21世纪普通高等教育规划教材·公共基础课系列
21 SHI JI PU TONG GAO DENG JIAO YU GUI HUA JIAO CAI
GONGGONG JICHUKE XILIE

Probablity and Statistics (2nd Edition)

概率论与数理统计

（第二版）

尤正书　刘丁酉　赵国石　主编

上海财经大学出版社

21 世纪普通高等教育规划教材·公共基础课系列

概率论与数理统计

（第二版）

主　编　尤正书　刘丁酉　赵国石
副主编　阮曙芬　杨　玲　赵一男

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/尤正书,刘丁酉,赵国石主编.—2版.—上海:上海财经大学出版社,2013.7
(21世纪普通高等教育规划教材·公共基础课系列)
ISBN 978-7-5642-1605-4/F·1605

Ⅰ.①概… Ⅱ.①尤…②刘…③赵… Ⅲ.①概率论-高等学校-材料②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第064324号

□ 责任编辑 徐从双
□ 封面设计 上艺设计
□ 责任校对 赵 伟 胡 芸

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI
概率论与数理统计
主 编 尤正书 刘丁酉 赵国石
副主编 阮曙芬 杨 玲 赵一男

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路321号乙 邮编200434)
网 址:http://www.sufep.com
电子邮箱:webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海华教印务有限公司印刷装订
2013年7月第2版 2013年7月第1次印刷

787mm×1092mm 1/16 13.25印张 339千字
印数:19 001— 24 000 定价: 32.00元

21世纪普通高等教育规划教材
21 SHI JI PU TONG GAO DENG JIAO YU GUI HUA JIAO CAI

编委会

BIAN WEI HUI

总策划　宋　谨　曹均伟

编　委（排名不分先后）

郑甘澍	厦门大学	刘继森	广东外语外贸大学
张一贞	山西财经大学	吴建斌	南京大学
胡放之	湖北工业大学	张中强	西南财经大学
吴国萍	东北师范大学	梁莱歆	中南大学
胡大立	江西财经大学	余海宗	西南财经大学
袁崇坚	云南大学	关玉荣	渤海大学
黎江虹	中南财经政法大学	曹　刚	湖北工业大学
李明武	长江大学	齐　欣	天津财经大学
徐艳兰	中南财经政法大学	张颖萍	渤海大学
吴秋生	山西财经大学	吴开松	中南民族大学
闫秀荣	哈尔滨师范大学	杜江萍	江西财经大学
周继雄	武汉理工大学	盛洪昌	长春大学
姚晓民	山西财经大学	刘丁酉	武汉大学
夏兆敢	湖北工业大学	赵国石	中国地质大学
安　烨	东北师范大学	张慧德	中南财经政法大学
顾春梅	浙江工商大学	屈　韬	广东商学院
黄金火	湖北经济学院	尤正书	湖北大学
李会青	山西大学商务学院	李文新	湖北工业大学
郭志文	湖北大学	张　洪	武汉理工大学
蒲清泉	贵州大学	夏　露	湖北工业大学
韩冬芳	山西大学		

第二版前言

《概率论与数理统计》是高等院校各学科(尤其是工学、经济学及管理学等学科)的大学生必修的数学课程之一。该课程作为一门专门研究随机现象统计规律性且应用性较强的数学基础课,其基本理论及基本方法几乎渗透到自然科学和社会科学的各个领域;同时,它也是工学、经济学及管理学等学科门类的硕士研究生入学考试中必试数学的一个分支。

进入21世纪以来,我国的高等教育已开始从"精英型教育"迅速向"大众化教育"转化,其发展速度之迅猛,既改变了我国高等教育的格局,有力地推动了我国高等教育事业的发展,但也给我国的大学教育提出了新的问题与挑战。为了适应这种快速变化与需求,我们在参照《概率论与数理统计》课程教学基本要求的基础上,强调以教育为本,注重应用,突出需要,特别编写了这本《概率论与数理统计》简明教材。它既可作为高等院校各学科教学时的《概率论与数理统计》教材,也可作为高校独立院校及高职高专等层次的教材。

