注册电气工程师
公共基础考试百日备考

主　编　刘　燕
副主编　刘辛国　魏京花

☆ 100天全面掌握大纲内容
☆ 100天有效突破考试难点
☆ 100天熟练解答考试题型

中国建筑工业出版社

注册电气工程师公共基础考试
百日备考

主　编　刘　燕
副主编　刘辛国　魏京花

中国建筑工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

注册电气工程师公共基础考试百日备考/刘燕主编. —北京：中国建筑工业出版社，2014.3
ISBN 978-7-112-16388-5

Ⅰ.①注… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①电气工程-工程师-资格考试-自学参考资料 Ⅳ.①TM

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 027051 号

本书是严格按照注册电气工程师执业资格考试公共基础考试大纲编写的考试辅导教材。内容包括：数学、物理学、化学、理论力学、材料力学、流体力学、电气与信息、法律法规、工程经济。全书采用分天分知识点对应编排方式，将考试大纲要求的全部内容分为一百份，即一百个知识点，分配给一百天时间学习，每天均配有例题和练习题，等于提供了一套完善的学习方案，帮助应考者循序渐进地复习，以达到逐步掌握考试科目内容的目的。

本书内容全面，讲解简明扼要，知识点编排合理，针对性强，应用灵活，习题丰富，直接模拟考题，是注册电气工程师执业资格考试应考人员必备的备考教材，也可作为相关专业人员学习电气专业基础学科知识的参考书。

责任编辑：万 李 张 磊
责任设计：张 虹
责任校对：张 颖 赵 颖

注册电气工程师公共基础考试
百日备考
主 编 刘 燕
副主编 刘辛国 魏京花
*
中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）
各地新华书店、建筑书店经销
北京科地亚盟排版公司制版
北京建筑工业印刷厂印刷
*
开本：787×1092 毫米 1/16 印张：41½ 字数：1030 千字
2014 年 5 月第一版 2014 年 5 月第一次印刷
定价：**90.00** 元
ISBN 978-7-112-16388-5
（25117）

编　委　会

主　　编：刘　燕

副 主 编：刘辛国　魏京花

编写人员：李群高　魏京花　岳冠华

刘　燕　张　英　王文海

刘辛国　姜　军　王建宾

樊　瑜

前　言

自2005年起实施的注册工程师执业资格考试制度，是为适应社会主义市场经济体制，使工程设计管理体制和人事管理制度尽快与国际接轨的一项配套改革措施。注册电气工程师资格，必须通过全国统一考试取得。

为配合全国注册电气工程师资格考试，也为有效指导考生复习、应考特组织编写的本辅导教材，以中华人民共和国住房和城乡建设部2009年公布的注册电气工程师公共基础考试大纲为依据，以大纲中提供的参考书目为基础，集中了编者们深厚的专业知识和多年丰富的教学、辅导经验，使其具有较强的指导性和实用性。

本书包含了九门课程的基础知识，具体编写情况如下：数学（第1～20天）由李群高编写，物理学（第21～30天）由魏京花编写，化学（第31～38天）由岳冠华编写，理论力学（第39～48天）由刘燕编写，材料力学（第49～58天）由张英编写，流体力学（第59～65天）由王文海编写，电气与信息（第66～88天）由刘辛国编写，法律法规（第89～93天）由姜军、王建宾编写，工程经济（第94～100天）由樊瑜编写。

本书亮点有三：①提供按天复习的合理方案。书中不仅全面介绍了考试的内容和应考方法，更主要的是将九门基础课程中的大量知识点按照考试大纲中考题所占比例科学合理的分配到100天中，为备考者提供了便于记忆和掌握的复习方案。②考试大纲即为本书的知识点。每天的知识点标题即是相应部分的考试大纲条目，复习的针对性非常明显。③每天有题。即每个知识点的学习内容均对应有两个以上解答详细的例题，以加深对知识点的理解，同时备有与考试真题形式相同的练习题和练习题的答案及提示，作为实训和检验复习效果之用。

全书共提供例题近600道，编辑收录附有答案和提示的练习题近900道，这些例题和练习题囊括了近几年注册电气工程师公共基础考试真题，通过对这些例题和练习题的观摩和分析解答，有助于备考者掌握考试的规律和出题形式，了解考试题目的程度及范围，便于有针对性的学习掌握相关知识点，做到有的放矢地进行复习。

