全国高职高专教育“十一五”规划教材

实用高等数学

主编　盛光进

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育“十一五”规划教材

实用高等数学

Shiyong Gaodeng Shuxue

主　编　盛光进
副主编　舒　华　阳永生　余剑春
编　者　周　密　刘福保　罗幼之　杨　芳
　　　　曾庆柏　李占光　邢建平　陈　珊
　　　　林泽平　谷志元　张仲珍

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

根据教育部制定的“高职高专教育基础课程教育基本要求”和高职数学教学改革的最新精神，在吸收借鉴了全国多所院校的教学改革成果的基础上编写了本书。本书既体现了叙述流畅、语言精练、逻辑清晰、便于自学等特点，又注重在简明性、实用性、够用性、模型性、工具性等方面下工夫，力求体现出高职数学教育“够用、实用”的特色，真正展现实用的高等数学，方便师生教与学。

本书共分九章。主要内容为函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分简介，微分方程与拉普拉斯变换，无穷级数，简明实用数学模型及数学软件。

本书可作为高职高专院校理工类专业的数学基础课教材，也可作为成人高校及其他职业学校的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

实用高等数学/盛光进主编. —北京：高等教育出版社，2010. 9

ISBN 978-7-04-030814-3

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①盛… Ⅲ. ①高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 156906 号

策划编辑 邓雁城 责任编辑 张耀明 市场策划 全 静 封面设计 李卫青
责任绘图 于 博 版式设计 张 岚 责任校对 金 辉 责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	版　　次	2010 年 9 月第 1 版
印　　张	15.25	印　　次	2010 年 11 月第 3 次印刷
字　　数	370 000	定　　价	22.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 30814－00

前　　言

本书由全国首批高职示范院校之一——长沙民政职业技术学院牵头组编。十多位长期从事高职数学教学、坚持进行教学研究的第一线教师，根据教育部高职数学教育的基本要求和高职学校改革的最新精神，吸收借鉴了兄弟院校的教学改革成果和精华，多次研讨，集思广益，反复锤炼，精心编写了本书。针对高职学生数学基础薄、学习能力弱的特点，紧紧抓住"够用、实用"的教学原则。既坚持保留叙述详细、通俗易懂、逻辑清晰、便于自学等传统的优点，又注重在简明性、实用性、够用性、模型性、工具性等方面下工夫，努力体现出高职教育的特色。

简明性。数学理论的叙述尽可能地简单明白、流畅自然、逻辑清晰。淡化运算技巧，避免繁杂运算、证明。不追求理论的严密性、系统性与全面性。在不影响数学本质情况下，允许知识之间出现间断。较难证明的结论直接给出简化的结果。如"可以证明结论：初等函数在定义区间内是连续的"。定理尽可能地给出直观、容易明白的解释。重要公式、结果的介绍，力求简单明了，方便记忆、应用。

实用性。结合社会实践和现实生活，突出应用。在数学知识的应用以及解决实际问题方面下工夫。对非重要的知识点以及数学知识产生的过程、数学定理的证明尽可能弱化。比较多地选用了社会实践、现实生活中的简单实际问题作为例题和习题。每章的最后一节"应用与实践"中，综合运用本章数学知识解决一些贴近现实生活的实际问题，给出了许多实用的数学模型，引导学生进行数学应用的实践训练，让学生形成数学的应用意识，体会数学的应用价值。

够用性。大胆删去那些非本质、繁杂的、对社会实践作用不大及对后续学习影响不大的内容。精选那些学生在今后职业岗位与社会实践中迫切需要的数学知识和实用的数学方法。强化数学定义、定理、公式、模型的形象化的理解、应用，弱化知识的产生过程。例如，在叙述函数的连续性时，不对连续性的多种定义作过多的分析，也不讨论相关的连续性问题，只对连续性定义作形象方面的解释，将主要精力集中在介绍连续性的性质及应用。这样编写的篇幅不到原来的一半，提高了实用效率。