为了解决教材的适应性问题,我们特别对当前大学数学教育中存在的普遍问题进行了深入研究与探索,并结合多年的教学经验,在该教材的编写过程中注意从取材到写作的各个环节既体现教学基本要求,又突出实用。具体表现在以下几个方面:

1. 通俗易懂,深入浅出

教材在各知识点讲解表述上利用实际背景,图文并茂,深入浅出,通俗易懂。理论证明上选用简捷的方法,有利于学生克服概率论枯燥难学的情绪。

2. 内容新颖,突出应用

本书坚持理论联系实际,取材新颖,注重科学性、现实性、趣味性,努力使学生从教材中深切地感知概率论与数理统计知识在实际工作与生活中的广泛应用。在例题选择、编排上都体现了概率论与数理统计与计算机应用、经济学应用的结合,注重了教学的针对性和层次性。

3. 习题充分,讲解翔实

本书每节都配有相应的习题,并编写配套习题集给老师提供选择空间,也给学生以自主学习的空间;同时便于学生通过循序渐进的练习,理解基本概念,掌握基本的解题方法。

本教材由尤正书(湖北大学)、刘丁酉(武汉大学)、赵国石(中国地质大学)担任主编,负责本书内容体系的设计、人员的组织分工以及最后的总纂统稿。阮曙芬(中国地质大学江城学院)、杨玲(中国地质大学)、赵一男(中国地质大学)担任副主编。具体编写分工如下:第一、二章由杨玲执笔,第三章由叶菁(中国地质大学)执笔,第四章由赵一男执笔,第五、六章由吴小霞(中南民族大学)执笔,第七章由程斌(中南民族大学)执笔,第八章由杜光宝(武汉大学)执笔,

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

刘俊菊参与修订。

由于时间仓促，编者水平有限，教材中难免存在错漏或不妥之处，希望广大师生提出宝贵的意见和建议。

编　者
2013 年 5 月

目　录

习题参考答案

参考文献

第一章 随机事件及其概率

第一节　随机事件

一、随机现象

在研究自然界和人类社会时，人们可以观察到两类现象：一类是在一定条件下必然会发生的现象. 例如，将一块石头上抛必然会下落；太阳总是从东方升起；在标准大气压下，水在100℃时必然会沸腾等，我们称这类现象为**确定性现象**或**必然现象**. 另一类现象是在一定条件下可能出现也可能不出现的现象. 例如，掷一枚质地的硬币时，它可能出现正面向上，也可能出现反面向上；用一门炮射击目标，弹着点的准确位置是无法事先预测的；等等，我们称这类现象为**随机现象**.

大量的实际问题与随机现象有联系. 比如说，批发商每月向零售商批发，如果能按照当月售出的商品数量来批发，他就能获取最大利润，但当月售出的商品数是不可能事先确定的，即是一个随机现象. 如果批发的商品数太多，则会影响资金的周转，甚至会导致蚀本；反之，批发的数量太少，又会造成供不应求而损失一部分利润. 因此，为了确定能获取最大利润的批发数量，就有必要去研究商品零售量这一随机现象.

仅就一次试验或观察而言，随机现象似乎带有偶然性，但经过人们长期的实践和研究后，发现随机现象在大量的重复或观察下，它的结果呈现某种规律性，下面这个著名的例子就表明了这种规律性.

大量重复地掷一枚硬币，出现正面向上和反面向上的次数比例近似 1∶1；掷的次数越多，越接近这个比例. 历史上有一些人做过这种试验，其结果见表 1—1.

