高等职业教育“十一五”规划教材

Mathematics

21世纪高职高专财经类规划教材

经济数学基础
——微积分及应用

▪ 谭绍义 主编

▪ 卢惠萍 冯所伟 田飞 副主编

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

高等职业教育“十一五”规划教材

21世纪高职高专财经类规划教材

经济数学基础
——微积分及应用

▪ 谭绍义 主编

▪ 卢惠萍 冯所伟 田飞 副主编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础．微积分及应用 / 谭绍义主编．-- 北京 : 人民邮电出版社，2010.10
21世纪高职高专财经类规划教材
ISBN 978-7-115-23675-3

Ⅰ．①经… Ⅱ．①谭… Ⅲ．①经济数学－高等学校：技术学校－教材②微积分－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ．①F224.0②O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第170300号

内 容 提 要

本书根据当前高职高专教育教学改革的需要而编写，主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及应用，附录中借助数学软件 Matlab 编入了与本书配套的简单的数学实验指导。本书尽量舍弃以往高等数学教材中抽象晦涩的专业符号表示，代之以简练准确的文字描述，一些定理的证明也尽量给出直观的解释。在内容的编排上做到前呼后应，在一些内容的组织和阐述上有所创新，教材按照学生的认知规律，在提高学生学习数学的兴趣、培养学生科学的思维方式和应用意识上做了新的尝试，知识点、例题、习题前后对应，便于老师教学，也便于学生的学习，使学生打好基础并提高他们的全面素质。

本书可供高职高专经济与管理类学生使用，也可作为经济工作者的参考用书。

高等职业教育“十一五”规划教材
21 世纪高职高专财经类规划教材
经济数学基础——微积分及应用

◆ 主　　编　谭绍义
副 主 编　卢惠萍　冯所伟　田　飞
责任编辑　武恩玉

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：12.75　　　　2010 年 10 月第 1 版
字数：208 千字　　　2010 年 10 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-23675-3

定价：24.00 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

Preface

经济数学是高职高专院校经济与管理类专业的重要基础课，而目前国内适合于高职高专教学使用的比较成熟的经济数学教材非常匮乏，教材建设落后于高职高专教育改革发展的需要。根据高职高专院校人才培养目标与教育教学改革需要，以及高教司［2000］19 号文《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》与教育部［2006］16 号文《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》，作者以就业为导向，以培养社会主义现代化建设高素质技能型专门人才为目标，走产学相结合的发展道路；立足于高职高专教育教学改革的前沿，我们组织编写了本教材．本教材是在作者多年讲授经济数学课程与科研实践的基础上，根据高职高专院校经济与管理类专业的特点，并汲取了国内外高职高专院校数学教育教学改革的成功经验，又注意到新的数学思想和现代化的教学手段的应用凝练而成的．本书有以下特点．

（1）注重基本知识、数学素养、数学能力、应用和求知创新的总体思想，叙述概念清晰、例题丰富而又贴近现代实际生活，符合高职高专现代教育教学改革的特点；每一章开头都有案例作为导入，最后用所学知识对案例进行分析与解答，为读者展现了数学来源于实践又服务于实践的基本原理．

（2）本书在编写过程中，立足于高职特色，本着学以致用的原则，将高等数学知识进行了必要的整合，使内容模块化、系统化；使高等数学的知识更加紧凑，条理更清晰；以讲清概念，突出实用为重点，以技能训练为主线，让读者通过本课程的学习，使自己在数学思维方法上有所收获，有所提高．

（3）本书采用“实例教学法”编写，由实例引入高等数学的知识，再将高等数学知识应用到各种实际问题中；用大量的实例反映高等数学知识在人们的实际生活与工作中的应用，加深学生对高等数学知识的理解和掌握．作者充分考虑到高职高专学生的特色及数学基础，在处理复杂的高等数学计算时，介绍了 Matlab 的使用，以帮助学生更好地理解高等数学的相关概念、理论及计算机的应用．

