米库辛斯基算符演算和积分变换

MIKUXINSIJI
SUANFU YANSUAN HE JIFEN BIANHUAN

周之虎　编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

米库辛斯基
算符演算和积分变换

周之虎　编 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安 徽 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

米库辛斯基算符演算和积分变换 / 周之虎编著. —合肥 : 安徽大学出版社，2014.2

ISBN 978-7-5664-0700-9

Ⅰ.①米… Ⅱ.①周… Ⅲ.①米库辛斯基算子演算 Ⅳ.①O141.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 018648 号

米库辛斯基算符演算和积分变换

周之虎　编著

出版发行：北京师范大学出版集团
　　　　　安 徽 大 学 出 版 社
　　　　　(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
　　　　　www.bnupg.com.cn
　　　　　www.ahupress.com.cn

印　　刷：安徽省人民印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×240mm
印　　张：7.75
字　　数：147 千字
版　　次：2014 年 2 月第 1 版
印　　次：2014 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：18.00 元
ISBN 978-7-5664-0700-9

策划编辑：李　梅　张明举
责任编辑：张明举　武溪溪
责任校对：程中业
装帧设计：李　军
美术编辑：李　军
责任印制：赵明炎

前 言

随着社会的发展和时代的进步，数学发展已成为高科技的突出标志和重要组成部分。我们知道，信号从模拟信号发展到数字信号，信号处理也从模拟信号处理发展到了数字信号处理，从事电子、通讯、雷达、声呐、导航、遥测、遥感、遥控以及各种信号处理等工作需要更多的积分变换知识。众所周知，关于积分变换方面的专著和教材国内外已不少。仅就教材而言，学生不但需要具有基本的微积分（包括一元和多元微积分、级数、常微分方程基本理论等）知识外，还需要掌握复变函数积分（包括复变函数积分的留数理论等）的知识，而大多数工科院校各专业均未开设复变函数课程，而机电、信息各专业很多后继课程又需要相当多的积分变换知识。为了解决实际中的困难，更好地为学生服务，作者参照世界著名的波兰数学家杨·米库辛斯基（J·Mikusinski）教授在20世纪50年代创建的算符演算理论以及其所著《算符演算》（*Operational Calculus*）基础上，并结合自己的研究成果，编写本书。

米库辛斯基算符演算和积分变换，较之一般的以拉普拉斯（Laplace）或其他变换为基础的算符演算理论更为简单和普遍；我们不提其理论的数学自身的伟大意义，仅就这一理论的广阔的应用前景，对于工程技术人员来说是非常有意义的；因为理解和应用这一理论只需要具备普通的微积分知识和一定的数学理解能力.

本书主要介绍了复变函数的概念及其基本结论、米库辛斯基算符演算的基本理论、直接方法和拉普拉斯（Laplace）变换、常系数线性微分方程和差分方程的Mikusinski算符解法、傅里叶变换。力求避开多元函数微积分和较深的复变函数积分理论，较快、较好地使读者能够掌握积分变换的基本知识，更好地为学生服务，为此作者在章节安排和内

容上进行了大胆的尝试。

本书是蚌埠学院周之虎教授、董毅教授主持的高等数学省级教学团队建设项目(项目编号:20101093)的一部分。

本书可以作为电子、通讯、雷达、声呐、导航、遥测、遥感、遥控以及各种信号处理专业的入门教材,以及从事上述研究的信息科学和技术工作人员的参考书。

鉴于编者水平有限,错误或不妥之处在所难免,恳请读者指正。

周之虎

2013年6月

目 录

第 1 章

复变函数的概念及其基本结论

本章主要讲述复变函数的概念及其基本性质，力求避开较高深的复变函数积分理论而给出积分变换.

§1.1　复平面上的区域

如果要给出复变函数概念，就要像给出实变函数概念一样，考虑它的自变量变化范围. 在如下的讨论中，变化范围主要指的是所谓区域.

1. 区域的概念

在讲区域概念之前，先介绍复平面上一点的邻域概念.

