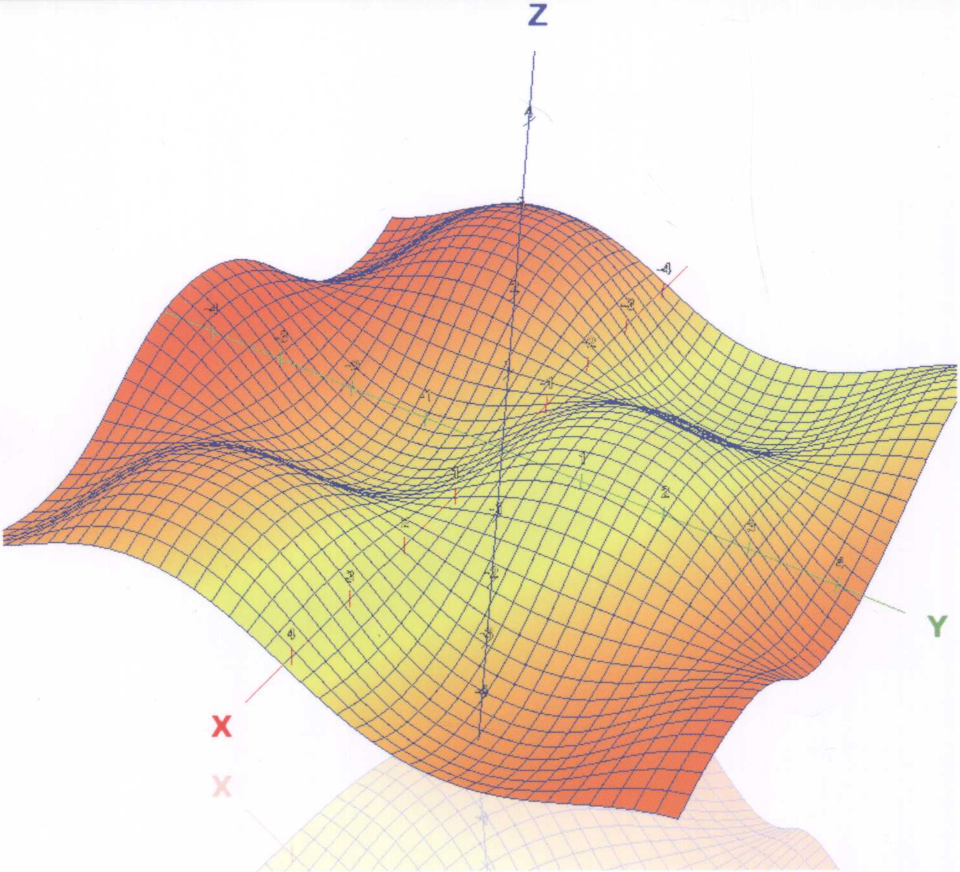
全華

数值分析

——使用C语言（第4版）

◎ 简聪海　编著



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

数值分析——使用C语言

（第4版）

简聪海　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书使用 Turbo-C 语言把数值分析的重要理则付诸执行。内容包括：多项式内插法、非线性方程式的求解、微分近似法、积分近似法、常微分方程式的初值问题、线性代数的数值方法、常微分方程式与边界条件、非线性代数联立方程式等。

本书可作为理工科大学各专业研究生学位课程的教材，还可供从事科学与工程计算的科技人员自学和参考。

图书在版编目（CIP）数据

数值分析 ： 使用C语言 / 简聪海编著. -- 4版. --
北京 ： 北京航空航天大学出版社，2014.4
ISBN 978-7-5124-1271-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①简… Ⅲ. ①C语言—应用—数值分析 Ⅳ. ①0241-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 236330 号

原书名《数值分析—用 C 语言(第四版)》。本书中文简体字版由台湾全华图书股份有限公司独家授权。仅限于中国大陆地区出版发行，不含台湾、香港、澳门地区。
北京市版权局著作权合同登记号　图字：01-2013-7101

