hinese Research on Elementary Mathematics

No. 5 2014

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

inese Research on Elementary Mathematics No. 5 2014

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

中国初等数学研究.第5辑/杨学枝主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.2

ISBN 978-7-5603-4578-9

Ⅰ.①中… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①初等数学-文集
Ⅳ.①O12-53

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第010433号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451—86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 880mm×1230mm 1/16 印张12.5 字数530千字
版 次 2014年2月第1版 2014年2月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4578-9
定 价 48.00元

中国初等數學研究

陳省身

1995年5月20日

已故国际著名数学大师陈省身先生生前为本文集所题写的书名

《中国初等数学研究》第三届编辑委员会

目　录

· 初数专题

· 拓展延伸

· 解题探秘

· 命题研究

· 猜想

·会议报告选载

·信息指南

圆内接四边形的几个问题

杨学枝

摘　要:本文应用向量方法研究圆内接四边形的几个问题.得到了一些漂亮的结论.

关键词:圆内接四边形　　向量

本文应用向量方法来研究圆内接四边形问题,得到了一些漂亮的结论.首先先给出以下几个命题,然后再举例说明其应用.

设 A_1,A_2,A_3,A_4 依次为圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 四个顶点,P 为空间一点,x_1,x_2,x_3,x_4 为不全为零的实数,$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i=0$,且 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\overrightarrow{PA_i}=\mathbf{0}$,则有以下命题.

命题 1　对于空间任意一点 Q,都有 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\overrightarrow{QA_i}=\mathbf{0}$,且若 M,N,T 分别为直线 A_1A_2 与 A_3A_4,直线 A_1A_4 与 A_2A_3,直线 A_1A_3 与 A_2A_4 交点,则有

$$x_1\overrightarrow{QA_1}+x_2\overrightarrow{QA_2}=-x_3\overrightarrow{QA_3}-x_4\overrightarrow{QA_4}=(x_1+x_2)\overrightarrow{QM}$$

$$x_2\overrightarrow{QA_2}+x_3\overrightarrow{QA_3}=-x_1\overrightarrow{QA_1}-x_4\overrightarrow{QA_4}=(x_2+x_2)\overrightarrow{QN}$$

$$x_1\overrightarrow{QA_1}+x_3\overrightarrow{QA_3}=-x_2\overrightarrow{QA_2}-x_4\overrightarrow{QA_4}=(x_2+x_2)\overrightarrow{QT}$$

证明　$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\overrightarrow{QA_i}=(\sum\limits_{i=1}^{4}x_i)\overrightarrow{QP}+\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\overrightarrow{PA_i}=\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\overrightarrow{PA_i}=\mathbf{0}.$

在 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\overrightarrow{QA_i}=\mathbf{0}$ 中令 $Q=M$,有

$$x_1\overrightarrow{MA_1}+x_2\overrightarrow{MA_2}=-x_3\overrightarrow{MA_3}-x_4\overrightarrow{MA_4}=\mathbf{0}$$

因此
$$x_1\overrightarrow{QA_1}+x_2\overrightarrow{QA_2}=x_1(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MA_1})+x_2(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MA_2})=(x_1+x_2)\overrightarrow{QM}$$

即得
$$x_1\overrightarrow{QA_1}+x_2\overrightarrow{QA_2}=-x_3\overrightarrow{QA_3}-x_4\overrightarrow{QA_4}=(x_1+x_2)\overrightarrow{QM}$$

类似证法可得另外两式.

命题 2　对于空间任意一点 Q,都有 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_iQA_i^2=0$.

证明　设四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 外接圆圆心为 O,半径为 R,则

$$\sum_{i=1}^{4}x_iQA_i^2=\sum_{i=1}^{4}x_i(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OA_i})^2=\sum_{i=1}^{4}x_iQO^2+\sum_{i=1}^{4}x_iOA_i^2+2\overrightarrow{QO}\cdot\sum_{i=1}^{4}x_i\overrightarrow{QA_i}=$$

$$0+\sum_{i=1}^{4}x_iR^2+2\overrightarrow{QO}\cdot 0=\mathbf{0}$$

命题 3　$x_1x_2A_1A_2^2=x_3x_4A_3A_4^2,x_1x_3A_1A_3^2=x_2x_4A_2A_4^2,x_1x_4A_1A_4^2=x_2x_3A_2A_3^2.$

证明　在命题 2 的等式中,令 $Q=A_1$,得到

$$x_2A_1A_2^2+x_3A_1A_3^2+x_4A_1A_4^2=0$$

上式两边同乘以 x_1,得到

$$x_1x_2A_1A_2^2+x_1x_3A_1A_3^2+x_1x_4A_1A_4^2=0 \qquad ①$$

同理可得

$$x_1x_2A_1A_2^2+x_2x_3A_2A_3^2+x_2x_4A_2A_4^2=0 \qquad ②$$

$$x_1x_3A_1A_3^2+x_2x_3A_2A_3^2+x_3x_4A_3A_4^2=0 \qquad ③$$

$$x_1x_4A_1A_4^2+x_2x_4A_2A_4^2+x_3x_4A_3A_4^2=0 \qquad ④$$

由 ①+② 得

$$2x_1x_2A_1A_2^2=-(x_1x_3A_1A_3^2+x_1x_4A_1A_4^2+x_2x_3A_2A_3^2+x_2x_4A_2A_4^2)$$

由 ③+④ 得

$$2x_3x_4A_3A_4^2=-(x_1x_3A_1A_3^2+x_1x_4A_1A_4^2+x_2x_3A_2A_3^2+x_2x_4A_2A_4^2)$$

因此得到 $x_1x_2A_1A_2^2=x_3x_4A_3A_4^2$,同理可证其余两式.

