普通高等教育"十二五"规划教材

面向21世纪数学课程与教学改革系列教材

概率论与数理统计

邓泽清　陈海英　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

面向21世纪数学课程与教学改革系列教材

概率论与数理统计

邓泽清　陈海英　主编

科学出版社
北京

内容简介

本书内容简明，语言通俗，思路清晰，略去了一些烦琐、冗长的理论推导，增加了许多直观的几何解释和思想方法的阐述，这对于非数学专业学生是合适的. 本书将数学、应用、计算机相结合，拉近了数学与应用的距离，有利于提高学生应用数学知识解决实际问题的能力. 本书主要内容有：事件与概率、随机变量及其概率分布、二维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本与抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析简介（选学）等.

本书有广泛的适用性，可供高等院校学生非数学专业学生使用，也可供读者自学.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/邓泽清，陈海英主编. —北京：科学出版社，2014.7

普通高等教育“十二五”规划教材. 面向21世纪数学课程与教学改革系列教材

ISBN 978-7-03-041386-4

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①邓… ②陈… Ⅲ. 概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第154377号

责任编辑：吉正霞/责任校对：董艳辉 蔡 莹

责任印制：高 嵘/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2014年8月第 一 版 印张：11 1/4

2014年8月第一次印刷 字数：225 000

定价：25.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前言

概率论与数理统计是一门应用性极强的数学学科，它的应用涉及自然科学、社会科学、生命科学、经济学等，凡是从事相关领域工作的或多或少会因使用统计方法而受益. 但是，那些烦琐的理论推导和复杂的计算常常使学习这门课程的人望而却步. 如何消除学习中的畏难情绪，使更多的人更好地掌握这门课程的基础知识和思想方法，看得懂计算机给出的结果，并能对结果作出合理的解释，是从事这门课程教学的教师亟待解决的问题，也是我们编写本书的初衷.

本书的特点是：

(1) 本书在保留概率论、数理统计基本内容的基础上，本着重基础、重方法、重应用、重能力的精神，突出随机变量的分布与数字特征，突出抽样分布、参数估计、假设检验的思想方法.

(2) 本书将数学、应用、计算机相结合，对于每一种统计方法，都给出了 MATLAB 程序，拉近了数学与应用的距离，消除了因复杂计算产生的畏难情绪，让学生尽快熟悉用计算机解决实际问题的方法，提高学生应用数学知识解决实际问题的能力.

(3) 本书好教易学，内容简明，语言通俗，思路清晰，略去了一些烦琐、冗长的理论推导，增加了许多直观的几何解释和思想方法的阐述，这对于非数学专业本科学生是合适的.

(4) 本书精选例题、课后习题和综合练习题，其中例题、课后习题是为学生消化、巩固基础知识准备的，综合练习则是为学有余力的学生进一步加深对基础知识的理解，进一步熟悉本书的解题方法准备的，因此本书具有广泛的适用性.

(5) 考虑到学时和实际应用的原因，我们将两大统计方法"方差分析和回归分析"纳入选学内容. 我们将概率论与数理统计发展简史纳入附录 3，使学生了解概率论、数理统计的发生发展过程和应用的广泛性，希望能够激发学生学习本课程的兴趣和热情.

本书由邓泽清、陈海英主编，段春燕、谭劲英、许亮、庞亮、刘英华任副主编. 邓泽清教授编写了详尽的大纲，谭劲英博士负责编写全部的 MATLAB 程序，庞亮、

许亮、刘英华负责第 1、2、5、6 章、附录常用数表的编写工作，段春燕、陈海英负责第 3、4、7～9 章、综合练习题及答案的编写工作. 由邓泽清教授、陈海英审阅全部书稿，并对本书的编写提出了许多宝贵的建设性的意见.

在本书出版之际，我们要感谢科学出版社的大力支持，感谢华中农业大学楚天学院的大力支持. 本书得到湖北省教改项目“独立学院数学建模与大学生实践创新能力培养研究 2012458”的大力支持.

由于编者水平所限，不足在所难免. 对书中的不妥之处，恳请读者批评、指正.

编　者

2014 年 6 月

目 录

第1章 事件与概率

本章主要内容有:样本空间与随机事件、频率与概率、等可能概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、事件的独立性.