模型性。贯穿数学模型的思想，以数学模型的观点来分析、解决实际问题。较多地介绍了现实问题中的数学模型。弱化模型的建立过程，强化模型的理解、应用与拓展。如成果评选的得票率模型、旅行社组团人数模型、死亡时间的鉴定模型、食饵-捕食者模型等，会给读者留下深刻的印象。

工具性。教材上的重要结论、应用案例和实用模型，简明好用，具有保存价值。在学生遇到现实中的有关实际问题后，可通过查阅本教材的应用案例和实用模型后直接解决或模仿解决。如介绍的分期付款模型、薄利多销模型、鱼群的适度捕捞模型等都非常方便同学解决现实问题。

渐进性。数学理论、实例的介绍，循序渐进。例题、习题的难易程度有梯度，以方便不同程度的同学学习。例题、习题、实践实训题，联系紧密，针对性强。

时代性。在本书的附录C中介绍了实用的数学软件 MATLAB，使学生了解现代化的计算

手段，帮助学生轻松地解决复杂的数学计算问题，提高学习效率。

本书由长沙民政职业技术学院盛光进主编。参加本书研讨和编写的人员有：阳永生、刘福保、罗紡之、李占光（长沙民政职业技术学院），舒华、周密（湖南科技职业学院）、杨芳、邢建平（湖南网络工程职业学院），曾庆柏（湖南对外经济贸易职业学院），余剑春、林泽平（湘西民族职业技术学院），谷志元（广州铁路职业技术学院），陈珊（湖南工业职业技术学院），张仲珍（湖南生物机电职业技术学院）。

由于编者的水平有限和时间仓促，书中不足之处在所难免，真诚地欢迎老师、同学、读者批评指正。所有意见和建议请寄往作者的邮箱：dongfang6928@sina.com.cn，以便我们修订再版时修改完善，谨此致谢。

盛光进

于长沙民政职业技术学院

2010年8月

目　　录

第一章 函数、极限与连续

函数是描述客观事物变化过程中变量相依关系的数学模型，是研究高等数学的主要对象. 极限是研究高等数学的重要工具. 连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本概念及其主要性质与运算，为微积分的学习打下基础.

第一节 函 数

一、函数及其性质

在具体研究某一自然现象或实际问题的过程中，常常会发现问题中的变量往往存在着相互依赖关系：当一个变量在它的变化区域中任意取定一个值时，另一个变量按一定法则就有唯一一个确定的值与之对应. 把这种确定的依赖关系抽象出来，就是函数的概念.

1. 函数的概念

定义 1 设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 按照某一法则 f 总有唯一一个确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作

$$y=f(x), \quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**. f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应法则. 数集 D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**. 相应的 y 值的集合称为函数的**值域**. 不同的函数可用不同的字母表示，如 $y=g(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 等.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的**函数值**，记作

$$y\Big|_{x=x_0} \quad 或 \quad f(x_0).$$

由函数的定义可知，当函数的定义域和对应法则确定后，这个函数就完全确定了. 因此，常把函数的定义域和对应法则叫做**函数的两个要素**. 两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

2. 函数的表示法

函数的表示法就是用来确定函数的对应法则的方法.

函数的表示法通常分为三种：解析法、表格法和图像法.

(1) **表格法**是用表格的形式表示函数的方法，它将自变量的值与对应的函数值列成表. 如对数表，三角函数表等.

(2) **图像法**是在坐标系中用图形表示函数关系的方法.

(3) **解析法**是用数学式子表示函数的方法. 根据函数的解析表达式的形式不同，函数也可分

为显函数和隐函数两种：

(i) **显函数**　函数 y 由 x 的解析表达式直接表示.例如,$y=x^3+1$.

(ii) **隐函数**　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程

$$F(x,y)=0$$

来确定.例如,$x^2+y^2=1$.

若函数在其定义域的不同范围内,具有不同的表达式,这种在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**.以下是几个分段函数的例子.

例 1　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$,值域是 $W=[0,+\infty)$(如图 1-1 所示).