平面上以 z_0 为中心，δ(某一正数) 为半径的圆的内部的点集合

$$U(z_0,\delta)=\{z \mid |z-z_0|<\delta\}$$

称为 z_0 的一个 δ 邻域，简称 z_0 的邻域；而称

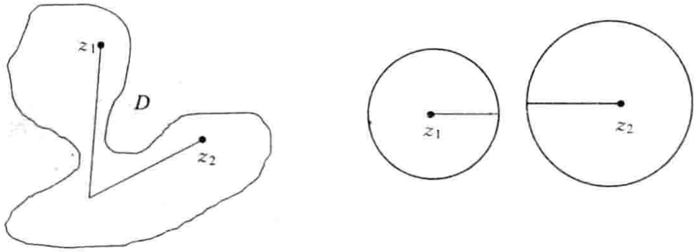
$$U(z_0,\delta)-\{z_0\}=\{z \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个去心的 δ 邻域，简称 z_0 的去心邻域.

设 D 为一个平面点集，$z_0\in D$，若存在 $\delta>0$，使得 $U(z_0,\delta)\subset D$，则称 z_0 为 D 的一个内点. 若 D 中的每个点均为内点，则称 D 为开集.

若对 D 中任两点都可用完全含于 D 的一条折线连接起来，则称 D 是连通集.

如图 1-1(a) 为连通的集合，而图 1-1(b) 则不然；因为前者内的任两点可用一条完全属于 D 的折线连接起来，而后者则不能.



(a) (b)

图 1-1

定义 1.1 称平面点集 D 为区域,若 D 是连通的开集.

例如 $U(z_0,\delta)$ 为区域,$U(z_0,\delta)-\{z_0\}$ 为区域,而 $\overline{U}(z_0,\delta)=\{z\mid |z-z_0|\leq\delta\}$不是区域,其原因是区域 $\overline{U}(z_0,\delta)$ 多了一个边界 $\{z\mid |z-z_0|=\delta\}$,而此边界上的点不是内点.我们称一个区域 D 和其边界合在一起为 D 的闭区域,记为 $\overline{D}$.一般说来,一个区域和其闭区域是不相同的,唯有空集 $\varnothing$ 和整个复平面既是区域又是闭区域;因为前者不含任何点,而后者没有边界.

另外,我们还知道如图 1-1(b) 的平面点集不是区域,因为它不具有连通性.

若一个区域 D 能够包含在一个以原点为中心的圆内,即存在 $M>0$,使得 $D\subset\{z\mid |z|<M\}$,则称 D 为有界区域,否则称为无界的.

容易知道圆域$\{z\mid |z-a|<R\}$、圆环$\{z\mid r<|z-a|<R\}$均为有界区域,而圆的外部$\{z\mid |z-a|>R\}$和带状域$\{z\mid a<\mathrm{Im}(z)<b\}$均是无界区域.

2. 单连通区域和多连通区域

我们知道,若 $x(t)$,$y(t)$ 是两个连续的实变函数,则方程组

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}(a\leqslant t\leqslant b)$$

表示一条平面曲线并称其为连续曲线.若令

$$z(t)=x(t)+iy(t),$$

则这一平面(复平面)曲线就可用一个方程

$$z=z(t),\qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

来表示,亦即平面曲线的复数表示式.若在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上,$x'(t)$,$y'(t)$ 均为连续的,且对 t 的每一个值,有

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0,$$

则称该曲线为光滑的. 从几何直观看,光滑曲线上任一点 P 具有唯一的一条切线(当 $x'(t) \neq 0$ 时,该点切线斜率为 $y'(t)/x'(t)$;当 $x'(t) = 0$ 时,该点切线平行于 y 轴),并且切线的方向随着 P 点在曲线上连续变动而连续改变. 如果一条平面曲线由有限段光滑曲线依次相接而成,则称此曲线为分段光滑曲线. 对于分段光滑曲线来说,在光滑曲线的连接点处可以没有切线.

设有一条连续曲线

$$C: z = z(t), \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

若 $z(a) = z(b)$,且当 $t_1 \neq t_2$ 时,t_1, t_2 中至少有一个不为 a 或 b,有 $z(t_1) \neq z(t_2)$,则称曲线 C 为简单闭曲线. 依几何观点看,简单闭曲线即为平面上无重点的封闭曲线. 一条简单闭曲线 C 将平面分成两个区域,其曲线 C 的内部是有界区域,而其外部则是无界区域.

定义 1.2　设 D 为一个区域,若 D 中任一条简单闭曲线所围内部仍属于 D,则称 D 为单连通域(图 1-2(a));不是单连通的区域称为多连通区域(图 1-2(b)).