1.1 样本空间与随机事件

1.1.1 随机试验

自然界和社会上发生的现象是多种多样的.有一种现象,在一定的条件下必然发生,这种现象称为**必然现象**.例如,"两个带有同性电荷的小球必然相斥""水在标准大气压下加热到100 ℃必然沸腾"都是必然现象.另一种现象,在一定条件下可能发生,也可能不发生,但在大量重复试验中呈现出某种规律性(称为**统计规律性**),这种现象称为**随机现象**.例如,抛一枚硬币,可能出现正面,也可能出现反面,如果在相同的条件下,将这枚硬币抛1000次,就会发现:大约出现了500次正面,500次反面,"出现正面""出现反面"都是随机现象.概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

概率论中,把观察随机现象的试验称为**随机试验**.随机试验具有如下特点:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的结果不止一个,并且事先知道试验的全部结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

例1.1.1 下面的试验都是随机试验:

(1) 抛一枚硬币,观察正面、反面出现的情况.

(2) 掷一枚骰子,观察出现的点数.

(3) 将一枚硬币抛 n 次,观察出现正面的次数.

(4) 观察一天内某交通路口通过的车辆数.

(5) 在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

(6) 记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

1.1.2 样本空间与随机事件的概念

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**,记作 Ω.样本空间的元素(试验结果)称为样本点.

例 1.1.2 例 1.1.1 中的随机试验的样本空间如下：

(1) 抛一枚硬币，Z 表示“出现正面”，F 表示“出现反面”，样本空间 $\Omega=\{Z,F\}$.

(2) 掷一枚骰子，i 表示“出现 i 点”，样本空间

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

(3) 将一枚硬币抛 n 次，i 表示出现 i 次正面，样本空间

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots,n\}.$$

(4) 观察一天内某交通路口通过的车辆数，i 表示“一天内该交通路口通过 i 辆车”，样本空间

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}.$$

(5) 在一批灯泡中任意抽取一只，t 表示它的寿命，样本空间

$$\Omega=\{t|t\geqslant 0\}.$$

(6) 记录某地一昼夜的最高温度和最低温度，x 表示最高温度，y 表示最低温度，并设这一地区的温度不小于 T_1，不大于 T_2，样本空间

$$\Omega=\{(x,y)|T_1\leqslant y\leqslant x\leqslant T_2\}.$$

样本空间的子集称为**随机事件**，简称**事件**．事件通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示．只含一个样本点的单点集称为**基本事件**．

若 A 中的一个样本点出现，则称事件 A 发生．例如，掷一枚骰子，A 表示“掷出偶点数”，则 $A=\{2,4,6\}$；若出现 2 点、4 点、6 点中的一个，事件 A 发生，即掷出了偶数点．

样本空间 Ω 包含所有的样本点，每次试验它总是发生的，我们把样本空间 Ω 称为**必然事件**，空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，每次试验它都不发生，我们把空集 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.

1.1.3 事件的关系与运算

事件是一个集合（样本空间的子集），事件的关系对应集合的关系，事件的运算对应集合的运算．将集合的关系和运算赋予概率论名称和含义，就得到事件的关系和运算．

(1) 若 $A\subset B$，则称事件 A 包含于事件 B 或 A 是 B 的**子事件**，它表示“事件 A 发生必导致事件 B 发生”．

(2) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(3) 事件 $A\cup B$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，它表示“事件 A 与事件 B 至少发生一个”．

类似地，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，它表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少发生一个.

(4) 事件 $A \cap B$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，它表示“事件 A 与事件 B 同时发生”. A 与 B 的积事件也记为 AB.

类似地，$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，它表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生.

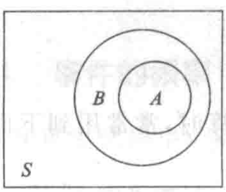
(5) 事件 $A - B$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，它表示“事件 A 发生，但事件 B 不发生”.

(6) 若 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容**或者**互斥**，它表示“事件 A 与事件 B 不能同时发生”.

(7) 事件 $\bar{A}$ 称为 A 的**逆事件**或者**对立事件**，它表示事件“A 不发生”. 显然，

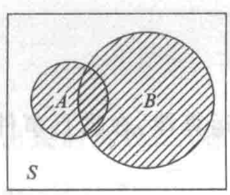
$$A \cup \bar{A} = \Omega, \quad A \cap \bar{A} = \varnothing.$$

请读者将概率论中事件的关系和运算与集合论中集合的关系和运算列表加以对照. 事件的关系和运算可以通过集合的图形（图 1.1.1 至图 1.1.6）直观地表示.