数值分析——使用 C 语言（第 4 版）
简聪海　编著
责任编辑　刘　晨　刘朝霞
*
北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191)　http：//www.buaapress.com.cn
发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026
读者信箱：emsbook@gmail.com　邮购电话：(010) 82316524
涿州市新华印刷有限公司印装　各地书店经销
*
开本：710×1 000　1/16　印张：18　字数：383 千字
2014 年 4 月第 1 版　2014 年 4 月第 1 次印刷　印数：4 000 册
ISBN　978-7-5124-1271-2　定价：39.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题，请与本社发行部联系调换。联系电话：(010) 82317024

FOREWORD 前言

数值分析的基本理论可追溯到发明微积分的牛顿时代。然而，直到计算机软硬件出现后，才为科学界与工程学所广泛运用，尤其是当今个人计算机的发展，数值运算速度之快与内存容量之大，实在是令人感慨。例如，当高级计算机语言的回路内容若不是很庞大时，执行50回与执行5000回，坐在计算机前的人，甚至感觉不出两者有什么区别，因为两者在运算时间上的差距并不是人类的感官所能察觉的。因此，对同一问题的不同解题方法，应采用较节省时间和内存容量并且方便编程的数值分析方法。

最早用来执行数值分析的算法的高级计算机语言是FORTRAN，当今个人计算机发展及受台湾地区的学习环境的影响，C语言几乎完全取代了FORTRAN语言的地位，C语言比其他高级语言如FORTRAN、PASCAL、PL-I与BASIC多了许多长处，因此，本书介绍使用Turbo-C语言进行数值分析的重要算法。为了兼顾没有学过C语言、但知道如何用Q BASIC或Visual BASIC或其他高级计算机语言写程序的读者，因此，本书中每一章内节凡有解答问题的地方，一定先介绍解题的详细算法（流程图）的说明，以方便使用其他高级语言的读者，有一定程序设计能力的读者，就算对本书内所介绍的解题算法的背景并非完全了解，也能够设计程序把答案找到。这是作者希望本书除了方便懂C语言的读者外，也能为懂其他高级语言的读者所接受。

相同问题的各种解法部分，本书尽量选择易于写成程序（即解题算法简单）与准确度高的方法。每一种解题算法的理论背景的详细说明，已经努力加以简化以求易懂，每一章每一节的例子几乎都有详细手算的解题算法并且用最基本的C语言的指令写成程序，以方便对C语言并没有十分深入了解的读者。

本书共分成8章，为了方便应用起见，依作者浅见，下面的内容是最重要的部分：

第1章，插值法：牛顿向前与向后的插值法；Hermite插值法。

第2章，非线性方程序的求解：以二分法为主配合函数值正负号的变化先行判定根所在的范围。

第3章，微分近似法。

第4章，积分近似法：梯形法；Simpson法。

第5章，常微分方程序的初值问题：四阶的Runge-Kutta方法。

第6章，线性代数的数值方法：高斯消去法；高斯-乔丹消去法。

第7章，常微分方程序与边界条件：Thomas算法求解三条对角线的代数方程组序；使用中心差商的公式把线性或非线性的常微分方程序转化成三条对角线的代

前言 FOREWORD

数方程组序，然后，使用 Thomas 算法求解。

第 8 章，非线性联立代数方程序既简单又重要。

本书的写作，以读者无师也能自通为立场，只要读者具备下面四种数学基础与一种计算机语言：

（1）微积分的基本原理（不必懂钻牛角尖的解题方法）。

（2）线性代数，解 n 元一次方程组序的基本原理。

（3）常微分方程序的初值条件与边界条件的基本解题理论。

（4）系列的收敛与发散的基本概念。

（5）任何一种高级计算机程序语言，如 C，VB，FORTRAN 等。

然后细读本书，循序渐进，遇到解题的算法部分，宜先行尝试设计计算机程序求解，之后与本书的例子核对答案，然后再参考例子的 C 语言的解题程序。因此，本书是非常适合作为职业技术院校的教材与工程科技学界的参考书。每章习题有详细的解答（教师手册），其相关的 C 语言程序可供读者参考，可发送邮件至 service@bjchwa.com 索取。

作者学浅才疏，书中有任何谬误之处，望各位专家及学者不吝指正。

简聪海　写于永和

目录 CONTENTS

第 1 章

多项式插值法

1.1 插值法

如果有人给出 4 组数据如下：

x	y
1.0	0.000
2.0	0.693
3.0	1.099
4.0	1.386
⋮	⋮

请问当 $x=1.5$ 时，y 应该是多少？上表 $x=1.5$ 的位置是在 $x=1.0$ 与 2.0 之内，因此，求得 $x=1.5$ 所对应的 y 值问题的解决方法称做插值法。再举一例，下面是美国的全国人口普查数据：