本书共 5 章，内容包括：函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分与

定积分、线性代数及 Matlab 简介．本书适合于高职高专院校经济与管理类各专业学生学习，也可以作为经济工作者的自学参考用书．

本书前 4 章教学课时应不少于 56 课时，第 5 章与 Matlab 软件介绍应另安排课时．

本书在编写过程中，参考了大量的相关资料，并得到人民邮电出版社的大力支持和帮助，也得到了海南经贸职业技术学院教务处及公共教学部领导的支持和指导．参加本书编写的有谭绍义、卢惠萍、冯所伟、田飞，在此一并深表谢意．

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正．欢迎继续交流讨论提出建议，编者邮箱：hnjmsx@163.com.

编　者

2010 年 6 月

目录

Contents

第 1 章　函数与极限

案例

据某城市 2009 年末所做的统计资料显示，到 2009 年末，该城市堆积的垃圾已达到 50 万吨，侵占了大量土地，并成为造成环境污染的因素之一，根据预测，从 2010 年起该城市还将以每年 3 万吨的速度产生新的垃圾，垃圾资源化和回收已成为城市建设中的重要问题.

（1）假设 1999 年底该城市的垃圾为 10 万吨，从 2000 年到 2009 年这 10 年中，该城市每年产生的新垃圾以 8%的年增长率增长，试求 2000 年该城市又产生的新垃圾有多少万吨？（结果保留两位小数）

（2）如果从 2010 年起，该城市每年处理上年堆积的垃圾的 20%，现用 b_1 表示 2010 年底该城市堆积的垃圾数量，b_2 表示 2011 年底该城市堆积的垃圾数量，…，b_n 表示 2009+n 年底该城市堆积的垃圾数量，求 b_n 的表达式，而且计算 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 并说明其实际意义.

经济数学是研究经济领域中数量关系与优化规律的科学．微积分是基础，而微积分研究的对象是函数，主要是初等函数，研究的主要工具是极限.

微积分中最重要的概念是导数、微分、不定积分和定积分，最重要的运算是求导数与求不定积分.

而微积分的精髓是：在变化中考察变量之间的关系．可以说，没有变化就没有微积分，因此，必须以变化的观点学习微积分.

§1.1　函数的概念与基本性质

§1.1.1　函数的有关概念

定义 1　已知变量 x 与 y，当变量 x 任取一个属于某个非空实数集的数值时，若

变量 y 符合对应规则 f 的取值并且恒为唯一确定的实数值与之对应，则称对应规则 f 表示变量 y 为 x 的函数，记为

$$y=f(x)$$

x 的取值范围称为函数的**定义域**，y 的取值范围称为函数的**值域**.

对应规则和定义域称为函数的两要素．两个函数只有两个要素完全相同时才是相同的函数．要深刻理解符号 $f()$，它具有广泛的含义，它可以表示一个或几个解析式，也可表示一张表格或一个图形，总之它反映变量之间的相依关系．

函数 $y=f(x)$ 的图形，是指平面 D 内的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$，一般是一条曲线或分段曲线．函数和其图形是一一对应的．

定义 2　已知函数 $y=f(x)$，从表达式 $y=f(x)$ 出发，经过代数恒等变形，将变量 x 表示为 y 的表达式，若这个对应规则表示变量 x 为 y 的函数，则称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y)$$

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示函数，因此函数 $y=f(x)$ 的反函数表示为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 是互为反函数，它们的定义域与值域互相交换，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称．

比如：$y=2^x$ 的反函数为 $y=\log_2 x$，$y=\sin x$ 的反函数为 $y=\arcsin x$ 等．

定义 3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$ 且 $f(u)$ 的定义域 $D(f)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的值域 $R(\varphi)$ 的关系为 $D(f)\cap R(\varphi)\neq\Phi$，则可确定函数 $y=f[\varphi(x)]$，称其为由 f、φ 构成的复合函数（函数的函数），u 称为中间变量．