命题 4 $x_1x_2A_1A_2^2+x_1x_3A_1A_3^2+x_2x_3A_2A_3^2=0$.类似还有 3 式.

证明 在命题 3 的证明中,①+②+③,并将 ④ 代入即得.

命题 5 设 A_1,A_2,A_3,A_4 为圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 依次四个顶点,Q 为空间任意一点,用 A_1A_2 等表示线段长度(下文表示同此),$A_1A_2=a_{12}$,$A_2A_3=a_{23}$,$A_3A_4=a_{34}$,$A_4A_1=a_{14}$,$A_1A_3=a_{13}$,$A_2A_4=a_{24}$,则有向量式:

(1)$(a_{23}\cdot a_{24}\cdot a_{34})\overrightarrow{QA_1}-(a_{13}\cdot a_{14}\cdot a_{34})\overrightarrow{QA_2}+(a_{12}\cdot a_{14}\cdot a_{24})\overrightarrow{QA_3}-(a_{12}\cdot a_{13}\cdot a_{23})\overrightarrow{QA_4}=\mathbf{0}$;

(2)$(a_{23}\cdot a_{24}\cdot a_{34})QA_1^2-(a_{13}\cdot a_{14}\cdot a_{34})QA_2^2+(a_{12}\cdot a_{14}\cdot a_{24})QA_3^2-(a_{12}\cdot a_{13}\cdot a_{23})QA_4^2=0$.

(3)$a_{23}(a_{12}+a_{34})\overrightarrow{QA_1}-a_{34}(a_{14}+a_{23})\overrightarrow{QA_2}+a_{14}(a_{12}+a_{34})\overrightarrow{QA_3}-a_{12}(a_{14}+a_{23})\overrightarrow{QA_4}=0$;

(4)$a_{23}a_{34}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})QA_1^2-a_{34}a_{14}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})QA_2^2+a_{12}a_{24}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})QA_3^2-a_{12}a_{23}(a_{12}a_{24}+a_{23}a_{34})QA_4^2=0$.

证明 (1)、(2) 由于 x_1,x_2,x_3,x_4 不全为零,不妨设 $x_4\neq 0$,在命题 4 的等式中,可得到

$$\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_4}\cdot\dfrac{x_2}{x_4}A_1A_2^2=\dfrac{x_3}{x_4}A_3A_4^2\\[2ex]\dfrac{x_1}{x_4}\cdot\dfrac{x_3}{x_4}A_1A_3^2=\dfrac{x_2}{x_4}A_2A_4^2\\[2ex]\dfrac{x_2}{x_4}\cdot\dfrac{x_3}{x_4}A_2A_3^2=\dfrac{x_1}{x_4}A_1A_4^2\end{cases}$$

注意到 A_1,A_2,A_3,A_4 为圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 依次四个顶点,可知 x_1 与 x_4,x_3 与 x_4 异号,x_2 与 x_4 同号,因此,可得到

$$\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_4}=-\dfrac{A_2A_4\cdot A_3A_4}{A_1A_2\cdot A_1A_3}\\[2ex]\dfrac{x_2}{x_4}=\dfrac{A_1A_4\cdot A_3A_4}{A_1A_2\cdot A_2A_3}\\[2ex]\dfrac{x_3}{x_4}=-\dfrac{A_1A_4\cdot A_2A_4}{A_1A_3\cdot A_2A_3}\end{cases}$$

将上式分别代入命题 1、命题 2 中的等式并整理,便得到(1)、(2).

(3)、(4) 由以上$\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_4}=-\dfrac{A_2A_4\cdot A_3A_4}{A_1A_2\cdot A_1A_3}\\[2ex]\dfrac{x_2}{x_4}=\dfrac{A_1A_4\cdot A_3A_4}{A_1A_2\cdot A_2A_3}\\[2ex]\dfrac{x_3}{x_4}=-\dfrac{A_1A_4\cdot A_2A_4}{A_1A_3\cdot A_2A_3}\end{cases}$,可得到$\dfrac{x_1}{x_3}=\dfrac{a_{23}\cdot a_{34}}{a_{12}\cdot a_{14}}$,于是

$$\frac{A_1A_2\cdot A_2A_3}{A_1A_4\cdot A_3A_4}=\frac{x_4}{x_2}=-\frac{x_1+x_2+x_3}{x_2}=-\left(\frac{\dfrac{a_{23}\cdot a_{34}}{a_{12}\cdot a_{14}}\cdot x_3}{x_2}+1+\frac{x_3}{x_2}\right)$$

由此得到

$$\frac{x_2}{x_3}=-\frac{a_{34}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}{a_{12}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})}$$

$$\frac{x_4}{x_3}=\frac{x_4}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}=\frac{a_{12}a_{23}}{a_{34}a_{14}}\cdot\left[-\frac{a_{34}(a_{12}a_{41}+a_{23}a_{34})}{a_{12}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})}\right]=-\frac{a_{23}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}{a_{14}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})}$$

将以上比值$\frac{x_1}{x_3}=\frac{a_{23}\cdot a_{34}}{a_{12}\cdot a_{14}}$，$\frac{x_2}{x_3}=-\frac{a_{34}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}{a_{12}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})}$，$\frac{x_4}{x_3}=-\frac{a_{23}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}{a_{14}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})}$分别代入命题1、命题2中的等式即得(3)、(4).