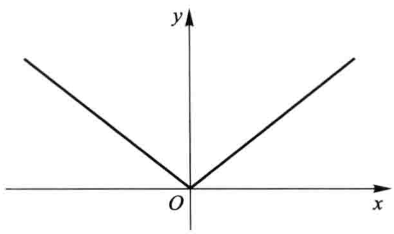

图 1-1

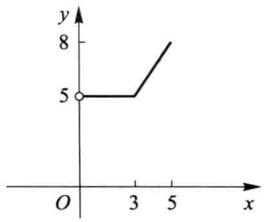

图 1-2

例 2　某出租汽车公司规定收费标准如下:不足 3 公里,租费为 5 元,超过 3 公里的部分每公里加收 1.6 元.租费 y 与公里数 x 的函数关系,可表示为

$$y=f(x)=\begin{cases}5, & 0<x\leqslant 3,\\ 5+1.6(x-3), & x>3,\end{cases}$$

即

$$y=f(x)=\begin{cases}5, & 0<x\leqslant 3,\\ 0.2+1.6x, & x>3.\end{cases}$$

它的定义域为 $D=(0,+\infty)$(如图 1-2 所示).

分段函数是其整个定义域上的一个函数,而不是多个函数.因此分段函数需要分段求值,分段作图.其定义域是各段定义域的并集.

3. 函数的几种特性

(1) **有界性**　设函数 $f(x)$的定义域为 D,若存在正数 M,使得在区间 D 上有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 D 上有界.

(2) **单调性**　设函数 $f(x)$在区间 D 上有定义,若对于区间 D 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$在 D 上单调增加(或单调减少),区间 D 称为单调增加区间(或单调减少区间).

(3) **奇偶性**　设 I 为关于原点对称的区间,对于任意 $x\in I$,若 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为定义在区间 I 上的偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为定义在区间 I 的奇函数.

(4) **周期性**　若存在不为零的常数 T,使得对于任意 $x\in I$,有 $x+T\in I$,且 $f(x+T)=$

$f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

二、初等函数

微积分研究的对象，主要为初等函数. 下面将分别介绍基本初等函数、复合函数及初等函数.

1. 基本初等函数

定义 2 通常将下列五类函数统称为**基本初等函数**. 其函数名称与解析表达式如下：

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）；

指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$；

对数函数 $y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$；

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

基本初等函数的图像及主要性质参见附录 A.

2. 复合函数

定义 3 设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，若 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，而 u 称为**中间变量**.

为了研究的方便，常常需要把一个比较复杂的函数分解成几个比较简单的函数. 要把复合函数分解好，必须把基本初等函数的形式记住.

例 3 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\cos^{3}x$；　　(2) $y=8\mathrm{e}^{-4x}-7$；

(3) $y=5^{(2x-1)^{3}}$；　　(4) $y=\sqrt{\log_{a}\left(\dfrac{1}{x^{2}}\right)}$.

解 (1) 设 $u=\cos x$，则 $y=u^{3}$，所以 $y=\cos^{3}x$ 是由 $y=u^{3}$，$u=\cos x$ 复合而成的.

(2) 设 $u=-4x$，则 $y=8\mathrm{e}^{u}-7$，所以 $y=8\mathrm{e}^{-4x}-7$ 是由 $y=8\mathrm{e}^{u}-7$，$u=-4x$ 复合而成的.

(3) 设 $u=(2x-1)^{3}$，则 $y=5^{u}$；设 $v=2x-1$，则 $u=v^{3}$，所以 $y=5^{(2x-1)^{3}}$ 是由 $y=5^{u}$，$u=v^{3}$，$v=2x-1$ 三个函数复合而成的.

(4) 设 $u=\log_{a}\left(\dfrac{1}{x^{2}}\right)$，则 $y=\sqrt{u}$；设 $v=\dfrac{1}{x^{2}}$，则 $u=\log_{a}v$，所以 $y=\sqrt{\log_{a}\left(\dfrac{1}{x^{2}}\right)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\log_{a}v$，$v=\dfrac{1}{x^{2}}$ 复合而成的.

3. 初等函数

定义 4 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算及有限次的函数复合并且只用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如，函数

$$y=\sin^{2}(3x+1),\quad y=\sqrt{x^{3}},\quad y=\frac{\lg x+2\tan x}{10^{x}-1}$$

都是初等函数.