如 $y=a^x\ (0<a\neq1)$，$x=\sin t$，则构成复合函数 $y=a^{\sin t}\ (0<a\neq1)$．而 $y=f(u)=\arcsin u$ 与 $u=\varphi(x)=\sqrt{x^2+2}$ 就不能构成复合函数．因为 $D(f)=[-1,1]$，$R(\varphi)=[\sqrt{2},+\infty)$，$[-1,1]\cap[\sqrt{2},+\infty)=\Phi$．

复合函数还可以由多个函数复合而成．如 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin v$，$v=x^2$ 复合成 $y=\mathrm{e}^{\sin x^2}$，u、v 为中间变量．学习函数要学会复合，反之，也要学会对复合函数的分解，后者更为重要．

§1.1.2　函数的表示法

函数的常用表示方法有 3 种：

（1）公式法（也叫解析法）：是把自变量和因变量之间的对应关系用数学式子表

示的方法．如 $y=x^2+1$， $y=e^x$， $y=x+\ln x$ 等．

（2）表格法：将部分的自变量取值与对应的函数值用列表来表示函数关系的方法．如对数表、三角函数表等各种数学用表．

（3）图示法：用相应坐标平面上的图形来表示函数关系的方法．通常是用曲线来表示，如某地某日 24 小时温度变化曲线，就是时间 t 与温度 C 之间的图示法表示．

为便于理论分析和直观地反映函数性质，有时较多地结合使用公式法和图示法．

例 1 某商场 2010 年第一季度各月服装的零售量（套）如下表：

月份 t	1	2	3
零售量 s（套）	101	120	65

上表表示了该商场 2010 年第一季度月零售量 s 与月份 t 之间的函数关系．

§1.1.3 函数的基本性质

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，区间 $I\subseteq D(f)$．若对任意的 x_1， $x_2\in I$，且 $x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的，反之若都有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的．函数单调增加或单调减少统称为函数的单调性．

单调增加函数 y 随自变量 x 的增大而增大，函数的图形由低到高；单调减少函数 y 随自变量 x 的增大而减少，图形由高到低．

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 是关于原点对称的．如果对于任一 $x\in D(f)$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数，其图形关于 y 轴对称；如果对任一 $x\in D(f)$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，其图形关于原点对称．

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$， $x\in D(f)$．如果存在正数 M 使得对一切 $x\in D(f)$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$ 在 $x\in D(f)$ 内有界．如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$ 在 $x\in D(f)$ 内无界．

4. **周期性**

设函数 $y = f(x)$，$x \in D(f)$．如果存在常数 $T \neq 0$，使得对任何 $x \in D(f)$，都有 $x+T \in D(f)$，且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数．满足上式的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期，本书中如无特殊交代，函数的周期就专指它的最小正周期．周期函数在每一个周期内的图形相同．

§1.1.4 基本初等函数的性质与图形

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数．

1. **幂函数**

函数 $y = x^{\alpha}(\alpha \in \mathbf{R})$ 称为幂函数．如 $y = x$，$y = x^2$，$y = \sqrt{x}$，$y = x^{-1}$，$y = x^{\frac{1}{2}}$，等，都是幂函数．$y = x^{\alpha}(\alpha \in \mathbf{R})$ 没有统一的定义域，定义域由 α 值确定．如：$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$；$y = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．但在 $(0,+\infty)$ 内 $y = x^{\alpha}(\alpha \in \mathbf{R})$ 总是有定义的，且都经过点（1,1）．当 $\alpha > 0$ 时，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，当 $\alpha < 0$ 时，函数在 $(0,+\infty)$ 内是单调减少的．下面给出几个常用的幂函数：$y = x$，$y = x^{\frac{1}{2}}$，$y = x^2$，$y = x^{-1}$，$y = x^{-\frac{1}{2}}$，$y = x^{-2}$ 的图形，如图 1-1、图 1-2 所示．