命题 6　同命题5所设，有：

(1)$a_{13}=\sqrt{\frac{(a_{12}a_{34}+a_{23}a_{14})(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}{a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14}}}$；

(2) $a_{24}=\sqrt{\frac{(a_{12}a_{34}+a_{23}a_{14})(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})}{a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34}}}$；

(3)(圆密定理)$a_{12}a_{34}+a_{23}a_{14}=a_{13}\cdot a_{24}$.

证明　在命题5(4)的等式中分别令$Q=A_1$和$Q=A_2$，并整理便分别得到(1)、(2). 由(1)、(2)即得(3).

以下举几例说明上述命题的应用.

例 1　$\triangle ABC$三边长$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，M是AC上一点，且$\lambda\overrightarrow{MA}+u\overrightarrow{MC}=0$，$B$，$M$连线交$\triangle ABC$外接圆于$P$，则

$$\frac{\lambda ub^2}{\lambda(\lambda+u)c^2+u(\lambda+u)a^2}\overrightarrow{MB}+\left[1-\frac{\lambda ub^2}{\lambda(\lambda+u)c^2+u(\lambda+u)a^2}\right]\overrightarrow{MP}=\mathbf{0}$$

证明　设$x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MP}=0$($x$，$y$待求)，由于$\lambda\overrightarrow{MA}+u\overrightarrow{MC}=0$，因此得到

$$\frac{x}{x+y}\overrightarrow{MB}+\frac{y}{x+y}\overrightarrow{MP}=\frac{\lambda}{\lambda+u}\overrightarrow{MA}+\frac{u}{\lambda+u}\overrightarrow{MC}$$

即

$$\frac{\lambda}{\lambda+u}\overrightarrow{MA}-\frac{x}{x+y}\overrightarrow{MB}+\frac{u}{\lambda+u}\overrightarrow{MC}=\frac{y}{x+y}\overrightarrow{MP} \tag{⑤}$$

由上面命题4，有

$$-\left(\frac{x}{x+y}\cdot\frac{u}{\lambda+u}\right)a^2+\left(\frac{u}{\lambda+u}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+u}\right)b^2-\left(\frac{\lambda}{\lambda+u}\cdot\frac{x}{x+y}\right)c^2=0$$

由此得到

$$\frac{x}{x+y}=\frac{\frac{\lambda u}{(\lambda+u)^2}b^2}{\frac{\lambda}{\lambda+u}c^2+\frac{u}{\lambda+u}a^2}=\frac{\lambda ub^2}{\lambda(\lambda+u)c^2+u(\lambda+u)a^2}$$

代入式⑤，便得到

$$\frac{\lambda}{\lambda+u}\overrightarrow{MA}-\frac{\lambda ub^2}{\lambda(\lambda+u)c^2+u(\lambda+u)a^2}\overrightarrow{MB}+\frac{u}{\lambda+u}\overrightarrow{MC}=\left[1-\frac{\lambda ub^2}{\lambda(\lambda+u)c^2+u(\lambda+u)a^2}\right]\overrightarrow{MP}$$

即得到

$$\frac{\lambda ub^2}{\lambda(\lambda+u)c^2+u(\lambda+u)a^2}\overrightarrow{MB}+\left[1-\frac{\lambda ub^2}{\lambda(\lambda+u)c^2+u(\lambda+u)a^2}\right]\overrightarrow{MP}=0$$

例 2　$\triangle ABC$三边长$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，D为$\triangle ABC$所在平面上一点，Q为空间一点，有$p\overrightarrow{QA}+q\overrightarrow{QB}+r\overrightarrow{QC}=(p+q+r)\overrightarrow{QD}$，$B$，$D$连线交$\triangle ABC$外接圆于$P$，则

$$\frac{p}{p+r}\overrightarrow{QA}-\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\overrightarrow{QB}+\frac{r}{p+r}\overrightarrow{QC}-\left[1-\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\right]\overrightarrow{QP}=\mathbf{0}$$

证明　设$x\overrightarrow{QB}+y\overrightarrow{QD}=(x+y)\overrightarrow{QP}$，由于$p\overrightarrow{QA}+q\overrightarrow{QB}+r\overrightarrow{QC}=(p+q+r)\overrightarrow{QD}$，以上两式消去$\overrightarrow{QD}$，得到

$$\frac{p}{p+q+r}\overrightarrow{QA}+\frac{q}{p+q+r}\overrightarrow{QB}+\frac{r}{p+q+r}\overrightarrow{QC}=\frac{x+y}{y}\overrightarrow{QP}-\frac{x}{y}\overrightarrow{QB}$$