由于很多专业（如结构、岩土、公用设备、环保等）工程师执业资格公共基础部分的考试大纲完全相同，因此本书不仅是参加注册电气工程师执业资格公共基础考试人员的必备参考书，也同样适用于其他与注册电气工程师公共基础考试大纲相同的专业。

由于时间仓促，在编写过程中难免有疏漏之处，您可将意见发送至289052980@qq.com，恳请读者指正。

编　者

2014年1月

目　　录

第 1 章　数　　学

DAY 1～DAY 20

DAY 1

1.1　知识点：向量代数

1. 向量的概念

向量是既有大小又有方向的量。

（1）向量的坐标：设向量 a 的起点为 $A(x_1, y_1, z_1)$，终点为 $B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)=(a_x, a_y, a_z)$$

注：a_x，a_y，a_z 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，向量的坐标也是该向量在三维坐标轴上的投影。

（2）向量的模：（表示向量的大小）

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

（3）向量的方向角与方向余弦：（表示向量的方向）

向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α、β、γ 叫向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角（$0\leqslant\alpha$、β、$\gamma\leqslant\pi$）。$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，有

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}, (\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$$

（4）单位向量：模为 1 的向量。

1）向量的单位化：与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$

2）基本单位向量：与 x 轴、y 轴、z 轴同方向的单位向量分别为

$$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\},\quad \boldsymbol{j}=\{0,1,0\},\quad \boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$$

（5）负向量：与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同、方向相反的向量，$-\boldsymbol{a}=(-a_x, -a_y, -a_z)$。

（6）零向量：模为 0 的向量，零向量没有确定的方向，记为 $\boldsymbol{0}$。

（7）两向量相等：模相等且方向相同，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

（8）两向量的夹角：将两向量的起点放在一起，他们所夹的不超过 180°的角记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$。

（9）向量在轴上的投影：向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影。

$$\mathrm{Pr}j_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}})$$

2. 向量的线性运算

（1）两向量的和

1）定义：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z\}$$

2）运算律：

交换律
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

结合律
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$

3）向量的减法：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\{a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z\}$$

（2）数与向量相乘

1）λ 是数，$\boldsymbol{a}$ 是向量，$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$，特别地

$$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\quad (-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

2）运算律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

加法和数乘运算统称为向量的线性运算，若干个向量用数乘和加法运算组合在一起，称为线性组合。

3. 向量的数量积（点积）

（1）定义：两向量的数量积是一个数，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，且有

1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$（该式可用于求向量的模）

2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$（该式可用于求向量的投影）

（2）坐标表达式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$（经常用该式求数量积）

（3）运算律：

交换律
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

分配律
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

注：不满足结合律。

（4）两向量垂直的充分必要条件：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

（5）两向量夹角的余弦公式：$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

4. 向量积（叉积）

（1）定义：两向量的向量积是一个向量，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其模：$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，

方向：$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，且符合右手规则。

（2）坐标表达式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

（3）运算律：满足分配律　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

注：不满足交换律，有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，也不满足结合律。

（4）几何意义：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 正好是以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积。

（5）两向量平行（共线）的充分必要条件：

$$\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

1.2　例题

【例题 1-1】　设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 都是非零向量，$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}$，则（　　）。

A. $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$　　B. $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\gamma}$　　C. $\boldsymbol{\alpha}\parallel(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})$　　D. $\boldsymbol{\alpha}\perp(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})$

解： 由 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}$，有 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}=0$，提公因子得 $\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})=0$，由于两向量平行的充分必要条件是向量积为 0，所以 $\boldsymbol{\alpha}\parallel(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})$，应选 C。

【例题 1-2】　设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，与 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都垂直的单位向量为（　　）。

A. $\pm(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$　　B. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

C. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$　　D. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$

解： 由向量积定义知，$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\beta}$，故作向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的向量积，再单位化即可。由于 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&3\\1&-3&-2\end{vmatrix}=5(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$，取 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，再单位化得 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$，故应选 D。

【例题 1-3】　设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是向量，下列说法正确的是（　　）。

A. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$　　B. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$

C. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$　　D. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$

解： 由于向量的数量积不满足结合律，B 和 D 选项不成立，再由于向量的向量积不满足交换律，C 选项也不成立；而 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$ 故选 A。