表 1—1

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	频率
蒲丰	4 404	2 048	0.4650
德·莫根	4 092	2 048	0.5005
皮尔逊	12 000	6 019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005

以上例子说明，在相同的条件下大量重复进行某一试验时，各种可能结果的频率具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的规律性. 人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

二、随机试验

要想了解随机现象的统计规律性，就必须对对象进行观察或者进行科学实验，概率论和数理统计学中把这种观察和科学实验统称为**试验**. 例如：

E_1：观察某一时间段内经过某地的各种车辆数；

E_2：记录某学生 10 次投篮投中的次数；

E_3：记录某位播音员在某个播音节目中发音的错误次数；

E_4：记录某种产品的使用寿命；

E_5：从编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个球中任意取出一个球，号码大于 10 的次数($n \geqslant 10$).

上述试验具有以下共同特征：

(1)可重复性：可以在相同条件下重复进行；

(2)可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且，在试验之前能明确试验的所有可能结果；

(3)不确定性：进行一次试验之前不能预知哪一个结果会出现.

我们将具有上述三个特征的试验称为**随机试验**，记为 E. 以后我们提到的试验指的都是随机试验.

三、样本空间

要认识一个随机试验，首先需要弄清楚它可能出现的各种基本结果. 这里“基本结果”是指随机现象的最简单的结果. 例如，掷一枚硬币，可能出现两个基本结果记为：

正面或反面

连续掷两次(把它看成一次试验)，可能出现四个基本结果记为：

(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)

从集合的观点看，基本结果就是集合的基本单元元素，故基本结果又称为**样本点**，记为 ω. 随机试验中所有样本点的全体称为这个随机试验的**样本空间**，记为 Ω. 对于一个具体的问题，确定一个相应的样本空间是研究随机现象的第一步.

例 1 一正立方体，六个面分别涂以红、黄、蓝、白、黑、绿六种颜色，任意抛掷一次，观察其朝上一面的颜色，则样本点为六种颜色中的一种，可能出现的全部结果为：

$$\Omega = \{红、黄、蓝、白、黑、绿\}$$

如果把这个正方体做成骰子，则 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$，这两个样本空间在本质上应该是一样的.

例 2 考察某计算中心在未来某一段时间内所收到的来自各终端的请求次数，其可能结果为某一非负整数，且次数可能很大，难以规定一个合适的上界. 因此，取样本空间 $\Omega = \{0,1,2,\cdots\}$ 较为适当.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例 3　定点计算中的舍入误差是解题精度分析中的一个重要问题.对于不同的问题或不同的数据,由于舍入所造成的计算误差也是不同的,可以将这种误差看作是随机的,它的取值范围可以充满某一区间 $[-a,a]$(a 的大小与计算机的字长有关).这时,相应的样本空间 $\Omega=[-a,a]$,而每个样本点 ω 是 $[-a,a]$ 中的某个数.

例 4　打靶时,可以把靶面看成为一个无限平面,每个弹落点即样本点可以用坐标 (x,y) 表示,因此样本空间可取为 $\Omega=\{(x,y):-\infty<x,y<+\infty\}$.

由此可见,由于所考察的随机试验不同,因而相应的样本空间可能很简单也可能很复杂.但是即使在同一随机试验中,由于所关心的问题不同,对于样本空间也可以有不同的选取.例如打靶时,如研究的问题是弹落点所得的环数,样本空间可取为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,10\}$,这样就把问题大大简化了.因此,对于具体问题,怎样选取一个恰当的样本空间也是值得研究的.

四、随机事件

随机试验 E 的样本空间 Ω 的某类子集称为 E 的**随机事件**,简称**事件**,通常用大写字母 A,B,C,$\cdots$ 表示.在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.例如,在掷骰子的试验中,可以用 A 表示"出现点数为偶数"这个事件,若试验结果是"出现 6 点",就称事件 A 发生.特别地,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**.如例 1 中的试验有 6 个基本事件:{红},{黄},{蓝},{白},{黑},{绿}.每次试验中都必然发生的事件,称为**必然事件**.样本空间 Ω 包含所有的样本点,它是 Ω 自身的子集,每次试验中都必然发生,故它就是一个必然事件.因而必然事件我们也用 Ω 表示.在每次试验中不可能发生的事件称为**不可能事件**.空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它作为样本空间的子集,在每次试验中都不可能发生,故它就是一个不可能事件.因而不可能事件我们也用 $\varnothing$ 表示.