即
$$\frac{p}{p+q+r}\overrightarrow{QA}+\left(\frac{q}{p+q+r}+\frac{x}{y}\right)\overrightarrow{QB}+\frac{r}{p+q+r}\overrightarrow{QC}=\frac{x+y}{y}\overrightarrow{QP}$$

设直线 AC, BP 交于 M，则由命题 1 可知，有

$$\frac{p}{p+q+r}\overrightarrow{MA}+\frac{r}{p+q+r}\overrightarrow{MC}=\frac{x+y}{y}\overrightarrow{MP}-\left(\frac{q}{p+q+r}+\frac{x}{y}\right)\overrightarrow{MB}=\mathbf{0} \qquad (※)$$

于是，由上例 1 可以得到

$$\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\overrightarrow{MB}+\left[1-\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\right]\overrightarrow{MP}=\mathbf{0}$$

再由式(※)，便得到

$$\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\overrightarrow{MB}+\left[1-\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\right]\overrightarrow{MP}=$$
$$\frac{p}{p+r}\overrightarrow{MA}+\frac{r}{p+r}\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$$

即有

$$\frac{p}{p+r}\overrightarrow{QA}-\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\overrightarrow{QB}+\frac{r}{p+r}\overrightarrow{QC}-$$
$$\left[1-\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\right]\overrightarrow{QP}=\mathbf{0}$$

由解题中还可得到

$$\frac{p}{p+q+r}\overrightarrow{QA}+\left(\frac{q}{p+q+r}+\frac{x}{y}\right)\overrightarrow{QB}+\frac{r}{p+q+r}\overrightarrow{QC}=\frac{x+y}{y}\overrightarrow{QP}$$

以及

$$\frac{p}{p+r}\overrightarrow{QA}-\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\overrightarrow{QB}+\frac{r}{p+r}\overrightarrow{QC}=$$
$$\left[1-\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\right]\overrightarrow{QP}$$

比较上述两式系数，即可得

$$\frac{x}{y}=\frac{p+r}{p+q+r}\left[1-\frac{prb^2}{p(p+r)c^2+r(p+r)a^2}\right]-1$$

例 3 $\triangle ABC$ 三边长为 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$，其内切圆分别切三边 BC, CA, AB 于点 D, E, F, AD 与内切圆交于 P, Q 为空间任意一点，则

$$c(a+b-c)\overrightarrow{QF}-\frac{a(-a+b+c)^3}{(a-b+c)^2+(a+b-c)^2}\overrightarrow{QD}+b(a-b+c)\overrightarrow{QE}-$$
$$\left[b(a-b+c)+c(a+b-c)-\frac{a(-a+b+c)^3}{(a-b+c)^2+(a+b-c)^2}\right]\overrightarrow{QP}=\mathbf{0}$$

证明 由于

$$(a+b-c)\overrightarrow{QB}+(a-b+c)\overrightarrow{QC}=2a\overrightarrow{QD}$$
$$(-a+b+c)\overrightarrow{QC}+(a+b-c)\overrightarrow{QA}=2b\overrightarrow{QE}$$
$$(a-b+c)\overrightarrow{QA}+(-a+b+c)\overrightarrow{QB}=2c\overrightarrow{QF}$$

由以上三式消去 $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QC}$，得到

$$c(a+b-c)\overrightarrow{QF}-a(-a+b+c)\overrightarrow{QD}+b(a-b+c)\overrightarrow{QE}=(a-b+c)(a+b-c)\overrightarrow{QA}$$

另外，易求得

$$EF=\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)^3}{bc}}$$

$$FD=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)^3}{ca}}$$

$$DE=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)^3}{ab}}$$

于是利用例 2 结论，即得.

例 4 （“东方论坛”2012.09.13，“天下无毒史”提出，未见有人证明）

（杨学校改编推广命题，2012.09.13）A,B,C,D 为圆上四点，直线 AB 与 CD，AD 与 BC 分别交于点 E,F，则

$$EF^2=\overline{AE}\cdot\overline{BE}+\overline{BF}\cdot\overline{CF}$$

证明 设 $x\overrightarrow{QA}+y\overrightarrow{QB}+z\overrightarrow{QC}+w\overrightarrow{QD}=0$（$Q$ 为空间一点），则命题 1，有

$$x\overrightarrow{QA}+y\overrightarrow{QB}=-z\overrightarrow{QC}-w\overrightarrow{QD}=(x+y)\overrightarrow{QE} \quad ⑥$$

$$y\overrightarrow{QB}+z\overrightarrow{QC}=-x\overrightarrow{QA}-w\overrightarrow{QD}=(y+z)\overrightarrow{QF} \quad ⑦$$

由式 ⑥，⑦ 可分别得到

$$y\overline{AB}=(x+y)\overline{AE},x\overline{BA}=(x+y)\overline{BE}$$

$$z\overline{BC}=(y+z)\overline{BF},y\overline{CB}=(y+z)\overline{CF}$$

由此，可得到

$$(x+y)^2(x+z)^2(\overline{AE}\cdot\overline{BE}+\overline{BF}\cdot\overline{CF})=-xy(y+z)^2AB^2-yz(x+y)^2BC^2 \quad ⑧$$