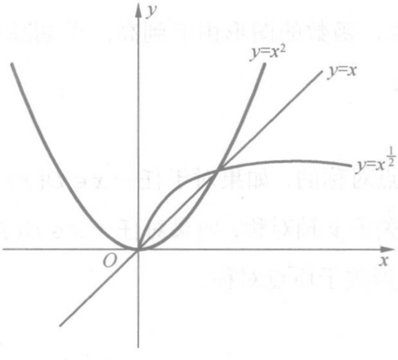

图 1-1

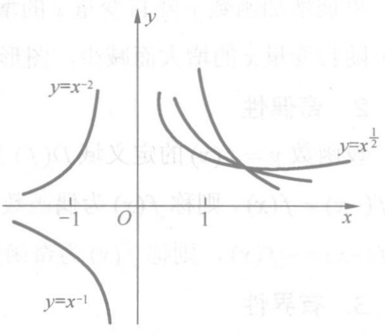

图 1-2

2. **指数函数**

函数 $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ 称为指数函数，定义域 $D(f) = (-\infty,+\infty)$，值域

$R(f)=(0,+\infty)$；当 $a>1$ 时函数为单调增加的；当 $0<a<1$ 时函数为单调减少的，曲线始终过点 $(0,1)$．高等数学中常用的指数函数是 a=e 时，即 $y=\mathrm{e}^x$．以下是 $y=2^x$ 与 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图形，如图 1-3 所示．

3. 对数函数

函数 $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1)$ 称为对数函数，其定义域 $D(f)=(0,+\infty)$，值域 $R(f)=(-\infty,+\infty)$．当 $a>1$ 时函数为单调增加的，当 $0<a<1$ 时函数为单调减少的，曲线始终经过点 $(1,0)$，图形都在直角坐标系的右半平面内．$y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ 互为反函数．当 a=e 时的对数函数 $y=\ln x$ 称为自然对数，当 $a=10$ 时，$y=\lg x$ 称为常用对数．以下是 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图形，如图 1-4 所示．

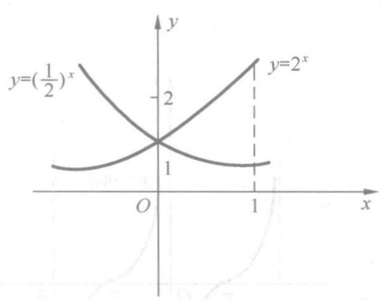

图 1-3

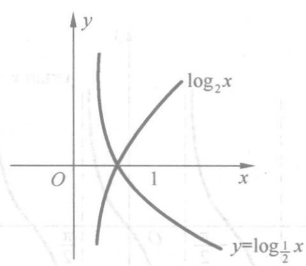

图 1-4

4. 三角函数

三角函数有 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$，它们都是周期函数．现对三角函数进行简要的叙述．

（1）正弦函数与余弦函数：$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，值域都是 $[-1,1]$．它们都是有界函数，周期都是 $T=2\pi$，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数．如图 1-5、图 1-6 所示．

（2）正切函数 $y=\tan x$，定义域 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty,+\infty)$．周期 $T=\pi$，在其定义域 $(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2})$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是单调增加的无界奇函数，如图 1-7

所示.

（3）余切函数 $y=\cot x$，定义域 $x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期 $T=\pi$．在定义域 $(k\pi,k\pi+\pi)\ (\mathrm{k}\in\mathbf{Z})$ 内是单调减少的无界奇函数，如图 1-8 所示.