五、事件关系与运算

事件是一个集合,因而事件间的关系与事件的运算可以用集合之间的关系与集合的运算来处理.下面我们讨论事件之间的关系及运算.

(1) 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A **包含于**事件 B(或称事件 B **包含**事件 A),记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).$A\subset B$ 的一个等价说法是:如果事件 B 不发生,则事件 A 必然不发生.

(2) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与 B **相等**(或**等价**),记为 $A=B$.为了方便起见,规定对于任一事件 A,有 $\varnothing\subset A$.显然,对于任一事件 A,有 $A\subset\Omega$.

(3)"事件 A 与 B 中至少有一个发生"的事件称为 A 与 B 的**并**(或**和**),记为 $A\cup B$(或 $A+B$).

由事件并的定义,立即得到:对任一事件 A,有:

$$A\cup\Omega=\Omega\quad A\cup\varnothing=A$$

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生"这一事件.

(4)"事件 A 与 B 同时发生"的事件称为 A 与 B 的**交**(或**积**),记为 $A\cap B$(或 AB).

由事件交的定义,立即得到:对任一事件 A,有:

$$A\cap\Omega=A\quad A\cap\varnothing=\varnothing$$

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$ 表示"n 个事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 同时发生"这一事件.

(5)"事件 A 发生而 B 不发生"的事件称为 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$.

由事件差的定义,立即得到:对任一事件 A,有:

$$A-A=\varnothing \quad A-\varnothing=A \quad A-\Omega=\varnothing$$

值得注意的是,$A-B$ 成立,不要求 $A\supset B$.

(6) 如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生,则称事件 A 与 B 为**互不相容**(或**互斥**),记作 $A\cap B=\varnothing$.

基本事件是两两互不相容的.

(7) 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**(或**对立事件**). A 的对立事件记为$\overline{A}$,$\overline{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的事件,它表示"A 不发生"这样一个事件. 显然$\overline{A}=\Omega-A$.

在一次试验中,若 A 发生,则$\overline{A}$ 必不发生(反之亦然),即在一次试验中,A 与$\overline{A}$ 两者只能发生其中之一,并且也必然发生其中之一. 显然有$\overline{\overline{A}}=A$.

对立事件必为互不相容事件;反之,互不相容事件未必为对立事件.

以上事件之间的关系及运算可以用文氏(Venn)图来直观地描述. 若用平面上一个矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示样本点,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,则 A 与 B 的各种关系及运算如图 1－1 所示.

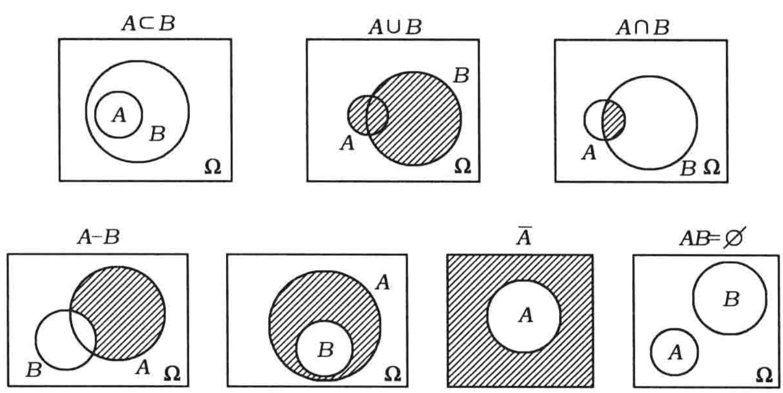

图 1－1

六、事件的运算规律

事件的运算有与集合的运算相同的运算规律,读者可以自行验证以下运算规律:

(1)交换律

$$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$$

(2)结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

(3)分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

(4)对偶律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

上述各运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

例 5　某射手向目标射击三次,用 A_i 表示第 i 次击中目标,$i=1,2,3$. 试用 A_i 及其运算符号表示下列事件:

(1)三次都击中目标;

(2)至少有一次击中目标;

(3)恰好有两次击中目标;

(4)最多有一次击中目标;

(5)至少有一次不击中目标;

(6)三次都不击中目标.