另外，由式 ⑥，⑦ 还可以得到

$$(x+y)(y+z)\overrightarrow{EF}=xy\overrightarrow{AB}+yz\overrightarrow{BC}+xz\overrightarrow{AC}$$

因此，有

$$\begin{aligned}(x+y)^2(y+z)^2EF^2=&(xy)^2AB^2+(yz)^2BC^2+(xz)^2AC^2+x^2yz(AB^2-BC^2+AC^2)+\\&xy^2z(-AB^2-BC^2+AC^2)+xyz^2(-AB^2+BC^2+AC^2)=\\&xy(xy+xz-yz-z^2)AB^2+yz(-xy+xz+yz-x^2)BC^2+\\&xz(xy+yz+xz+y^2)AC^2=\\&(x+y)(y+z)(xyAB^2+yzBC^2+xzAC^2)-\\&xy(y+z)^2AB^2-yz(x+y)^2BC^2=\\&-xy(y+z)^2AB^2-yz(x+y)^2BC^2=\quad\text{（根据命题 4）}\\&(x+y)^2(y+z)^2(\overline{AE}\cdot\overline{BE}+\overline{BF}\cdot\overline{CF})\end{aligned}$$

（注意到式 ⑧），即得

$$EF^2=\overline{AE}\cdot\overline{BE}+\overline{BF}\cdot\overline{CF}$$

注：同理可得另外两式：若 AC 与 BD 交于 G，则有

$$FG^2=\overline{BF}\cdot\overline{CF}+\overline{AG}\cdot\overline{CG}$$

$$GE^2=\overline{AG}\cdot\overline{CG}+\overline{AE}\cdot\overline{BE}$$

由所得三式，又可以得到

$$\overline{AG}\cdot\overline{CG}=\frac{1}{2}(-EF^2+FG^2+GE^2)$$

$$\overline{AE}\cdot\overline{BE}=\frac{1}{2}(EF^2-FG^2+GE^2)$$

$$\overline{BF}\cdot\overline{CF}=\frac{1}{2}(EF^2+FG^2-GE^2)$$

例 5 如图 1 所示，A,B,C,D 为圆上顺次四点，$AB=a,BC=b,CD=c,DA=d$，直线 AB,CD 交于点 E，EM 切圆于 M，AB 与 CM 交于 Q，则：

(1) $\dfrac{AQ}{QB}=\dfrac{ad+bc}{ab+cd}\cdot\sqrt{\dfrac{d(ac+bd)}{b^3}}$；

(2) $\dfrac{MQ}{QC}=\sqrt{\dfrac{ab+cd}{b^2(ac+bd)(ad+bc)}}xy$，其中，$xy$ 满足

$$\left[(bc+ad)-\frac{a^2-c^2}{ab+cd}\cdot\sqrt{bd(ac+bd)}\right]\cdot\sqrt{\frac{ab+cd}{b^2(ac+bd)(ad+bc)}}xy=a\left[\sqrt{\frac{d(ac+bd)}{b}}-d\right]$$

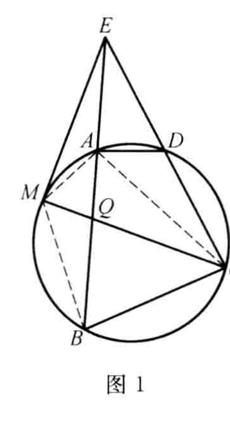

图 1

即

$$\frac{MQ}{QC}=\frac{a\left[\sqrt{\frac{d(ac+bd)}{b}}-d\right]}{(bc+ad)-\frac{a^2-c^2}{ab+cd}\cdot\sqrt{bd(ac+bd)}}$$

证明 (1) 设 $|MA|=x$, $|MB|=y$,则

$$\frac{AQ}{QB}=\frac{AMC}{MBC}=\frac{|AC|x}{by}=\frac{|AC|}{b}\cdot\sqrt{\frac{|EA|}{|EB|}}=\text{(面积比等于相似比的平方)}$$

$$\frac{1}{b}\cdot\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}\cdot\sqrt{\frac{d(ad+bc)}{b(ab+cd)}}=$$

$$\frac{ad+bc}{ab+cd}\cdot\sqrt{\frac{d(ac+bd)}{b^3}}$$

(2) 设 $|MA|=x$, $|MB|=y$,则

$$\frac{MQ}{QC}=\frac{AMB}{ABC}=\frac{xy}{b\cdot|AC|}=\frac{xy}{b}\cdot\sqrt{\frac{ab+cd}{(ac+bd)(ad+bc)}}$$

记 $t=\frac{xy}{b}\cdot\sqrt{\frac{ab+cd}{(ac+bd)(ad+bc)}}$,则对于空间一点 P,有

$$\overrightarrow{PM}+t\,\overrightarrow{PC}=(1+t)\,\overrightarrow{PQ} \tag{9}$$

另外,记 $\lambda=\frac{ad+bc}{ab+cd}\cdot\sqrt{\frac{d(ac+bd)}{b^3}}$,由结论(1)得到

$$\overrightarrow{PA}+\lambda\,\overrightarrow{PB}=(1+\lambda)\,\overrightarrow{PQ} \tag{10}$$