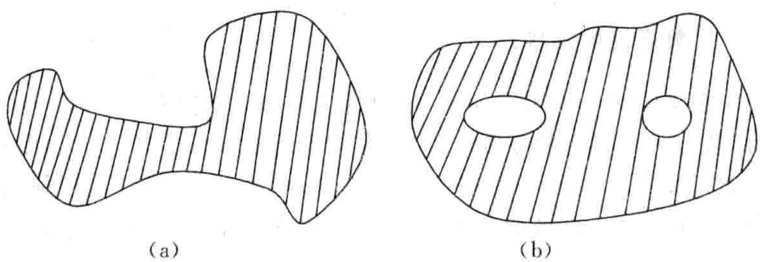


图 1-2

§1.2　复变函数

定义 1.3　设 G 为一复数集合,若对每个 $z = x + iy \in G$,依照一个确定的法则 f,有一复数 $\omega = u + iv$ 与之对应,则称 ω 为复变数 z 的函数,简称复变函数,记为 $\omega = f(z)$.

若对每个 $z \in G$,都有唯一的 ω 与之对应,则称函数 $\omega = f(z)$ 为单值的,否则称为多值的.

G 为函数 $\omega = f(z)$ 的定义集合,而 $R(G) = \{\omega \mid \omega = f(z), z \in G\}$ 为

函数 $\omega = f(z)$ 的值集. 特别地，当 G 和 $R(G)$ 均为实数集时，$\omega = f(z)$ 为实函数；而当 G 为实数集，$R(G)$ 为复数集时，则称 $\omega = f(z)$ 为复值函数.

由于给定复数 $z = x + iy$ 相当于给定了两实数 x 和 y，而复数 $\omega = u + iv$ 也同样地对应着一对实数 u 和 v，故 ω 和 z 之间的函数关系 $\omega = f(z)$ 相当于如下两个二元函数关系

$$u = u(x,y), v = v(x,y),$$

则 $\omega = u(x,y) + iv(x,y)$ 即为复变函数 $\omega = f(z)$.

例如，$\omega = z^2$，令 $z = x + iy$ 得

$$\omega = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

即复变函数 $\omega = z^2$ 对应两个二元实变函数

$$u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy.$$

§1.3　复变函数的极限和连续性

1. 复变函数的极限

定义 1.4　设函数 $\omega = f(z)$ 定义在 z_0 的邻域 $0 < |z - z_0| < P$ 内，若有一个确定的复数 A 存在，使对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta(\varepsilon) > 0$（限制 $0 < \delta \leq P$），当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 成立，则称 $\omega = f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时极限存在，且 A 为其极限值，记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$，或记 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

应当注意，z 趋向 z_0 的方式是任意的，而不是沿某一特殊路径.

定理 1.1　设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，$A = u_0 + iv_0$，$z_0 = x_0 + iy_0$，则 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ 的充要条件是[①]

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0, \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

证明：若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$，根据极限定义，对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当

① 这里二元函数的极限即为高等数学中所定义的，可参看同济大学数学教研室编《高等数学》（第六版）（下）.

$0<|(x+iy)-(x_0+iy_0)|<\delta$ 时,恒有 $|(u+iv)-(u_0+iv_0)|<\varepsilon$,即当

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时,有

$$|(u-u_0)+(v-v_0)i|<\varepsilon.$$

从而有当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,恒有

$$|u-u_0|<\varepsilon,|v-v_0|<\varepsilon$$

成立,即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0$,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0$.

反之,若上面两式成立,则当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时有 $|u-u_0|<\varepsilon/2$,$|v-v_0|<\varepsilon/2$,而

$$|f(z)-A|=|(u-u_0)+(v-v_0)i|\leq|u-u_0|+|v-v_0|,$$

即当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时有

$$|f(z)-A|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$.

这个定理将求复变函数的极限转化为求两个二元函数的极限.

定理 1.2　若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$,$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$,则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)\pm g(z))=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB$;

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)/g(z)=A/B$,$(B\neq 0)$.

这些极限运算法则,可与实变函数一样,直接从定义出发予以证明,但也可利用定理 1.1 来证明.例如定理 1.2 中(2)的证明如下.