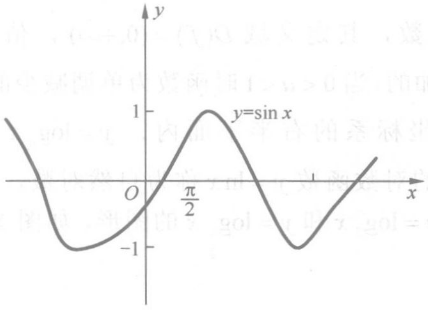

图 1-5

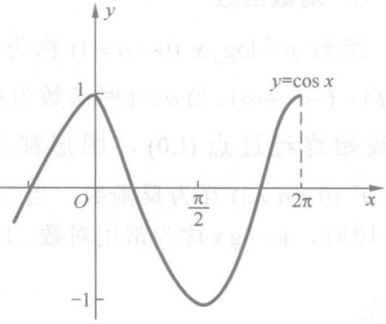

图 1-6

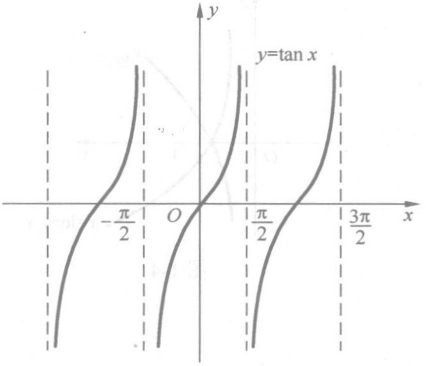

图 1-7

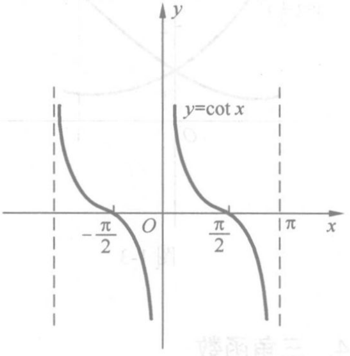

图 1-8

（4）正割函数 $y=\sec x$，定义域 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，是周期 $T=2\pi$ 的无界偶函数，如图 1-9 所示.

（5）余割函数 $y=\csc x$，定义域 $x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，是周期 $T=2\pi$ 的无界奇函数，如图 1-10 所示.

5. 反三角函数

（1）反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域 $x\in[-1,1]$，值域 $y\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$，且在其定义

域内是单调增加的有界奇函数，如图 1-11 所示．

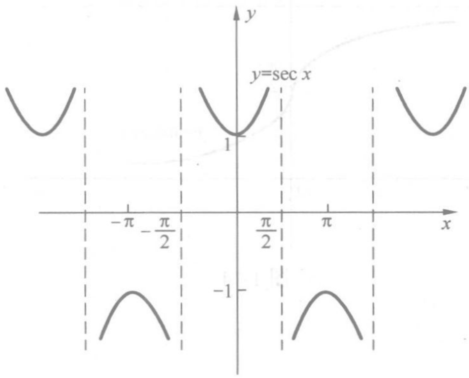

图 1-9

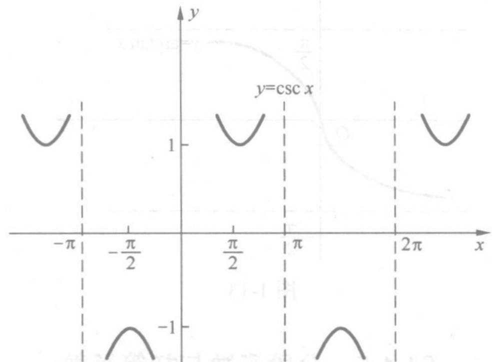

图 1-10

（2）反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，且在其定义域内是单调减少的有界非奇非偶函数，如图 1-12 所示．

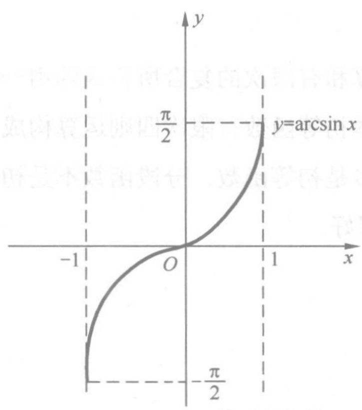

图 1-11

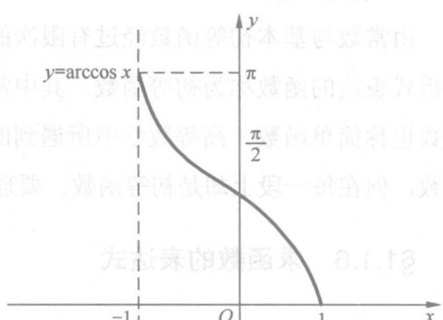

图 1-12

（3）反正切函数 $y=\arctan x$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，且在定义域内是单调增加的有界奇函数，如图 1-13 所示．