5. 向量的混合积

（1）定义：三向量的混合积记为 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=[abc]$

（2）计算：$[abc]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$

（3）性质：

1）$[abc]=[bac]=[cab]$

2）三向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow[abc]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0$

【例题 1-4】　已知 $\alpha=i+aj-3k$，$\beta=ai-3j+6k$，$\gamma=-2i+2j+6k$，若 α，β，γ 共

面，则 a 等于（　　）。

A. 1 或 2　　B. −1 或 2　　C. −1 或 −2　　D. 1 或 −2

解：由 α，β，γ 共面，则 $\begin{vmatrix} 1 & a & -3 \\ a & -3 & 6 \\ -2 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0$，计算行列式可得，$-4(a+1)(a+2)=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=-2$，故应选 C。

1.3 练习题

【练习题 1-1】 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{4}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$（　　）。

A. 1　　B. $1+\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

【练习题 1-2】 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 都是非零向量，$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}$，则（　　）。

A. $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$　　B. $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\gamma}$　　C. $\boldsymbol{\alpha}\parallel(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})$　　D. $\boldsymbol{\alpha}\perp(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})$

【练习题 1-3】 设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，与 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都垂直的单位向量为（　　）。

A. $\pm(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$　　B. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$

C. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$　　D. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$

【练习题 1-4】 设 $\boldsymbol{\alpha}=\{1, 1, 1\}$，$\boldsymbol{\beta}=\{1, 2, 0\}$，则下列结论中正确的是（　　）。

A. $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 平行　　B. $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 垂直　　C. $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=3$　　D. $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\{2, -1, -1\}$

【练习题 1-5】 设 $\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$，已知 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$，则 t 等于（　　）。

A. 1　　B. 0　　C. −1　　D. −2

DAY 2

2.1 知识点：空间解析几何

1. 平面及其方程

（1）平面的点法式方程：与平面垂直的向量都是该直线的法向量，法向量不唯一。设平面过点 (x_0, y_0, z_0)，法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$，则平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

这个方程就做平面的点法式方程。求平面方程的第一个思路，就是利用已知条件，找出平面的法向量和某点的坐标。

（2）平面的一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$ 其中 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ 为平面的法向量。

当 $D=0$ 时，平面过原点。

当 $A=0$ 时，平面平行于 x 轴；这时若 $D\neq0$，平面不经过 x 轴，若 $D=0$，则平面经过 x 轴。

当 $B=0$ 时，平面平行于 y 轴；这时若 $D\neq0$，平面不经过 y 轴，若 $D=0$，则平面经过 y 轴。

当 $C=0$ 时，平面平行于 z 轴；这时若 $D\neq0$，平面不经过 z 轴，若 $D=0$，则平面经过 z 轴。

当 $A=B=0$ 时，平面平行于 xOy 面。

求平面方程的另一常用思路是利用条件，写出平面一般式，再确定系数。

（3）两平面的夹角

两平面的夹角是用它们法向量的夹角来表达的，由于法向量不唯一，为保证夹角的唯一性，规定夹角 $\theta\leqslant 90°$。设平面 π_1 和 π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ 和 $\boldsymbol{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$，则

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

（4）两平面垂直、平行的充要条件

$$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

$$\pi_1 /\!/ \pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

（5）点到平面的距离

点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

2. 直线及其方程

（1）空间的直线是两个平面的交线，故空间直线的一般方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

与直线平行的任一向量都是该直线的方向向量，方向向量不唯一。

方向向量 $$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}$$

（2）对称式方程：设直线过点 (x_0, y_0, z_0)，方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$，则直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

如果 m、n、p 中有一个为 0，例如 $n=0$，这时直线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}\\y=y_0\end{cases}$$

求直线方程的思路主要是利用已知条件，找出直线的方向向量和一个点的坐标。

（3）参数式方程

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt,\quad(-\infty<t<+\infty)\\z=z_0+pt\end{cases}$$

（4）两直线的夹角

两直线的夹角是用它们方向向量的夹角来表达的，同样为保证夹角的唯一性，规定夹

角 $\theta \leqslant 90°$。设直线 L_1、L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=\{m_1、n_1、p_1\}$ 和 $\boldsymbol{s}_2=\{m_2、n_2、p_2\}$，则