解

(1)三次都击中目标:$A_1A_2A_3$;

(2)至少有一次击中目标:$A_1\cup A_2\cup A_3$;

(3)恰好有两次击中目标:$A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$;

(4)最多有一次击中目标:$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

(5)至少有一次不击中目标:$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}=\overline{A_1A_2A_3}$;

(6)三次都不击中目标:$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$.

例 6　在数学系的学生中任选一名学生. 若事件 A 表示被选学生是男生,事件 B 表示该学生是三年级学生,事件 C 表示该学生是运动员.

(1)叙述 $AB\overline{C}$的意义.

(2)在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3)在什么条件下$\overline{A}\subset B$ 成立?

解

(1)该学生是三年级男生,但不是运动员.

(2)全系运动员都是三年级男生.

(3)全系女生都在三年级.

习题 1.1

1. 一盒中装有 5 个同样的零件,其中编号为 1,2,3 的是正品零件,编号为 4,5 的是次品零件. 现从盒中先后取出 2 个零件,试写出:

(1)该试验的样本空间;

(2)取出的第一个零件是次品的事件 A;

(3)取出的第一个零件是正品而第二个是次品的事件 B;

(4)取出的 2 个零件均为次品的事件 C.

2. 某学生做 3 道习题. A,B,C 分别表示第一、二、三题做对. 试用 A,B,C 的运算关系表

示下列事件：

(1)第一题做对，第二、三题做错；

(2)第一、二题做对，第三题做错；

(3)3 题都做对；

(4)3 题都做错；

(5)3 题中至少有 1 题做对；

(6)3 题中至少有 2 题做对；

(7)3 题中不多于 1 题做对；

(8)3 题中恰有 2 题做对.

3. 说出下列各对事件的关系：

(1)$|x-a|<\delta$ 与 $x-a\geqslant\delta$；

(2)$x>20$ 与 $x\leqslant 20$；

(3)$x>20$ 与 $x<18$；

(4)$x>20$ 与 $x\leqslant 22$；

(5)20 个产品全是合格品与 20 个产品中只有一个废品；

(6)20 个产品全是合格品与 20 个产品中至少有一个废品.

4. 用步枪射击目标 5 次，设 A_i 为"第 i 次击中目标"($i=1,2,3,4,5$)，B 为"5 次中击中次数大于 2"，用文字叙述下列事件：

(1) $A=\sum\limits_{i=1}^{5}A_i$　(2) $\overline{A}$　(3) $\overline{B}$

第二节　随机事件的概率

在一次试验中，一个事件(除不可能事件与必然事件外)可能发生也可能不发生. 我们观察试验中的各个事件，常会发现有些事件在一次试验中发生的可能性较大，而另一些事件发生的可能性较小. 例如，在抛一颗骰子观察它的点数的试验中，事件"出现偶数点"比事件"出现 1 点"发生的可能性要大. 我们希望对每个事件能指定一个数，能用它来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小. 下面先从"频率"讲起.

一、频率

定义 1.1　在相同的条件下将试验重复进行 n 次，在 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数，而比值 n_A/n 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率，记为 $f_n(A)$.

频率具有如下基本性质：

(1)对任何事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2)$f_n(\Omega)=1$；

(3)有限可加性：对任意 m 个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，有

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

例 1　将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 10 遍，得到数据如表 1－2 所示，其中 n_H 表示正面 H 发生的频数，$f_n(H)$表示正面 H 发生的频率.

