极限存在但不为0,那么可将这种因式按乘积运算法则提出来另求;

3) 用洛必达法则;

4) 用等价无穷小替换;

5) 对于 1^∞ 型, 0^0 型, ∞^0 型可以化为指数型复合函数的极限计算;

6) 皮亚诺余项泰勒公式;

7) 导数定义求极限;

8) 最基本的求解方法为极限的四则运算定理,复合函数求极限,连续函数求极限,以及几个重要极限.

经典真题

1. (2013年第9题) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \right]^{\frac{1}{1 - \frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \frac{1}{x} \left[1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \left[1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(1+x)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故, 原式 = $e^{\frac{1}{2}}$.

2. (2009 年第 15 题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$.

【详解】 解法一: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sin^4 x \sim x^4$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{x^4} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1 + \tan x} \sec^2 x}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - \sec^2 x}{2x(1 + \tan x)} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan^2 x}{x} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法二: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left[\tan x - \frac{\tan^2 x}{2} + o(x^2) \right]}{x^2}, \left(\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \tan x) + \frac{\tan^2 x}{2} - o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

冲刺训练

【1.1】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【1.2】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{\sin x} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

【1.3】 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【1.4】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1+\sin^2 x)}{(1 - \cos x) \ln(1 - \sin^2 x)}.$

【1.5】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{e^x - 1}{1 - \cos x}}.$

【1.6】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1-e^x}{2\ln(1+x)}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}, & x < 0, \end{cases}$$

【1.7】 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x^2}$.

【1.8】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1) - \cos x \sqrt[3]{\cos 3x} \sqrt[5]{\cos 5x} \cdots \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x}}{\ln(2 - \cos x)}$.

【1.9】 确定 a 与 b 的值, 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sqrt{x^4 + ax} - \frac{(x^3 + x^2 + \frac{3}{2}bx)}{\sqrt{x}e} \right] = \frac{1}{4}.$$

【1.10】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

【1.11】 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^3$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

【1.12】 设 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin^p(1-x) \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t \ln \frac{1}{x}} dt$ 存在且不为 0, 求常数 p 的值及该极限值.

【1.13】 设 $f(x)$ 可微且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+2} t f(t) \cdot \ln \frac{t+1}{t} dt$.

答案详解

【1.1】 由 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 (x \rightarrow 0)$, 用洛必达法则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2x \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【1.2】 所求极限为“ $\infty - \infty$ ”型未定式, 应首先通分化为“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式后, 再进行求解.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{\sin x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \ln(1-x)}{\ln(1-x) \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \ln(1-x)}{-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1-x}}{-2x} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)\cos x - 1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} - \cos x \right) \\
 &= -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

点 拨

当遇到 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 等未定式时,需先把未定式转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,再用洛必达法则求解.

【1.3】 解法一:属 1^∞ 型.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{\ln(1 + \sin^2 x)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x - 1}{\ln(1 + \sin^2 x)}}.
 \end{aligned}$$

利用等价无穷小因子替换得

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{1}{\ln(1 + \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

即:原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

解法二:属 1^∞ 型,用求指数型极限的一般方法.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\ln(1 + \sin^2 x)} \ln \cos x},$$

$$\begin{aligned}
 \text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1 + \sin^2 x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

即:原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

【1.4】 先作恒等变形:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \right)}{(1 - \cos x) \ln(1 - \sin^2 x)}.$$

然后用等价无穷小因子替换: $x \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned}
 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2, \ln \left(1 + \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \right) \sim \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \sim x^2 - \sin x, \\
 \ln(1 - \sin^2 x) &\sim -\sin^2 x \sim -x^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是 } \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \right) \\
 &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\
 &= -2 \cdot 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.
 \end{aligned}$$

由洛必达法则得:

$$\text{原式} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = -\frac{2}{3}.$$

点 拨

已知 $x \rightarrow x_0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$.

可得 $x \rightarrow x_0$ 时,

$$\ln(1 + \varphi(x)) \sim \varphi(x)$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow x_0} \ln(1 + \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0,$$

同理:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{A} = 0.$$

其中极限 $x \rightarrow x_0$ 变为 $x \rightarrow 0$ 及 $x \rightarrow \infty$ 等时上述结论也可成立.

【1.5】 这是 1^∞ 型的极限.

$$\begin{aligned} \text{解法一: } M &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{e^x-1}{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}-1} \cdot \left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1 \right]} \cdot \frac{e^x-1}{1-\cos x} \\ &= e^A. \end{aligned}$$

$$\text{其中: } A = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \frac{e^x-1}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x} \cdot \frac{(e^x-1)}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x} \cdot \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = -1.$$

所以, 原式 $= e^{-1}$.

解法二: 利用泰勒公式求解, 由

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0,$$

得:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \frac{e^x-1}{1-\cos x} \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -1 \end{aligned}$$

所以, 原式 $= e^{-1}$.