由式 ⑨,式 ⑩ 消去 PQ,得到

$$(1+\lambda)\,\overrightarrow{PM}+t(1+\lambda)\,\overrightarrow{PC}=(1+t)\,\overrightarrow{PA}+\lambda(1+t)\,\overrightarrow{PB}$$

于是,有

$$(1+\lambda)EM^2+t(1+\lambda)EC^2=(1+t)EA^2+\lambda(1+t)EB^2$$

另外,易求得

$$EA^2=\frac{d^2(bc+ad)^2}{(b^2-d^2)^2},EB^2=\frac{b^2(ab+cd)^2}{(b^2-d^2)^2}$$

$$EC^2=\frac{b^2(bc+ad)^2}{(b^2-d^2)^2},EM^2=EA\cdot EB=\frac{bd(ab+cd)(bc+ad)}{(b^2-d^2)^2}$$

代入上式,并整理,得到

$$[(1+\lambda)b^2(bc+ad)^2-d^2(bc+ad)^2-\lambda b^2(ab+cd)^2]\cdot\sqrt{\frac{ab+cd}{b^2(ac+bd)(ad+bc)}}xy=$$

$$\lambda b^2(ab+cd)^2+d^2(bc+ad)^2-(1+\lambda)bd(ab+cd)(bc+ad)$$

由此即得

$$\left[(bc+ad)-\frac{a^2-c^2}{ab+cd}\cdot\sqrt{bd(ac+bd)}\right]\cdot\sqrt{\frac{ab+cd}{b^2(ac+bd)(ad+bc)}}xy=$$

$$a\left[\sqrt{\frac{d(ac+bd)}{b}}-d\right]$$

即

$$\frac{MQ}{QC}=\frac{a\left[\sqrt{\frac{d(ac+bd)}{b}}-d\right]}{(bc+ad)-\frac{a^2-c^2}{ab+cd}\cdot\sqrt{bd(ac+bd)}}$$

注:又由于 $\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{EA}{EB}}=\sqrt{\frac{d(bc+ad)}{b(ab+cd)}}$,因此,还可以求 x,y,即可求得 $|MA|$,$|MB|$.

例 6 设 A_1,A_2,A_3,A_4 为圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 依次四个顶点，线段 A_1A_3,A_2A_4 中点分别为 P,Q，直线 A_1A_2 和 A_3A_4 交于 R，直线 A_1A_4 和 A_2A_3 交于 S，记 $A_1A_2=a_{12},A_2A_3=a_{23},A_3A_4=a_{34},A_4A_1=a_{14}$，$A_1A_3=a_{13},A_2A_4=a_{24}$，则：

(1)$2\overrightarrow{PQ}=\dfrac{a_{23}a_{14}(a_{12}^2-a_{34}^2)\overrightarrow{A_1A_2}+a_{12}a_{34}(a_{14}^2-a_{23}^2)\overrightarrow{A_2A_3}}{a_{12}a_{23}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}$；

(2)$\overrightarrow{RS}=\dfrac{(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})[a_{23}^2(a_{34}^2-a_{12}^2)\overrightarrow{A_1A_2}+a_{12}^2(a_{14}^2-a_{23}^2)\overrightarrow{A_2A_3}]}{a_{12}a_{23}(a_{34}^2-a_{12}^2)(a_{23}^2-a_{14}^2)}$；

(3)$4PQ^2=\dfrac{a_{23}a_{14}(a_{12}^2-a_{34}^2)^2+a_{12}a_{34}(a_{14}^2-a_{23}^2)^2}{(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}$；

(4)$RS^2=\dfrac{(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})[a_{23}a_{14}(a_{34}^2-a_{12}^2)^2+a_{12}a_{34}(a_{14}^2-a_{23}^2)^2]}{(a_{34}^2-a_{12}^2)^2(a_{23}^2-a_{14}^2)^2}$；

(5)$2\left|\dfrac{PQ}{RS}\right|=\dfrac{|(a_{34}^2-a_{12}^2)(a_{23}^2-a_{14}^2)|}{(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}=\left|\dfrac{a_1a_4+a_2a_3}{a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14}}-\dfrac{a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14}}{a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34}}\right|=\left|\dfrac{a_{13}}{a_{24}}-\dfrac{a_{24}}{a_{13}}\right|$.

证明 由于 P,Q 分别为 A_1A_3,A_2A_4 的中点，则有

$$2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{A_1Q}+\overrightarrow{A_3Q}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{A_1A_2}-\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_2A_4}=$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}-\overrightarrow{A_2A_3}+\frac{(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})(-a_{23}a_{34}\overrightarrow{A_{12}A_{23}}+a_{12}a_{14}\overrightarrow{A_{23}A_{34}})}{a_{12}a_{23}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}=$$

（在命题 5(3) 中令 $Q=A_2$ 后所得式子代入）

$$\frac{a_{23}a_{14}(a_{12}^2-a_{34}^2)\overrightarrow{A_1A_2}+a_{12}a_{34}(a_{14}^2-a_{23}^2)\overrightarrow{A_2A_3}}{a_{12}a_{23}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}$$

即得(1).

(3) 中的等式易由(1) 中的等式两边平方，并注意到

$$2\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=A_1A_3^2-A_1A_2^2-A_2A_3^2$$

$$A_1A_3^2=\frac{(a_{12}a_{34}+a_{23}a_{14})(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}{a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14}}\quad（命题 6(1)）$$

即可得到例 6(3).