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

（5）两直线垂直、平行的充要条件

$$L_1\perp L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$$L_1 /\!/ L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

（6）直线与平面的夹角

直线 L 和它在平面 π 上的投影直线的夹角称为直线 L 和平面 π 的夹角。设直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m、n、p\}$，平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A，B，C\}$，记直线 L 和平面 π 的夹角为 θ，直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 和平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 φ，则 $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$，故有

$$\cos\theta=\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

（7）直线与平面垂直、平行的充要条件

$$L\perp\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s} /\!/ \boldsymbol{n}\Leftrightarrow\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

$$L /\!/ \pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$$

（8）点到直线的距离

点 M_0（x_0，y_0，z_0）到直线 $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ 的距离为

$$d=\frac{\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ m & n & p\\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

3. 曲面及其方程

含有 x，y，z 的一个等式 $F(x，y，z)=0$ 或 $z=f(x，y)$ 表达空间的曲面，空间的曲面非常多，重点需要掌握以下几种曲面。

（1）球面

球心在点 $M_0(x_0，y_0，z_0)$，半径为 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

如果球心在原点，则方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

（2）母线平行于坐标轴的柱面

C 是 xOy 面内的定曲线，L 是平行于 z 轴的直线，动直线 L 沿定曲线 C 移动形成的曲面叫做母线平行于 z 轴的柱面，其方程为 $F(x，y)=0$。类似地，母线平行于 y 轴的柱面方程为 $G(x，z)=0$；母线平行于 x 轴的柱面方程为 $H(y，z)=0$。一般地，在空间解析

几何，方程中若缺少某个变量，就是柱面方程。

例如：$y=x^2$ 是准线在 xOy 面内，母线平行于 z 轴的抛物柱面；$x^2-z^2=1$ 是准线在 zOx 面内，母线平行于 y 轴的双曲柱面。

（3）旋转轴为坐标轴的旋转曲面

平面曲线绕其平面上一定直线旋转一周所成的曲面叫旋转曲面，定直线叫旋转曲面的轴。

设 yOz 面内曲线 C 的方程为 $\begin{cases} f(y,\ z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，该曲线绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$；绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为 $f(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$。

例如：双曲线 $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所生成旋转双曲面方程为 $x^2+z^2-y^2=1$。

（4）常用二次曲面

1）椭圆锥面：标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$，如果 $a=b$，则为圆锥。$z=\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$ 是上半锥，$z=-\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$ 是下半锥。

2）椭球面：标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，如果 a、b、c 中有两个相等，则是旋转椭球面，如果三个都相等，则为球面。

3）单叶双曲面：标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，如果 $a=b$，就是旋转双曲面。

4）双叶双曲面：标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，如果 $b=c$，就是旋转双曲面。

5）椭圆抛物面：标准方程为 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$（$p$ 和 q 同号），如果 $p=q$，就是旋转抛物面。

6）双曲抛物面：标准方程为 $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$（$p$ 和 q 同号），也叫马鞍面。

4. 空间曲线在坐标面上的投影

空间曲线是两个曲面的交线，所以空间曲线的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

（1）空间曲线在坐标面上投影的概念

经过空间曲线 C，且垂直于 xOy 面的柱面，称为曲线 C 在 xOy 面的投影柱面，投影柱面与 xOy 面的交线，就是空间曲线 C 在 xOy 面的投影。类似有曲线 C 在 yOz 面和 zOx 面投影的概念。

（2）空间曲线在坐标面上投影的方程

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去方程组中的变量 z，得到方程 $H(x, y)=0$，显然这是一个母线平行于 z 轴的柱面，又曲线 C 在该柱面上，故是曲线 C 在 xOy 面的投影柱面，因而曲线 C 在 xOy 面的投影方程为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