点 拨

1.4、1.5 两个小题均是 1^∞ 型, 1^∞ 型未定式求极限通常有两种方式:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \mu(x) = \infty$$

方法一: 利用等价无穷小的形式化简

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)^{\mu(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} [1 + \varphi(x) - 1]^{\frac{1}{\varphi(x)-1} \cdot \mu(x) [\varphi(x)-1]} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\mu(x) [\varphi(x)-1]}.$$

方法二:把 1^∞ 型未定式化为以 e 为底数的幂函数

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)^{\mu(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\mu(x) \ln \varphi(x)}.$$

【1.6】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1-e^x}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{\ln(1+x^2)} \ln \cos x}.$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

【1.7】 解法一:恒等变形后用洛必达法则,由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x - \sin 2x}{x^3} + \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} \right],$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{3x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin 2x}{6x} = \frac{4}{3},$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

解法二:用带皮亚诺余项泰勒公式,题设为 $\sin 2x + xf(x) = o(x^3)$.

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3),$$

代入得

$$2x - \frac{8}{6}x^3 + xf(x) = o(x^3),$$

从而得

$$2 + f(x) = \frac{4}{3}x^2 + o(x^2), \quad \frac{2 + f(x)}{x^2} = \frac{4}{3} + o(1),$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x^2} = \frac{4}{3}.$$

点 拨

若将 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3}$ 中 $\sin 2x$ 用等价无穷小直接替换为 $2x$, 得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x^2} = 0$ 是错误的.

因为替换过程会产生误差 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^3} - \frac{2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos 2x - 2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos 2x - 1)}{3x^2} = -\frac{4}{3} \neq 0$.

【1.8】 由等价无穷小代换:

$$\textcircled{1} \quad \ln(2 - \cos x) \sim \ln[1 + (1 - \cos x)] \sim (1 - \cos x) \sim x^2/2.$$

$$\textcircled{2} \quad x - \ln(x+1) \sim \frac{x^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 - \cos x \sqrt[3]{\cos 3x} \sqrt[5]{\cos 5x} \cdots \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x}}{x^2/2} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\cos x \sqrt[3]{\cos 3x} \sqrt[5]{\cos 5x} \cdots \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x}}{x^2/2} \right). \end{aligned}$$

记

$$S = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x \sqrt[3]{\cos 3x} \sqrt[5]{\cos 5x} \cdots \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x}}{x^2/2}.$$

由洛必达法则

$$\begin{aligned} S &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[-\sin x \sqrt[3]{\cos 3x} \sqrt[5]{\cos 5x} \cdots \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x} \right. \\ &\quad + \cos x \cdot \frac{-\sin 3x}{\sqrt[3]{(\cos 3x)^2}} \cdot \sqrt[5]{\cos 5x} \cdots \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x} \\ &\quad + \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos 3x} \cdot \frac{-\sin 5x}{\sqrt[5]{(\cos 5x)^4}} \cdot \cdots \cdot \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x} + \cdots \\ &\quad \left. + \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos 3x} \cdot \sqrt[5]{\cos 5x} \cdots \cdot \frac{-\sin(2n-1)x}{[\cos(2n-1)x]^{\frac{2n-2}{2n-1}}} \right]. \end{aligned}$$

由观察可知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\cos 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{\cos 5x} = \cdots = 1. \end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned} S &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 3x}{x} + \frac{\sin 5x}{x} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{x} \right] \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2. \end{aligned}$$

故 原式 $= 1 + n^2$.

点 拨

本题关键是活用等价无穷小并与洛必达法则结合.

$$\text{其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{x \sqrt{\cos^{n-1} nx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{x}.$$

【1.9】 解法一:将左式化为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^6 + ax^3} - \left(x^3 + x^2 + \frac{3}{2}bx \right) e^{-\frac{1}{x}} \right]$

利用换元法,令 $t = \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{t^6} + \frac{a}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} + \frac{3}{2}b \frac{1}{t} \right) e^{-t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{t^3} (1 + at^3)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{t^3} \left(1 + t + \frac{3}{2}bt^2 \right) e^{-t} \right]. \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

由麦克劳林公式

$$\begin{cases} (1 + at^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{a}{2}t^3 + o(t^3), \\ e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \textcircled{1} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} \left[\left(1 + \frac{a}{2}t^3 + o(t^3) \right) - \left(1 + t + \frac{3}{2}bt^2 \right) \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}b \right) t^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{3b}{2} - \frac{1}{3} \right) t^3 + o(t^3) \right] \\ &= \begin{cases} +\infty, & b \neq \frac{1}{3}, \\ \frac{a}{2} + \frac{1}{6}, & b = \frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{已知 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \sqrt{x^4 + ax} - \frac{x^3 + x^2 + \frac{3}{2}bx}{\sqrt{e}} \right] = \frac{1}{4},$$

$$\text{可得 } \frac{a}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}, \text{ 解得 } a = \frac{1}{6}.$$

$$\text{故 } a = \frac{1}{6}, \quad b = \frac{1}{3}.$$

解法二:作换元 $t = \frac{1}{x}$, 可得

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + at^3} - \left(1 + t + \frac{3b}{2}t^2 \right) e^{-t}}{t^3} \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3at^2}{2\sqrt{1 + at^3}} - \left(1 + 3bt - 1 - t - \frac{3bt^2}{2} \right) e^{-t}}{3t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{a}{2\sqrt{1 + at^3}} - \left[\frac{(3b-1)}{3t} - \frac{b}{2} \right] e^{-t} \right\} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \infty, & b \neq \frac{1}{3}, \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2}, & b = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