表 1－2

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表 1－1 和表 1－2 可以看出，当 n 较小时，频率 $f_n(H)$在 0 与 1 之间随机波动，而当 n 充分大时，频率的这种波动性明显减小，$f_n(H)$总是在常数 0.5 附近摆动，随着 n 逐渐增大，$f_n(H)$逐渐稳定于 0.5.

例 2　考察新生婴儿的性别. 表 1－3 给出了波兰 1927～1932 年出生的婴儿总数，以及其中的男婴数.

表 1－3

年份	1927	1928	1929	1930	1931	1932	共计或平均
出生数	958 733	990 993	994 101	1 022 811	964 573	934 663	5 865 874
男婴数	496 544	513 654	514 765	528 072	496 986	482 431	3 032 452
频率	0.518	0.518	0.518	0.516	0.515	0.516	0.517

"出生男婴"是一个随机事件. 在任何个别情况下，我们不能预知新生婴儿的性别，但是经过对很多新生婴儿的性别作观察，例如从表 1－3 中看到出生男婴的频率在 0.517 附近徘徊. 拉普拉斯(1794～1827 年)在他的名著《概率论的哲学探讨》中研究了男婴出生的频率. 他对伦敦、彼得堡、柏林和法国的大量人口资料进行了研究，发现男婴出生频率几乎完全一致，并且这些男婴出生频率总在一个数左右徘徊，这个数大约是 22/43. 另一位统计学家克拉梅(1893～1985 年)在他的名著《统计学数学方法》中引用了瑞典 1935 年的官方统计资料，该资料表明，出生男婴的频率稳定在 0.518 左右.

大量试验证实，当重复试验的次数 n 增大时，随机事件 A 发生的频率 $R_n(A)$，总呈现出稳定性，稳定在某一个常数的附近. 这是随机现象固有的性质. "频率的稳定性"就是我们通常所

说的统计规律性. 这也是下面我们定义事件概率的客观基础.

二、概率的定义

定义 1.2(概率的统计定义) 在相同条件下重复进行 n 次试验,当试验次数 n 充分大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$稳定地在某一常数 $p(p\in[0,1])$附近摆动,则称常数 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)=p$.

虽然,统计概率具有与频率完全相同的三条基本性质.

任何一个数学概念都是对现实世界的抽象,这种抽象使得其具有广泛的适用性. 概率的统计定义为概率提供了经验基础,但是不能作为一个严格的数学定义. 从概率论有关问题的研究算起,经过近 3 个世纪的漫长探索历程,人们才真正完整地解决了概率的严格数学定义. 1933 年,苏联著名数学家柯尔莫哥洛夫在他的《概率论的基本概念》一书中给出了现在已被广泛接受的概率公理化体系,第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上.

定义 1.3(概率的公理化定义) 设 E 是随机试验,Ω 是它的样子空间,A 是其中的任意一个事件,与 A 对应的一个实数 $P(A)$如果满足:

(1)非负性:$1\geqslant P(A)\geqslant 0$;

(2)完备性:$P(\Omega)=1$;

(3)可列可加性:若 $A_1,A_2,\cdots$互不相容,则有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$. 称 $P(A)$为事件 A 的概率.

三、概率的性质

由概率的公理化定义可推出概率的一些重要性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

证 令
$$A_n=\varnothing \qquad (1,2,\cdots)$$
则
$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_n=\varnothing,\text{且 } A_iA_j=\varnothing \qquad (i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$$
由概率的可列可加性,得:
$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)$$
而由 $P(\varnothing)\geqslant 0$ 及上式,知 $P(\varnothing)=0$.

这个性质说明:不可能事件的概率为 0. 但逆命题不一定成立.

性质 2(有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容事件,则有:
$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_i)$$

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则 $A_iA_j=\varnothing$,当 $i\neq j,i,j=1,2,\cdots$时,由可列可加性,得:
$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$$

性质 3 设 A、B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有:
$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$
$$P(A)\leqslant P(B)$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com