年份	人口（$\times 10^3$）
1930	123,203
1940	131,669
1950	150,697
1960	179,323
1970	203,212
1980	226,505

请问 1965 年全美人口有多少？1965 年位于 1960 年与 1970 年之间，因此，解决这种问题的方法称作插值法。如果往外推论，2000 年与 1920 年之间全美人口有多少？解决这种问题，则称作外推法。日常生活中常会遇到需要用插值法或外推法去解决自己认为重要的问题，这部分就是本章所要详细探讨的主题。

1.2 多项式插值法的概念

什么是多项式？一般有关函数论或微积分的书上把下面的表示式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{1-1}$$

称做 x 的多项式，此处的 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 a 是已知数，n 是已知的正整数。若把上面式(1-1)写成

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{1-2}$$

则 $f(x)$ 称做多项式函数。

如果再用 y 代表因变量，然后把式(1-2)改写成

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

则称 x 为多项式函数的自变量，而 y 称做 x 的函数。相信略知一点函数理论的读者一定能懂这些道理。

什么是多项式插值法呢？以前面已知 4 组数据即已知 xy 坐标系统上的 4 点为例：

$$i = 0, x_0 = 1.0 \Rightarrow y = f(1.0) = 0.000$$
$$i = 1, x_1 = 2.0 \Rightarrow y = f(2.0) = 0.693$$
$$i = 2, x_2 = 3.0 \Rightarrow y = f(3.0) = 1.099$$
$$i = 3, x_3 = 4.0 \Rightarrow y = f(4.0) = 1.386$$

是否可以找到一条线(曲线或直线)同时通过上面这 4 点，如图 1-1 所示。

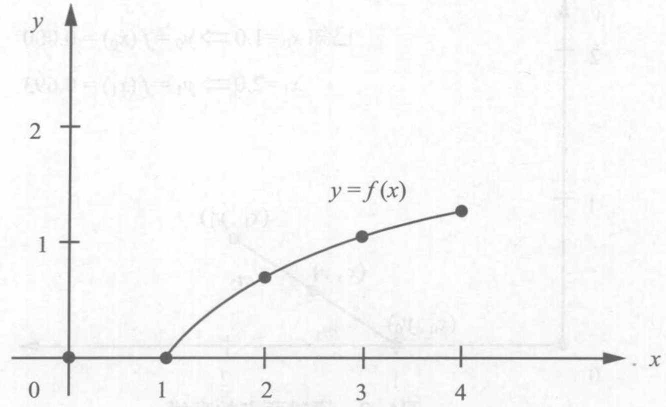


图1–1　一条线同时通过4点

解析几何告诉我们，两点可以确定一条直线，但是同时经过相同的两点的曲线则有很多条。由于光凭上面的 4 点

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$$

的数据，无法确定 $f(x)$ 与 x 的函数关系，但是，可以找到多项式 $f(x)$ 同时通过上面已知的 4 点，可以计算 4 点内的任何 x 值与其相对应的 $y = f(x)$ 的值，如 $x = 1.5 \Rightarrow f(1.5) = ?$ 的插值法与 $x = 4.5 \Rightarrow f(4.5) = ?$ 的外推法。因此，设法找到同时通过已知 n 点的多项式 $f(x)$，同时它用来推算其内的任何未知点的 $f(x)$ 值，这种方法称作多项式插值法。同理，用 $f(x)$ 去推算已知点的外面的任何一点的 $f(x)$ 值的方法可以称作多项式外推法。