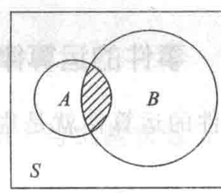
$A \subset B$

图 1.1.1



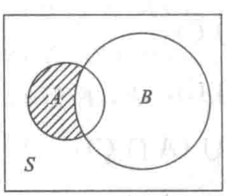
$A \cup B$

图 1.1.2



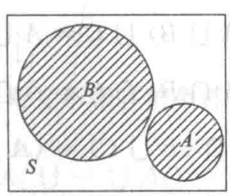
$A \cap B$

图 1.1.3



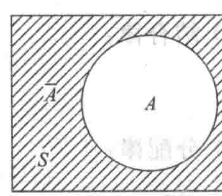
$A - B$

图 1.1.4



$A \cap B = \varnothing$

图 1.1.5



$A \cup \bar{A} = S, A \cap \bar{A} = \varnothing$

图 1.1.6

例 1.1.3　假设一个系统 A 由三个子系统 A_1, A_2, A_3 组成. 当三个子系统 A_1, A_2, A_3 都正常工作时，系统 A 才正常工作，这种系统称为串联系统（图 1.1.7），当三个子系统 A_1, A_2, A_3 中有一个正常工作时，系统 A 就正常工作，这种系统称为并联系统（图 1.1.8）.

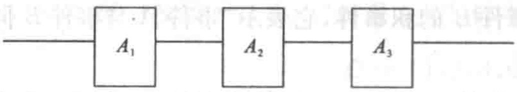


图 1.1.7

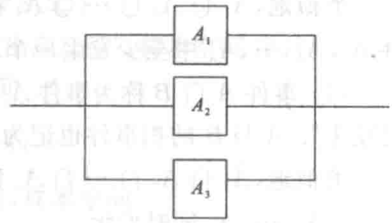


图 1.1.8

若 A 表示系统 A 正常工作，A_1，A_2，A_3 分别表示子系统 A_1，A_2，A_3 正常工作. 在串联系统中，$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. 在并联系统中，$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

我们还可以用事件的运算表示各种各样的复杂系统，例如，图 1.1.9 表示的系统（混联系统）中，$A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$.

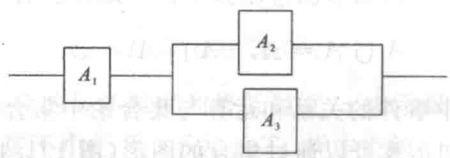


图 1.1.9

1.1.4 事件的运算律

事件的运算律就是集合的运算律，在进行事件的运算时，常常用到下面的运算律.

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$,

$A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3) 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) 对偶律（德·摩根律）：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$，$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

对偶律可以推广到有限个事件的情形：

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n,$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n.$$

例 1.1.4 向指定目标射击三枪，A_i 表示"第 i 枪击中目标"，试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1) 只击中第一枪；

(2) 只击中一枪；

(3) 三枪都没击中；

(4) 至少击中一枪；

(5) 至多击中一枪.

解 (1) 只击中第一枪：$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

(2) 只击中一枪：$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

(3) 三枪都没击中：$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$（注意：三枪都没击中不能表示成$\overline{A_1A_2A_3}$，由对偶律知，$\overline{A_1A_2A_3} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$，即$\overline{A_1A_2A_3}$ 表示至少有一枪没有击中）.

(4) 至少击中一枪：$A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(5) 至多击中一枪：$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

1.2 频率与概率

1.2.1 事件的频率

n 次重复试验中，事件 A 出现的次数 n_A（称为频数）与试验次数 n 的比值 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 的频率.

事件的频率具有如下性质：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) $f_n(\varnothing)=0, f_n(\Omega)=1$；

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i).$$

事件 A 的频率是它出现的次数与试验次数之比，其大小表示事件 A 发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 发生就越频繁，它在一次试验中发生的可能性就越大. 为了弄清频率与事件发生可能性大小的关系，许多人做过抛硬币的试验，表 1.2.1 列出了三组试验的统计数据，其中 n 表示试验次数，n_Z 表示出现正面的次数，$f_n(Z)$ 表示出现正面的频率.

表 1.2.1

试验次数	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
试验序号	n_Z	$f_n(Z)$	n_Z	$f_n(Z)$	n_Z	$f_n(Z)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512

不难发现，当试验次数 n 较小时，事件 Z 的频率 $f_n(Z)$ 的波动幅度较大，随着试验次数的增加，事件 Z 的频率 $f_n(Z)$ 的波动幅度逐渐减小，其值在一个确定的常数 0.5 附近摆动，频率的这种性质称为频率的稳定性. 由于频率的稳定性是通过大量的试验数据的统计显示出来的，所以称为统计规律性.