设 T 为空间一点，由命题 5(3)，有

$$a_{23}a_{34}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})\overrightarrow{TA_1}-a_{34}a_{14}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})\overrightarrow{TA_2}=$$
$$-a_{12}a_{14}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})\overrightarrow{TA_3}+a_{12}a_{23}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})\overrightarrow{TA_4}=$$
$$a_{12}a_{34}(a_{23}^2-a_{14}^2)\overrightarrow{TR}$$

得到

$$\overrightarrow{TR}=\frac{a_{23}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})\overrightarrow{TA_1}-a_{14}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})\overrightarrow{TA_2}}{a_{12}(a_{23}^2-a_{14}^2)}$$

$$a_{34}a_{14}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})\overrightarrow{TA_2}-a_{12}a_{14}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})\overrightarrow{TA_3}=$$
$$a_{23}a_{34}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})\overrightarrow{TA_1}-a_{12}a_{23}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})\overrightarrow{TA_4}=$$
$$a_{23}a_{14}(a_{34}^2-a_{12}^2)\overrightarrow{TS}$$

得到

$$\overrightarrow{TS}=\frac{a_{34}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})\overrightarrow{TA_2}-a_{12}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})\overrightarrow{TA_3}}{a_{23}(a_{34}^2-a_{12}^2)}$$

于是

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{TS}-\overrightarrow{TR}=\frac{a_{34}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})\overrightarrow{TA_2}-a_{12}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})\overrightarrow{TA_3}}{a_{23}(a_{34}^2-a_{12}^2)}-$$
$$\frac{a_{23}(a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14})\overrightarrow{TA_1}-a_{14}(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})\overrightarrow{TA_2}}{a_{12}(a_{23}^2-a_{14}^2)}$$

在上式中，令 $T=A_2$，并整理即得(2).

(4) 中的等式易由(2) 中的等式两边平方,并注意到

$$2\,\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=A_1A_3^2-A_1A_2^2-A_2A_3^2$$

$$A_1A_3^2=\frac{(a_{12}a_{34}+a_{23}a_{14})(a_{12}a_{14}+a_{23}a_{34})}{a_{12}a_{23}+a_{34}a_{14}}\quad\text{(根据(1))}$$

即可得到.

由(3)、(4) 即得(5).

有理倍角三角形三边关系探求

孙世宝

（安徽省丹阳中学　243121）

摘　要：本文解决有理倍角三角形三边关系及倍角三角形的几个相关猜测.

关键词：有理倍角三角形　齐次多项式　切比雪夫多项式　高斯取整函数　递推公式

一、引言及引理

$\triangle ABC$ 中，$A=nB$，$n\in\mathbf{N}^+$，记其三边之间的齐次多项式方程为 $f_n(a,b,c)=0$.

杨世明老师在《中学生文库》一书中求得

$$f_1(a,b,c)=a-b,f_2(a,b,c)=a^2-b^2-bc,f_3(a,b,c)=(a^2-b^2)(a-b)-bc^2$$

$$f_4(a,b,c)=(a^2-b^2-bc)^2(a^2-b^2+bc)-a^2b^2c^2$$

并指出可由 $f_{n-1}(a^2-b^2,bc,ac)=0$，约去非零因子得到 $f_n(a,b,c)=0$.

后来王航老师在文献[1]中求出了 $n=4,5,6$ 时的 $f_n(a,b,c)$ 的最简式.并提出了3个问题：

猜测1　最简的 $f_n(a,b,c)$ 的次数是 n.

猜测2　若将 $f_n(a,b,c)$ 表为两个齐次多项式之和，前一个具有因子 $a-b$，后一个不含字母 a，则后一个含因子 bc^x，$x=\left[\dfrac{n+1}{3}\right]$.

猜测3　能求出它的表达式或递推式吗？

李永利老师在文献[2]和杨峰老师在文献[3]中得到了 $f_n(a,b,c)$ 的表达式，但次数却是 $2n-1$.李国祥老师在文献[4]中得到的式子是含根号的.

为了解决这些问题，先介绍一个重要结论：

引理（切比雪夫多项式）　$n\in\mathbf{N}^+$，$\theta\in\mathbf{R}$，则有下面的三角恒等式成立：

1. $\cos n\theta=\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^i\dfrac{C_{n-i}^i}{n-i}(2\cos\theta)^{n-2i}$；

2. $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}=\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^iC_{n-i-1}^i(2\cos\theta)^{n-2i-1}$.（规定 $C_0^0=1,C_u^v=0,v>u$）

引理中等式右边关于 $\cos\theta$ 的多项式的系数都是整数，$[x]$ 表示高斯取整函数.

二、一个更一般的问题及其解答

笔者研究了更一般情形，即下面的"有理倍角三角形"：

$\triangle ABC$ 的内角 A，B 若满足 $A=tB$，t 为给定正有理数，则我们称 $\triangle ABC$ 为有理倍角三角形.记其三边 a，b，c 满足的多项式方程为 $f_t(a,b,c)=0$，那么最简的齐次多项式 $f_t(a,b,c)$ 应该具备怎样的形式？

问题解答　设 $t=\dfrac{n}{m}$，$m,n\in\mathbf{N}^+$，$(m,n)=1$ 且 $m\equiv1\pmod 2$.