1.3 Lagrange 插值法的公式

还没有正式提出数学家 Lagrange 先生的插值法算法之前，先请参考下面例子。

◆ **例题1–1**　若已知平面上两点坐标如下：

x	$y = f(x)$
1.0	0.000
2.0	0.693

请问若 $x = 1.5$，则 $f(x) = ?$

➢ **解：**

由于已知两点的坐标位置，则可以确定通过两点的直线如图 1–2 所示。

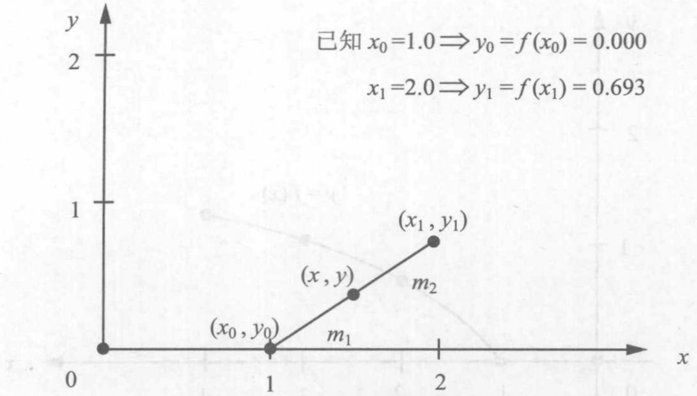


图1-2　通过两点的直线

若在 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$ 之间随便取一未知点 (x, y)，则因为一直线的任何部分的斜率一定相同之故：

因为
$$m_1 = m_2 = m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

设内插点的 $y = P(x)$ 经过整理，则

$$\Rightarrow y = P(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1)$$

把　$x_0 = 1.0, f(x_0) = 0.000$
　　$x_1 = 2.0, f(x_1) = 0.693$

分别代入 $y = P(x)$

$$\Rightarrow y = P(x) = \left(\frac{x - 2.0}{1.0 - 2.0}\right) \times 0 + \left(\frac{x - 1.0}{2.0 - 1.0}\right) \times 0.693$$

一旦找到通过 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$ 两点的直线方程式，则可计算 $1.0 < x < 2.0$ 的任何 $P(x)$ 的值，因此

$$P(1.5) = \left(\frac{1.5 - 1.0}{2.0 - 1.0}\right) \times 0.693 = 0.3465$$

这种方法称作线性插值法。假设 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$ 两点之间的 x 与 $P(x)$ 的关系是线性，当把两点间的线性关系写成

$$P(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1) \tag{1-3}$$

时，它就是Lagrange先生的多项式插值法的特例。它保证一定能通过 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$ 两点。例如，设 $x = x_0$，则

$$P(x = x_0) = \cancelto{1}{\frac{(x_0 - x_1)}{(x_0 - x_1)}} f(x_0) + \cancelto{0}{\frac{(x_0 - x_0)}{(x_1 - x_0)}} f(x_1)$$

因此，$P(x = x_0) = f(x_0)$，同理，$P(x = x_1) = f(x_1)$。

◆ **例题1-2**　若已知平面上三点的坐标如下：

i	x_i	$y = f(x_i)$
0	1.0	0.000
1	2.0	0.693
2	3.0	1.099

请找出同时通过上面三点的多项式 $P(x)$，并且计算 $P(1.5)$ 的值=?

➢ **解：**

Lagrange依据通过两点的多项式的式(1-3)，推导出同时通过三点的多项式的公式如下：

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \tag{1-4}$$

如何证明上式一定会通过已知的三点呢？

$$x = x_0 \Rightarrow P(x = x_0) = \cancelto{1}{\frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}} f(x_0) + \cancelto{0}{\frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}} f(x_1) + \cancelto{0}{\frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}} f(x_2)$$

因此，$x = x_0 \Rightarrow P(x = x_0) = f(x_0)$

同理，$x = x_1 \Rightarrow P(x = x_1) = f(x_1)$

$x = x_2 \Rightarrow P(x = x_2) = f(x_2)$

很明白，式(1-4)一定会通过 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ 与 $(x_2, f(x_2))$ 三点。所以，式(1-4)的多项式 $P(x)$ 就是答案。现在把