将抛硬币试验中发现的规律性加以推广，就得到概率的**统计定义**.

1.2.2 概率的统计定义

定义 1.2.1 在重复试验中，当试验的次数 n 充分大时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在一个常数 p 附近摆动，则称数 p 为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

概率的这种定义，称为概率的统计定义，统计定义是以试验为基础的，其中的频率与试验有关，但事件的概率是客观存在的，与试验无关. 例如，抛一枚均匀的硬币，无论试验与否，它出现正面的概率都是 0.5. 概率的统计定义是描述性的，一般不能用来计算事件的概率. 但是，当试验次数 n 充分大时，常常以事件的频率作为事件概率的近似值.

例 1.2.1 从一批产品中任取一件进行检验，A 表示“检验为次品”，将此试验重复 100 次，其中 10 次检验为次品，A 的频率 $f_n(A)=\frac{10}{100}=0.1$，由概率的统计定义知，$A$ 的概率 $P(A)\approx f_n(A)=0.1$，即这批产品的次品率大约为 0.1.

例 1.2.2 如果事件 A 的概率 $P(A)=0.05$，在 100 次试验中，事件 A 大约发生 5 次，那么在一次试验中事件 A 几乎是不可能发生的，由此人们总结出一条经验：概率很小的事件在一次试验中几乎不可能发生. 这条经验称为**实际推断原理**或**小概率原理**.

1.2.3 概率的基本性质

由频率的稳定性和频率的性质可以得到概率的三条基本性质：

(1) **非负性** 对于每一个事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) **规范性** 对于必然事件 Ω，$P(\Omega)=1$；

(3) **可列可加性** 设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

如果对于随机试验中的每一个事件 A，有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且 $P(A)$ 满足三条基本性质，则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

概率的这种定义，称为概率的公理化定义.

由概率的基本性质，可以推出概率的其他性质.

(1) $P(\varnothing) = 0$；

(2) 若 A，B 互斥，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

以上性质可以推广到有限个事件的情形.

若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互斥，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

这条性质称为有限可加性.

(3) **逆事件概率公式**　$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

证　由 $A\bar{A} = \varnothing$，$A \cup \bar{A} = \Omega$，得 $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega)$，即 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$，故 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

当一个事件较为复杂时，其对立事件往往是简单事件，因此，我们常常将一个事件的概率计算转化为它的对立事件的概率计算.

(4) **差事件概率公式**.

$$P(B - A) = P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB).$$

特别地，若 $A \subset B$，则

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \quad P(B) \geqslant P(A).$$

(5) **加法公式**.

对任意两个事件 A，B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证　由图 1.2.1 知，$A \cup B = A \cup (B - A)$，$A \cap (B - A) = \varnothing$，故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

以上性质可以推广到多个事件的情形. 例如，对任意三个事件 A，B，C，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

公式右边的特点是:加上所有奇数个事件的积的概率,减去所有偶数个事件的积的概率.

根据"加奇减偶"的特点,我们可以写出有限个事件的加法公式.

例 1.2.3 设事件 A,B 的概率分别为 0.2 和 0.3,试就下列三种情形求 $P(B-A)$:

(1) A 与 B 互斥;

(2) $A \subset B$;

(3) $P(AB) = 0.1$.

解 $P(B-A) = P(B) - P(AB)$.

(1) 由 $AB = \varnothing$,得

$$P(B-A) = P(B) - P(\varnothing) = 0.3 - 0 = 0.3.$$

(2) 由 $A \subset B$,得 $AB = A$,故

$$P(B-A) = P(B) - P(A) = 0.3 - 0.2 = 0.1.$$

(3) $P(B-A) = 0.3 - 0.1 = 0.2$.

1.3 等可能概型

1.3.1 古典概型

如果一个试验具有下列两个特点:

(1) 样本空间只包含有限个样本点;

(2) 每个样本点(试验结果)发生的可能性相等,

这种概率模型称为**古典概型**.

古典概型是概率论发展初期的主要研究对象,这就是我们把这种概率模型称为古典概型的原因.

古典概型中,样本空间 Ω 包含 n 个样本点,事件 A 包含 n_A 个样本点,则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

利用以上公式计算概率时,关键是弄清样本点(试验结果)和计算样本点数.常用的计数方法有:分类计算时用加法原理、分步计算时用乘法原理、考虑次序时