（4）反余切函数 $y=\operatorname{arc}\cot x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(0,\pi)$，且在其定义域内是单调减少的有界非奇非偶函数．如图 1-14 所示．

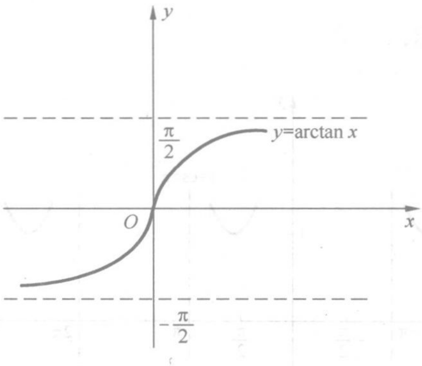

图 1-13

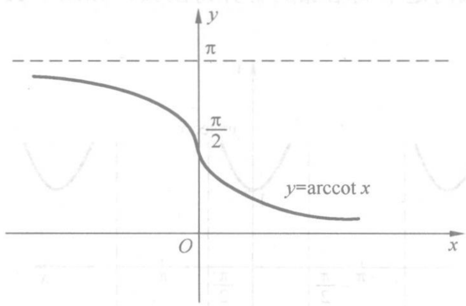

图 1-14

§1.1.5 分段函数与初等函数

1. 分段函数

已知函数定义域被分成有限个区间，若在各个区间上表示对应规则的数学表达式一样，但单独定义各个区间公共端点处的函数值；或者在各个区间上表示对应规则的数学表达式不完全一样，则称这样的函数为分段函数.

2. 初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成的用一个解析式表达的函数称为初等函数．其中常数与基本初等函数有限次四则运算构成的函数也称简单函数．高等数学中所遇到的函数大多是初等函数．分段函数不是初等函数，但在每一段上却是初等函数．要理解、掌握好.

§1.1.6 求函数的表达式

求函数表达式有两种方法.

1. 已知函数 $f(x)$ 与 $u(x)$，求复合函数 $f[u(x)]$ 的表达式

方法:（1）把 x 改为括号;（2）在括号内填上中间变量;（3）化简便得到 $f[u(x)]$.

2. 已知复合函数 $f[u(x)]$，求函数 $f(x)$ 的表达式

方法:（1）令中间变量 $u=u(x)$；（2）通过计算得到 $f(u)$；（3）把 u 换成 x .

例 2 求下列函数的定义域.

（1） $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$ ；

（2）$f(x)=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin[\ln(1-x)]$.

解　（1）函数的定义域为以下不等式组的解集：

$$\begin{cases}x>0,\\ \ln x\neq 0,\\ 16-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1,\\ -4\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 1,\\ 0<x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow 0<x<1\text{或}1<x\leqslant 4.$$

因此函数的定义域为：$(0,1)\cup(1,4)$.

（2）函数的定义域为以下不等式组的解集：

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ 1-x>0,\\ -1\leqslant\ln(1-x)\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ x<1,\\ \ln e^{-1}\leqslant\ln(1-x)\leqslant\ln e\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ x<1,\\ e^{-1}\leqslant 1-x\leqslant e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ x<1,\\ -e\leqslant x-1\leqslant -e^{-1}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ x<1,\\ 1-e\leqslant x\leqslant 1-e^{-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0\text{或}0<x<1,\\ 1-e\leqslant x\leqslant 1-e^{-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 1-e\leqslant x<0\text{或}0<x\leqslant 1-e^{-1}.$$

因此函数的定义域为$[1-e,0)\cup(0,1-e^{-1}]$.

例 3　求下列函数的定义域.

（1）若 $f(x)$ 的定义域是$[-4,4]$，求 $f(x^2)$ 的定义域；

（2）若 $f(x)$ 的定义域是$[0,3a]$ $(a>0)$，求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

解　（1）归结为解不等式：$0\leqslant x^2\leqslant 4$，

即$-2\leqslant x\leqslant 2$，因此 $f\left(x^2\right)$ 的定义域为$[-2,2]$.