$x_0 = 1.0 \Rightarrow f(1.0) = 0.000$

$x_1 = 2.0 \Rightarrow f(2.0) = 0.693$

$x_2 = 3.0 \Rightarrow f(3.0) = 1.099$

分别代入式(1-4)，得到

$$P(x) = \frac{(x-2.0)(x-3.0)}{(1.0-2.0)(1.0-3.0)} \times 0 + \frac{(x-1.0)(x-3.0)}{(2.0-1.0)(2.0-3.0)} \times 0.693 + \frac{(x-1.0)(x-2.0)}{(3.0-1.0)(3.0-2.0)} \times 1.099$$

$$P(1.5) = \frac{(1.5-1.0)(1.5-3.0)}{(2.0-1.0)(2.0-3.0)} \times 0.693 + \frac{(1.5-1.0)(1.5-2.0)}{(3.0-1.0)(3.0-2.0)} \times 1.099$$

$$\Rightarrow P(1.5) = 0.3824$$

◆ **例题1-3** 请推导通过 n 点的Lagrange插值法的公式，并且写出通过下面4点的Lagrange插值法的公式以及计算 $P(1.5) = ?$

$$(1,0.0),(2,0.693),(3,1.099),(4,1.386)$$

➢ **解：**

根据通过 n 点的多项式的基本原则，按照式(1-4)

$$\begin{aligned} P(x) = &\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots(x_0-x_n)} f(x_0) + \\ &\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} f(x_1) + \\ &\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} f(x_2) + \\ &\vdots \\ &\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})} f(x_n) \end{aligned} \tag{1-5}$$

仔细观察 $P(x)$ 的等号右边每一项的有理式(rational expression)，我们可以把式(1-5)写成通式：

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x) f(x_k) \tag{1-6}$$

式(1-6)的 $L_{n,k}(x)$ 的定义如下：

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i},\quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

$$= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

细读上式发现通过$n+1$点所需的$P(x)$是一元n次多项式(最多是n次)，请读者务必要熟悉式(1-6) $P(x)=\sum_{k=0}^{n}L_{n,k}(x)f(x_k)$的表达方式，因为，当已知的点数$n+1$变大时，用笔算已经不切实际，一定要设计计算机程序取代令人心烦的笔算达成计算内插于

$$x_0 < x < x_n$$

中与之相对应的$P(x)$的任何值时算法的编写。然而，基本原理的笔算若不清楚，冒然设计计算机语言的程序上机肯定要乱成一团而得不到正确答案。

$$P(x=1.5)=\sum_{k=0}^{3}L_{3,k}(x)f(x_k)$$

$$\Rightarrow P(1.5)=\frac{(1.5-2.0)(1.5-3.0)(1.5-4.0)}{(1-2)(1-3)(1-4)}\times 0.0+$$

$$\frac{(1.5-1.0)(1.5-30)(1.5-4.0)}{(2.0-1.0)(2.0-30)(2.0-4.0)}\times 0.693+$$

$$\frac{(1.5-1.0)(1.5-2.0)(1.5-4.0)}{(3.0-1.0)(3.0-2.0)(3.0-4.0)}\times 1.099+$$

$$\frac{(1.5-1.0)(1.5-2.0)(1.5-3.0)}{(4.0-1.0)(4.0-2.0)(4.0-3.0)}\times 1.386$$

$$\Rightarrow P(1.5)=0.3929$$

1.4 Lagrange 插值法的算法与 C 语言程序

本节的重点在于，如何把笔算的 Lagrange 插值法的公式转换成适合任何高级计算机程序语言如 FORTRAN，Pascal，Visual Basic 或 C 语言的算法?

作者假定读者已经学会基本的高级计算机程序语言中的任何一种，而且要细心读懂下面所提供的解题算法。Lagrange 插值法的算法已知条件如下：

(1) $(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),\cdots,(x_n,f(x_n))$。