类似，从方程组中消去变量 x，得到方程 $R(y, z)=0$，曲线 C 在 yOz 面的投影方程为

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

同理，可得曲线 C 在 zOx 面的投影方程。

2.2　例题

【例题 2-1】　过点（-1，0，1）且与平面 $x+y+4z+19=0$ 平行的平面方程为（　　）。

A. $x+y+4z-3=0$　　B. $2x+y+z-3=0$

C. $x+2y+z-19=0$　　D. $x+2y+4z-9=0$

解：由于所求平面与平面 $x+y+4z+19=0$ 平行，而平面 $x+y+4z+19=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1, 1, 4\}$，故所求平面的法向量可为 $\boldsymbol{n}=\{1, 1, 4\}$，再由其过点（$-1$，0，1），利用平面的点法式方程，有

$$1(x+1)+1(y-0)+4(z-1)=0$$

即 $x+y+4z-3=0$，故选 A。

【例题 2-2】　过 z 轴和点（1，2，-1）的平面方程是（　　）。

A. $x+2y-z-6=0$　　B. $2x-y=0$　　C. $y+2z=0$　　D. $x+z=0$

解：过 z 轴的平面方程为 $Ax+By=0$ 再将点（1，2，-1）代入得 $A+2B=0$，即 $A=-2B$，代入并消去 B，得 $-2x+y=0$，故应选 B。

【例题 2-3】　已知平面 π 过点（1，1，0），（0，0，1），（0，1，1），则与平面 π 垂直且过点（1，1，1）的直线对称方程为（　　）。

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$　　B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$，$y=1$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$　　D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

解：由于直线与平面垂直，故平面的法向量就是直线的方向向量。而平面 π 过点（1，1，0），（0，0，1），（0，1，1），向量 $\{1, 1, 1\}$ 和 $\{0, 1, 0\}$ 在平面 π 内，所以平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$，所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$，故应选 B。

【例题 2-4】　设直线的方程为 $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-2 \\ z=-3t+3 \end{cases}$，则直线（　　）。

A. 过点（-1，2，-3），方向向量为 $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$

B. 过点（-1，2，-3），方向向量为 $-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

C. 过点（1，2，−3），方向向量为 $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

D. 过点（1，−2，3），方向向量为 $-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

解：由所给方程知直线过点（1，−2，3），方向向量为 $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，也可为 $-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，故应选 D。

【例题 2-5】 设直线的方程为 $x=y-1=z$，平面的方程为 $x-2y+z=0$，则直线与平面（　　）。

A. 重合　　B. 平行不重合　　C. 垂直相交　　D. 相交不垂直

解：直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(1,1,1)$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-2,1)$，$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=1-2+1=0$，这两个向量垂直，直线与平面平行，又直线上的点（0，1，0）不在平面上，故直线与平面不重合，应选 B。

【例题 2-6】 将椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1\\ y=0\end{cases}$，绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程是（　　）。

A. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$

C. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$

解：将 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 中的变量 z 换成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 就可得到所求的旋转曲面方程，正确答案为 C。

【例题 2-7】 下列方程中代表锥面的是（　　）。

A. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}-z^2=0$　　B. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}-z^2=1$

C. $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}-z^2=1$　　D. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{3}+z^2=1$

解：由二次曲面的标准方程可知，$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}-z^2=0\Rightarrow\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=z^2$，代表椭圆锥面；而 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}-z^2=1$ 表示单叶双曲面，$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}-z^2=1$ 表示双叶双曲面，$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 表示椭球面，故应选 A。

【例题 2-8】 空间曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$，在 xOy 平面的投影方程是（　　）。

A. $\begin{cases}2x^2+y^2=16\\ x^2-y^2=0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}2x^2+y^2=16\\ z=0\end{cases}$；　　C. $x+2y^2=16$　　D. $\begin{cases}x^2+2y^2=16\\ z=0\end{cases}$

解：消去方程组中的变量 z 得到 $x+2y^2=16$，这是所给曲线关于 xOy 面的投影柱面方程，曲线在 xOy 平面的投影方程应是

$$\begin{cases}x^2+2y^2=16\\ z=0\end{cases}$$

故选 D。

2.3　练习题

【练习题 2-1】 设平面 π 的方程为 $2x-2y+3=0$，以下选项中错误的是（　　）。

A. 平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$　　　　B. 平面 π 垂直于 z 轴

C. 平面 π 平行于 z 轴　　　　D. 平面 π 与 xOy 面的交线为 $\frac{x}{1}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}$，$z=0$

【练习题 2-2】 点 $M(1，2，1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离是（　　）。

A. 1　　　　B. ± 1　　　　C. -1　　　　D. $\frac{1}{3}$

【练习题 2-3】 设直线的方程为 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$，则直线（　　）。