则 $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{4},$

故 $a = \left(\frac{1}{4} - \frac{b}{2}\right) \cdot 2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot 2 = \frac{1}{6}.$

【1.10】 注意到 $x \rightarrow 0^+$ 与 $x \rightarrow 0^-$ 两个变化过程中, $e^{\frac{1}{x}}$ 的极限不同, 要先求出左、右极限分别讨论.

$x \rightarrow 0^+$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{-\frac{4}{x}} (e^{\frac{1}{x}} + 2)}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right]. \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-\frac{3}{x}} + 2e^{-\frac{4}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} \right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

因为,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-3/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-4/x} = 0.$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$x \rightarrow 0^-$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= \frac{2 + 0}{1 + 0} - 1 = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$$

点 拨

某些情况下极限的左、右极限可能会不相等, 一般这时需要先分别求左、右极限; 另外对于有绝对值符号时的极限问题, 亦要对去绝对值符号的“变号”问题进行讨论.

【1.11】 对等式两边取对数

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[\left(1 + x + \frac{f(x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \right] &= \ln e^3 = 3. \\ \text{左边} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x^2} \right)}{\sin x}. \end{aligned}$$

因 $\sin x \sim x,$

故 $\text{左边} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x^2} \right)}{x}.$

注意:本题中极限已存在, $x + \frac{f(x)}{x^2}$ 必在 $x \rightarrow 0$ 时趋向于 0 方能保证极限存在.

$$\text{左边} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x^3} \right) = 3,$$

$$\text{故} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 2.$$

点 拨

含有幂函数极限的常用的求解方法:

① 两边取对数;

② 把普通的幂函数变为以 e 为底的幂函数. 本题也可直接变形为:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x^2} \right)} = e^3$$

【1.12】

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} dt &= \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} dt \sqrt{\ln \frac{1}{x}} \\ &\xrightarrow{u = t \sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

①

$$\text{求} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \right)^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \cdot \int_0^{+\infty} e^{-w^2} dw = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-u^2} \cdot e^{-w^2}) du dw \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{4} (-e^{-r^2}) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{此结论应牢记}).$$

$$\text{故} \quad ① = \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin^p(1-x)}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xrightarrow{t=1-x} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\sin t)^p}{[\ln(1-t)^{-1}]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^p}{[-\ln(1-t)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^p}{t^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

故 $p = \frac{1}{2}$ 可使极限存在且不为 0.

极限值为 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

【1.13】 由积分中值定理, $\exists \xi \in [x, x+2]$, 使得

$$\int_x^{x+2} t f(t) \ln \frac{t+1}{t} dt = 2\xi f(\xi) \ln \frac{\xi+1}{\xi}$$

因 $x \rightarrow +\infty$, 故 $\xi \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{\xi \rightarrow +\infty} 2\xi f(\xi) \ln \frac{\xi+1}{\xi} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow +\infty} 2f(\xi) \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}{\frac{1}{\xi}} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} 2f(\xi) \frac{\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\xi}} \\ &= 2 \lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

点拨

本类题目是利用积分中值定理处理含有积分项的求极限问题. 处理此类问题时, 可以将积分项利用中值定理化为原函数式, 从而简化计算.

专题二 数列的极限

命题导航

求解数列极限和求解函数极限有很大相似性, 在近年考研数学二中, 此类问题越来越多地出现在解答题当中, 并且多以解答题中一小问的形式出现, 如: 13(2)、(20) 题, 12(21) 题, 10(16), 06(18) 题, 同时选择题、填空题中也均有出现, 如: 10(6) 题, 09(11) 题, 08(5) 题.

1. 数列极限可以通过转化为函数极限来求解.
2. 数列和式极限可以利用夹逼定理或转化为定积分求解.
3. 证明数列极限存在可以利用单调有界准则.

经典真题

1. (2010 年第 6 题) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{(n+i)(n^2+j^2)} =$ ()

(A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

【详解】

解法一: 记 $\delta_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{(n+i)(n^2+j^2)}$, 则

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $f(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$.

用直线 $x = x_i = \frac{i}{n} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 与 $y = y_j = \frac{j}{n} (j = 0, 1, 2, \dots, n)$ 将 D 分成 n^2 个小