(2) n点的n。

(3) 所要进行内插的点x_a。

(4) Lagrange插值法的公式。

Lagrange插值法的算法流程图如图1-3所示。

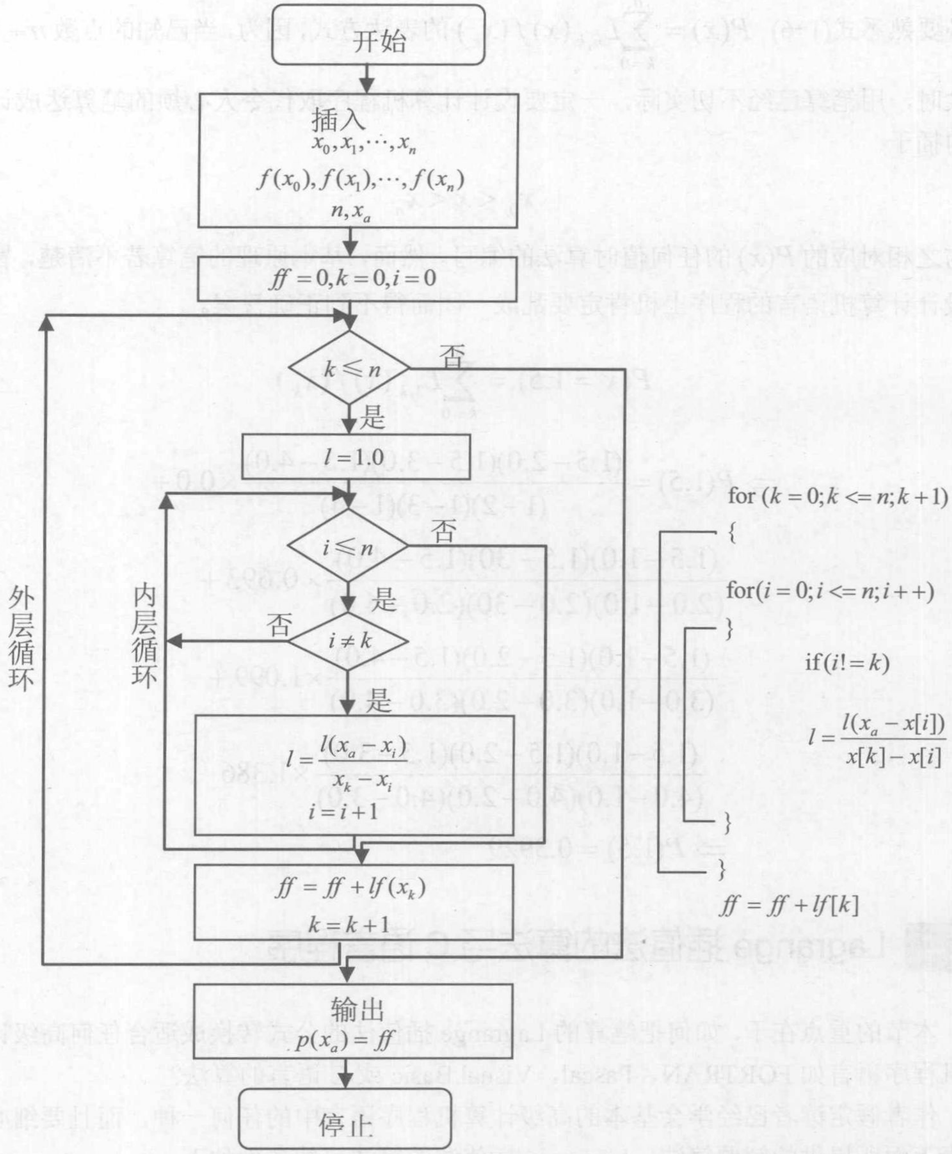


图1-3　Lagrange插值法的算法流程图

◆　**例题1-4**　请用自己熟悉的高级计算机程序语言如FORTRAN，Pascal，Basic或C，依Lagrange插值法的算法设计程序，若已知满足 $f(x) = \log_e x = \ln x$ 的数据如下：

x	$f(x)$
1.0	0.0
2.0	0.693
3.0	1.099
4.0	1.386

(a)

x	$f(x)$
1.0	0.000
1.2	0.182
1.4	0.336
2.0	0.693

(b)

x	$f(x)$
1.0	0.000
1.2	0.182
1.7	0.531
2.0	0.693
2.2	0.788
2.7	0.993
3.0	1.099
3.2	1.163
3.7	1.308
4.0	1.386

(c)

请分别使用上面(a)(b)(c)的已知点的数据计算 $P(1.5)$ 的值，并且分别比较真实的 $f(1.5)=\ln 1.5=0.405$ 之后，讨论结果。

➢ 解：

```
/* ex1-4.c: Lagrange Interpolation Algorithm
 *Read in data file of ex1-4.dat which has n point values
 *and the value of interpolating point xa. Based on Lagrange
 *Interpolation algorithm to compute f(xa) and output its value.
 *(x[i],f[i]): given points and n+1 are number of points
 *Ln,k(x)=1=summation of (x-x[i])/(x[k]-x[i]).
 *P(x)=ff=L(x)*f(x[k])
 */
#include <stdio.h>
```