情形1　$m>1$.

由 $A=tB$，得到 $mA=nB$，利用

$$m=\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m+1}{2}\right]=m_1+m_2,n=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n_1+n_2$$

上述角的等式可以改写成 $m_1A-n_2B=n_1B-m_2A$，取正弦得到

$$\sin(m_1A-n_2B)=\sin(n_1B-m_2A)$$

展开即

$$\sin m_1A\cos n_2B+\sin m_2A\cos n_1B-\cos m_1A\sin n_2B-\cos m_2A\sin n_1B=0$$

利用正弦定理$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}$知，上式可写成

$$a\frac{\sin m_1A}{\sin A}\cdot\cos n_2B+a\frac{\sin m_2A}{\sin A}\cdot\cos n_1B-b\cos m_1A\cdot\frac{\sin n_2B}{\sin B}-b\cos m_2A\cdot\frac{\sin n_1B}{\sin B}=0$$

利用一下引理知

$$\begin{aligned}&a\sum_{i=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}(-1)^iC_{m_1-i-1}^i(2\cos A)^{m_1-2i-1}\times\frac{n_2}{2}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2}\right]}(-1)^i\frac{C_{n_2-i}^i}{n_2-i}(2\cos B)^{n_2-2i}+\\&a\sum_{i=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}(-1)^iC_{m_2-i-1}^i(2\cos A)^{m_2-2i-1}\times\frac{n_1}{2}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}(-1)^i\frac{C_{n_1-i}^i}{n_1-i}(2\cos B)^{n_1-2i}-\\&\frac{bm_1}{2}\sum_{i=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}(-1)^i\frac{C_{m_1-i}^i}{m_1-i}(2\cos A)^{m_1-2i}\times\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2}\right]}(-1)^iC_{n_2-i-1}^i(2\cos B)^{n_2-2i-1}-\\&\frac{bm_2}{2}\sum_{i=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}(-1)^i\frac{C_{m_2-i}^i}{m_2-i}(2\cos A)^{m_2-2i}\times\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}(-1)^iC_{n_1-i-1}^i(2\cos B)^{n_1-2i-1}=0\end{aligned}\qquad ①$$

最后利用余弦定理 $2\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}$，$2\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}$ 代入式 ①. 就可以得到所需的式子.

记式 ① 左边的式子为 $g(a,b,c)$，则

$$f(a,b,c)=2a^{n_2-1}b^{m_2-1}c^kg(a,b,c),k=\max\{m_2+n_1-1,m_1+n_2-1\}$$

$$m_2+n_1-1=\frac{m+1}{2}+\left[\frac{n}{2}\right]-1=\frac{m-1}{2}+\left[\frac{n}{2}\right],m_1+n_2-1=\frac{m-1}{2}+\left[\frac{n-1}{2}\right],k=m_2+n_1-1$$

是关于 a,b,c 的齐次多项式，次数 $\deg f=m_2+n_2+k-1=m+n-1$.

情形 2 $m=1,n>1,A=nB$.

这时由 $n_1\geqslant 1,A=n_1B+n_2B,\sin(A-n_1B)=\sin n_2B$，展开得到

$$a\cos n_1B-b\cos A\cdot\frac{\sin n_1B}{\sin B}-b\cdot\frac{\sin n_2B}{\sin B}=0$$

利用引理得到

$$\begin{aligned}&\frac{an_1}{2}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}(-1)^i\frac{C_{n_1-i}^i}{n_1-i}(2\cos B)^{n_1-2i}-b\cos A\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}(-1)^iC_{n_1-i-1}^i(2\cos B)^{n_1-2i-1}-\\&b\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2}\right]}(-1)^iC_{n_2-i-1}^i(2\cos B)^{n_2-2i-1}=0\end{aligned}\qquad ②$$

利用余弦定理，若记上式左边为 $g(a,b,c)$，则 $f(a,b,c)=a^{n_2-1}c^{n_1}g(a,b,c)$，则

$$\deg f=1+(n_2-1)+n_1=n$$

定理 1 $\triangle ABC$ 的内角 A,B 若满足 $A=tB$，t 为给定正有理数，则我们称 $\triangle ABC$ 为有理倍角三角形. 记 $t=\frac{n}{m}$，$m,n\in\mathbf{N}^+$，$(m,n)=1$，其三边 a,b,c 满足的最简多项式方程为 $f(a,b,c)=0$（可能相差常数因子），$\deg f=m+n-1$，且有如下的结论：

1. $m,n>1,m\equiv 1\pmod 2$（$n\equiv 1\pmod 2$ 类似，略）

$$\begin{aligned}f(a,b,c)=&n_2b^{m_2-m_1}c^{m_2+n_1-m_1-n_2}\sum_{i=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}(-1)^iC_{m_1-i-1}^i(bc)^{2i}(b^2+c^2-a^2)^{m_1-2i-1}\cdot\\&\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2}\right]}(-1)^i\frac{C_{n_2-i}^i}{n_2-i}(ac)^{2i}(a^2+c^2-b^2)^{n_2-2i}+\end{aligned}$$