一般来说，分段函数不是初等函数，不是初等函数的函数统称为非初等函数. 今后我们研究的函数，绝大多数都是初等函数.

三、函数模型的建立

运用数学工具去解决实际问题，往往需要找出问题中变量之间的函数关系，然后对它加以研究. 而函数关系（即函数模型）的建立并没有统一的规律可循，只能根据具体问题作具体分析和处理. 下面举一些简单实例说明函数模型建立的方法.

例 4（木箱表面积模型） 一个无盖的长方体大木箱，体积为 4 m^3，底为正方形. 试把木箱的表面积 S 表示为底边长 x 的函数.

解 木箱的底为正方形，其边长为 x(m)，木箱的高设为 h(m)，于是木箱的体积

$$V=\text{底面积}\times\text{高}=x^2h=4(\mathrm{m}^3),$$

故 $h=\dfrac{4}{x^2}$. 所以木箱的表面积

$$\begin{aligned}S&=\text{底面积}+4\text{ 个侧面积}=x^2+4x\cdot h\\&=x^2+4x\cdot\frac{4}{x^2}=x^2+\frac{16}{x}\quad(\mathrm{m}^2).\end{aligned}$$

总成本函数 总成本由固定成本和可变成本两部分组成. 固定成本 C_0 与产品的产量（或销售量）x 无关. 可变成本 $C_1(x)$ 是 x 的函数，因此总成本函数 $C(x)$ 为

$$C(x)=C_0+C_1(x).$$

总收入函数 总收入是指将一定量的产品出售后所得到的全部收入. 若产品的销售单价为 p，销售量为 x，则总收入函数 $R(x)$ 为

$$R(x)=px.$$

总利润函数 若产品的销售量即是生产量，则生产 x 单位产品的总利润函数 $L(x)$ 等于总收入函数与总成本函数之差，即

$$L(x)=R(x)-C(x).$$

例 5（常用经济函数模型） 商场以每件 a 元的价格出售某种商品，若顾客购买 50 件以上，则超出 50 件的商品以每件 $0.8a$ 元的优惠价格出售.（1）试将销售收入 R 表示成销售量 x 的函数；（2）若每件商品的进价为 b 元，试写出销售利润 L 与销售量 x 之间的函数关系.

解 （1）由题设知，当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，销售价为每件 a 元，故

$$R(x)=ax.$$

当 $x>50$ 时，其中 50 件商品的价格为每件 a 元，而超过 50 件的商品（即 $x-50$ 件商品）的价格为每件 $0.8a$ 元，所以

$$R(x)=50a+0.8a(x-50)=0.8ax+10a.$$

综上可得，销售收入为

$$R(x)=\begin{cases}ax, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 0.8ax+10a, & x>50.\end{cases}$$

（2）显然，销售 x 件商品的成本为 bx，从而得销售利润

$$L(x)=R(x)-bx=\begin{cases}ax-bx, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 0.8ax-bx+10a, & x>50.\end{cases}$$

例 6(物体移动的拉力模型) 已知一物体与地面的摩擦系数为 μ，重量为 P. 设有与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体从静止开始运动(图 1-3). 求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系式.

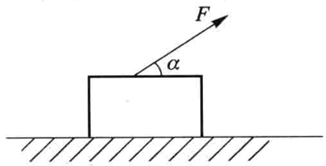

图 1-3

解 力 F 沿水平方向的分力的大小为 $F\cos\alpha$，垂直方向分力的大小为 $F\sin\alpha$. 根据库仑定律：物体对于地面的摩擦力的大小 R 与正压力成正比，即

$$R=\mu(P-F\sin\alpha).$$

因为要使水平方向的分力与摩擦力平衡，故有

$$F\cos\alpha=\mu(P-F\sin\alpha),$$

即

$$F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

这就是拉力 F 与角 α 之间的函数关系式(即物体移动的拉力模型).