A. 过点（1，－1，0），方向向量为 $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
B. 过点（1，－1，0），方向向量为 $2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
C. 过点（－1，1，0），方向向量为 $-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
D. 过点（－1，1，0），方向向量为 $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

【练习题 2-4】 设空间直线的对称式方程为 $x=0$，$\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$，则该直线过原点，且（　　）。

A. 垂直于 Ox 轴　　　　B. 垂直于 Oy 轴，但不平行 Ox 轴
C. 垂直于 Oz 轴，但不平行 Ox 轴　　　　D. 平行于 Ox 轴

【练习题 2-5】 求过点 $M(3，-2，1)$，且与直线 $\begin{cases} x-y-z+1=0 \\ 2x+y-3z+4=0 \end{cases}$ 平行的直线方程是（　　）。

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$　　　　B. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-3}$

C. $\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$　　　　D. $\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{3}$

【练习题 2-6】 设平面的方程为 $x+y+z+1=0$，直线的方程为 $1-x=y+1=z$，则直线与平面（　　）。

A. 平行　　　　B. 垂直　　　　C. 重合　　　　D. 相交但不垂直

【练习题 2-7】 直线 $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 与平面 $4x-2y-2z=3$ 的关系是（　　）。

A. 平行，但直线不在平面上　　　　B. 直线在平面上
C. 垂直相交　　　　D. 相交但不垂直

【练习题 2-8】 在三维空间中，方程 $y^2-z^2=1$ 所代表的图形是（　　）。

A. 母线平行 x 轴的双曲柱面　　　　B. 母线平行 y 轴的双曲柱面
C. 母线平行 z 轴的双曲柱面　　　　D. 双曲线

【练习题 2-9】 将抛物线 $\begin{cases} y=2x^2+1 \\ z=0 \end{cases}$，绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程是（　　）。

A. $\pm\sqrt{y^2+z^2}=2x^2+1$　　　　B. $y=2x^2+1$
C. $y=2(x^2+z^2)+1$　　　　D. $y^2+z^2=2x^2+1$

【练习题 2-10】 旋转曲面 $x^2-y^2-z^2=1$ 是（　　）。

A. xOy 平面上的双曲线绕 x 轴旋转所得

B. xOy 平面上的双曲线绕 z 轴旋转所得

C. xOy 平面上的椭圆绕 x 轴旋转所得

D. xOy 平面上的椭圆绕 x 轴旋转所得

【练习题 2-11】 下列方程中，代表单叶双曲面的是（　　）。

A. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-z^2=1$　　B. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+z^2=1$

C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}-z^2=1$　　D. $\frac{x^2}{2}+\frac{y}{3}+z^2=0$

【练习题 2-12】 方程 $16x^2+4y^2-z=0$ 表示（　　）。

A. 锥面　　B. 单叶双曲面　　C. 双叶双曲面　　D. 椭圆抛物面

【练习题 2-13】 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x-z=1$ 的交线在 yOz 坐标面上的投影方程是（　　）。

A. $z=(z+1)^2+y^2$　　B. $\begin{cases}z=(z+1)^2+y^2\\x=0\end{cases}$

C. $x-1=x^2+y^2$　　D. $\begin{cases}x-1=x^2+y^2\\z=0\end{cases}$

【练习题 2-14】 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 坐标面上的投影方程是（　　）。

A. $x^2+y^2+(1-x)^2=9$　　B. $\begin{cases}x^2+y^2+(1-x)^2=9\\z=0\end{cases}$

C. $z^2+y^2+(1-z)^2=9$　　D. $\begin{cases}(1-z)^2+y^2+z^2=9\\x=0\end{cases}$

DAY 3

3.1 知识点：函数、极限、连续

1. 函数

（1）函数的概念和基本性质

1）函数的概念

定义：设 x，y 是两个变量，D 是给定的实数集，如果有一个对应法则 f，使得对于每一个实数 $x\in D$，变量 y 都有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为函数。集合 D 称为该函数的定义域。当 $x\in D$ 时，对应的 y 取值称为函数值，函数值的全体构成的集合称为该函数的值域。

函数的定义域是使得该函数有意义的实数全体，如果函数有实际意义，定义域由实际意义确定。

一元函数还可表为隐函数 $F(x, y)=0$，和参数式 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$。