（2）归结为解不等式组：

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 3a,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 3a,\\ a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 2a,\\ a\leqslant x\leqslant 4a,\\ a>0\end{cases}\Rightarrow a\leqslant x\leqslant 2,$$

因此 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为$[a,2a]$.

例 4　求 $f(x)$ 的表达式.

（1）已知 $f(\sin x)=\cos 2x$；

（2）已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=4x-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

解　（1）由已知得 $f(\sin x)=1-2\sin^2 x$，故 $f(x)=1-2x^2$.

（2）**方法一**　令 $\frac{1}{x}=u$，则 $x=\frac{1}{u}$，代入原函数式，得

$$f(u)=4\cdot\frac{1}{u}-\sqrt{1+u^2}，即 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{x}-\sqrt{1+x^2} .$$

（注意：$f(\ )$ 的表达式与所用的字母符号没有关系）.

方法二　也可直接凑成 $f(\frac{1}{x})$ 的表达式：

由已知得 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$，

再将 $\frac{1}{x}$ 换成 x，得 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{x}-\sqrt{1+x^2}$.

例 5　已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1-x}{1+x}$，求复合函数 $f(f(x))$.

解　把 x 改为括号得

$$f(\ )=\frac{1-(\ )}{1+(\ )},$$

在括号内填上中间变量得

$$f(f(x))=\frac{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}=x .$$

例 6　求下列函数的反函数：

（1）$y=-\sqrt{x-1}$；　　　　　（2）$y=1+\ln(x+2)$.

解　（1）由 $y=-\sqrt{x-1}$，解出 $x=y^2+1$，

因为 $x\geqslant1, y\leqslant0$，所以反函数为 $y=x^2+1, x\in(-\infty,0]$.

（2）由 $y=1+\ln(x+2)$，

解出 $y-1=\ln(x+2)$，$x+2=\mathrm{e}^{y-1}$，$x=\mathrm{e}^{y-1}-2$，

因为 $x>-2, y\in(-\infty,+\infty)$，

所以反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2, x\in(-\infty,+\infty)$.

例 7 求下列函数值.

（1）若 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1\leqslant x<0,\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x<3,\end{cases}$，求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right), f(0), f(2)$.

（2）若 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$，求 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right), f\left(\dfrac{\pi}{4}\right), f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解 （1）因为 $-\dfrac{1}{2}\in[-1,0)$，所以 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $0\in[0,1)$，所以 $f(0)=\sqrt{1-0^2}=1$.

因为 $2\in[1,3)$，所以 $f(2)=2-1=1$.

（2）因为 $\left|\dfrac{\pi}{2}\right|>1$，所以 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$；又因为 $\left|\pm\dfrac{\pi}{4}\right|<1$，所以 $f\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 8 判断函数的奇偶性：

（1） $F(x)=x^2\cdot\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$；（2） $F(x)=x^2\sin(\cos x)$.

解 （1）**方法一** 依定义，有 $F(-x)=-F(x)$ 即为奇函数.

方法二 由 $f(x)=x^2$ 为偶函数，$g(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 为奇函数，

故 $F(x)=f(x)g(x)$ 为奇函数.

（2）类似（1）的方法可知 $x^2\sin(\cos x)$ 为偶函数.

例 9 函数 $y=|\sin 2x|$ 的周期是（　　）.

（A） 2π　　（B） 4π

（C） π　　（D） $\dfrac{\pi}{2}$

分析 因为 $f(x+\dfrac{\pi}{2})=|\sin 2(x+\dfrac{\pi}{2})|=|\sin(2x+\pi)|=|-\sin 2x|=f(x)$，故选 D.

例 10 函数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 是定义域内的（　）.

A．周期函数　B．单调函数　C．有界函数　D．无界函数

分析 因为 $|\cos x|\leqslant 1$，故选 C.