习题 1.1

1. 设 $f(x)=x^3-2x+3$，求 $f(1)$，$f\left(-\frac{1}{a}\right)$，$f(t^2)$，$\frac{1}{f(b)}$.

2. 设 $f(x)=\arccos x$，求 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f(x_0)$，$f(x_0+\Delta x)$.

3. 设 $f(x)=4x^3-3x$，$\varphi(x)=\sin 2x$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

4. 判断下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同：

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$； (2) $f(x)=\ln x^7$，$g(x)=7\ln x$；

(3) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+3}$，$g(x)=x-1$.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{x+5}}$； (2) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\sqrt{x+3}+\frac{2}{\ln(x+1)}$； (4) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$；

6. 在下列各题中，指出所给函数的复合函数：

(1) $y=\sqrt{1+\tan u}$，$u=1+e^x$； (2) $y=\arcsin u$，$u=\frac{x^2}{1+x^2}$；

(3) $y=e^u$，$u=\cos v$，$v=x^2-1$； (4) $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$，$v=2^x+1$.

7. 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=(5x-2)^5$； (2) $y=\cos\sqrt{x}$；

(3) $y=7(\ln\sqrt{x})^3$； (4) $y=e^{\arcsin x^2}$；

(5) $y=\tan(x^3+4)$； (6) $y=\ln\ln\ln x$.

8. 火车站托运行李收费规定如下：当行李不超过 50 kg 时，按每千克收费 0.15 元；当超出 50 kg 时，超重部分按每千克收费 0.25 元，试建立行李收费 y(元)与行李重量 x(kg)之间的函数关系.

9. 在半径为 R 的球内作一个内接圆柱体，试写出圆柱体的体积 V 与其高 x 的函数关系.

10. 一物体作直线运动，已知阻力 f 的大小与物体运动的速度 v 成正比，但方向相反. 当物体以 1 m/s 的速

度运动时，阻力为 1.96×10^{-2} N，试建立阻力与速度之间的函数关系．

11．请你结合身边的实际情况，构造出几个有实用价值的分段函数．试着在你的论文写作中运用分段函数．

第二节　极限的概念

一、数列的极限

在解决实际问题中，我们经常使用一种方法，即观察数列的变化趋势，也就是要分析当项数 n 无限变大时，数列的变化趋势，这种方法称为极限方法．在高等数学中，极限方法是基本方法，它被广泛应用．由此产生了极限概念．

观察下面两个数列，并分析当项数 n 无限增大时，数列 $\{u_n\}$ 的变化趋势：

(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$;

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$.

考察上面两个数列可知，当 n 无限增大时，数列(1)的通项 $u_n=\frac{1}{2^n}$ 无限接近于 0，而数列(2)的通项 $u_n=\frac{n}{n+1}$ 无限接近于 1．

分析这两个数列的变化趋势可知，当 n 无限增大时，数列 $\{u_n\}$ 无限接近于某个确定的常数，这个常数我们称之为极限．一般地，可以定义如下：

定义 1　对于数列 $\{u_n\}$，若当 n 无限增大时，u_n 无限趋于某个常数 A，则称 A 为(当 n 趋于无穷大时)**数列的极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A \quad 或 \quad u_n\to A(n\to\infty).$$

也称数列 $\{u_n\}$ **收敛**于 A．若数列 $\{u_n\}$ 的极限不存在，就称数列 $\{u_n\}$ **发散**．

在上面两例中，数列(1)的极限是 0，可记作

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

数列(2)的极限是 1，可记作

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

例 1　当 $n\to\infty$ 时，观察下列数列的变化趋势，并写出它们的极限．

(1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$;

(2) $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$;

(3) $\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^3},\cdots,\frac{1}{3^n},\cdots$;

(4) $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$;

(5) $2,2^2,2^3,\cdots,2^n,\cdots$.

解　根据极限的定义，本题就是观察分析当 $n\to\infty$ 时，数列的通项 u_n 是不是趋于某个常数．若这个常数存在，极限就存在；否则极限不存在，即发散．

(1) 当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\to0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(2) 当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\to 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

(3) 当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{3^n}\to 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$.

(4) 当 $n\to\infty$ 时，$(-1)^{n+1}$ 不趋于某个常数，故数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 是发散的.

(5) 当 $n\to\infty$ 时，2^n 不趋于某个常数而是趋于无穷大，故数列 $\{2^n\}$ 是发散的，也称数列的极限为无穷大.

根据数列极限的定义，可得到下列结果，它们在求极限时可直接使用.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0$（$\alpha$ 为大于 0 的常数）；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$（$|q|<1$）；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）.

二、函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 2 若当 x 的绝对值无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的值无限趋于某个常数 A，则称 A 为（当 x 趋于无穷大时）**函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

其中符号 $x\to\infty$ 表示自变量的变化趋势，$f(x)\to A$ 表示相应的函数值的变化趋势.

观察图 1-4 可知，当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 无限变小，函数值趋于 0；$x\to-\infty$ 时，函数值同样趋于 0，所以有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

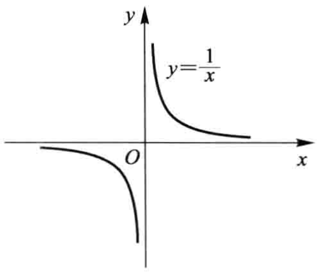

图 1-4

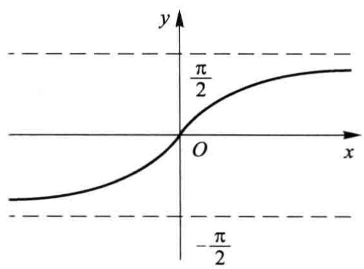

图 1-5

定义 3 如果当 x 仅取正值（或仅取负值）而绝对值无限增大，即 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 的值无限趋于某个常数 A，则称 A 为当 x 趋于正无穷大（或当 x 趋于负无穷大）时**函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

例 2 讨论极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解 画出函数 $y=\arctan x$ 的图像（如图 1-5），经观察分析可得

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

一般地，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在且相等，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，且与它们相等. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 中只要有一个不存在，或者虽然都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 4 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域[①]（点 x_0 本身可以除外）内有定义，若当 x 趋于 x_0（但 $x\neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 的值趋于某个常数 A，则称 A 为（当 x 趋于 x_0 时）**函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

也称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限存在. 否则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

注意 定义中"$x\to x_0$ 但 $x\neq x_0$"表示，在求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，不必考虑 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的情况，$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可以没有定义. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在，主要看当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的值是否趋于某个常数. 若这个常数存在，极限就存在；否则极限不存在.

例如，考察极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义，但据函数的图形可知，当 $x\to1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值无限趋于 2，所以据函数极限的定义，有

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

显然有

$$\lim_{x\to x_0}x=x_0,\quad \lim_{x\to x_0}C=C \quad (C\text{ 为常数}).$$

例 3 当 $x\to2$ 时，考察函数 $f(x)=3x+4$ 的极限.

解 当 $x\to2$ 时，$3x\to6$，从而知 $f(x)=3x+4\to10$，即

$$\lim_{x\to2}(3x+4)=10.$$

注意 $x\to x_0$ 包括 x 既从 x_0 的左边接近 x_0，也从 x_0 的右边接近 x_0，因而有如下定义.

定义 5 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧某个邻域（点 x_0 本身可以除外）内有定义，如果当 x 趋于 x_0（且 $x<x_0$）时，函数 $f(x)$ 的值趋于某个常数 A，则称 A 为（当 x 趋于 x_0 时）**函数 $f(x)$ 的左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0^-).$$

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右侧某个邻域（点 x_0 本身可以除外）内有定义，如果当 x 趋于 x_0（且 $x>x_0$）时，函数 $f(x)$ 的值趋于某个常数 A，则称 A 为（当 x 趋于 x_0 时）**函数 $f(x)$ 的右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0^+).$$

根据上述定义，可以得出极限存在的充分必要条件.

定理 1 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极

---

① 设 δ 为某个正数，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的**邻域**. 点 x_0 的邻域去掉点 x_0 后的区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的**空心邻域**.