证明:令 $f(z)=u_1+iv_1$,$g(z)=u_2+iv_2$.又设当 $z\to z_0$ 时,

$$f(z)\to A=a+ib,g(z)\to B=c+id.$$

因此当 $x\to x_0$,$y\to y_0$(这里 $z_0=x_0+iy_0$),有

$$u_1\to a,v_1\to b,u_2\to c,v_2\to d.$$

又由

$$f(z)g(z)=(u_1+iv_1)(u_2+iv_2)=u_1u_2-v_1v_2+i(u_1v_2+u_2v_1),$$

$$u_1u_2-v_1v_2\to ac-bd,u_1v_2+u_2v_1\to ad+bc,$$

因而

$$f(z)g(z)=(ac-bd)+i(ad+bc)=(a+ib)(c+id)=AB.$$

2. 复变函数的连续性

定义 1.5 设 D 为一个区域，$z_0 \in D$，函数 $f(z)$ 在 D 内有定义。若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称函数 $\omega = f(z)$ 在 z_0 点连续. 若 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点均连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

由定义 1.5 和定理 1.1 得：

定理 1.3 函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 点连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例如 $f(z) = ln(x^2+y^2) + i(x^2-y^2)$ 除原点外处处连续，此因 $u = ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续，而 $v = x^2 - y^2$ 是处处连续的.

由定理 1.2 和定理 1.3 可得：

定理 1.4 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数. 连续函数的复合函数仍为连续函数.

根据上述定理，我们可以推得多项式函数(多项式)

$$\omega = P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

在复平面上连续，而有理分式函数

$$\omega = \frac{P(z)}{Q(z)} (P(z), Q(z) \text{ 均为关于 } z \text{ 的多项式})$$

在分母不为零的点处是连续的.

例 1 函数 $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right)$ 当 $z \to 0$ 时的极限不存在.

证明：$f(z) = \dfrac{1}{2i}\dfrac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z}} = \dfrac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{2i\,|z|^2}$

$$= \frac{2\mathrm{Re}(z) \cdot 2i\mathrm{Im}(z)}{2i\,|z|^2} = \frac{2\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z)}{|z|^2}.$$

令 $z = x + iy$，则有 $f(z) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，即有

$$u(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, v(x,y) = 0.$$

令 z 沿直线 $y = kx$ 趋于零，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} u(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2},$$

即沿不同斜率的直线，$u(x,y)$ 趋于不同的值，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ 不存在. 由

定理 1.1 得 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

例 2　若 $f(z)$ 在 z_0 点连续,则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 点也连续.

证明:设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$,则 $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$. 由定理 1.3 得 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 点连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续,即 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 点连续.

§1.4　解析函数

1. 导数的定义

定义 1.6　设复变函数 $\omega = f(z)$ 定义于区域 D,z_0 为 D 中的一点,且 $z_0 + \Delta z \in D$. 若极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在,则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导,这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 点的导数,记作

$$f'(z_0) = \left.\frac{d\omega}{dz}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

若函数 $f(z)$ 在 D 内的每一点均可导,则称 $f(z)$ 在 D 内可导.

例 1　求函数 $f(z) = z^2$ 的导数.

解:
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z,$$

故 $f'(z) = 2z$.

例 2　函数 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?

解:这里
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - x - 2yi}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}. \tag{*}$$

在（*）式中，令$\Delta x \to 0, \Delta y = 0$，这时极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

在（*）式中，令 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$，此时极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2\Delta y i}{\Delta y i} = 2.$$

因此，函数 $f(z)$ 在 z 点不可导.

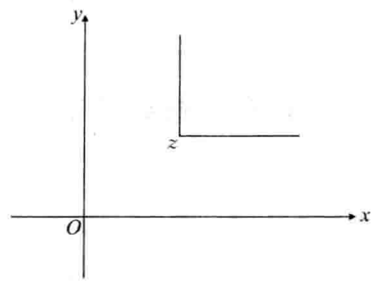


图 1-3

由例 2 可知，复变函数的导数与通常实变函数的导数相差甚远.

定理 1.5 若函数 $\omega = f(z)$ 在 z_0 点可导，则 $f(z)$ 必在 z_0 点连续. 反之未必.

定理 1.5 的证明方法同实变函数一样，这里从略.

下面仅给出几个今后有用的求导法则：

(1) $(C)' = 0$，其中 C 为复常数.

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$，其中 n 为自然数.

(3) $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$.

(4) $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(5) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{1}{g^2(z)}(f'(z)g(z) - f(z)g'(z)), g(z) \neq 0$.

(6) $(f(g(z)))' = f'(\omega)g'(z)$，这里 $\omega = g(z)$.

(7) $f'(z) = \dfrac{1}{\boldsymbol{C}'(\omega)}$，其中 $\omega = f(z)$ 与 $z = \boldsymbol{C}(\omega)$ 是两个互为反函数的单值函数，且 $\boldsymbol{C}'(\omega) \neq 0$.

2. 解析函数

解析函数的概念在复变函数理论中极为重要.

定义 1.7 设函数 $f(z)$ 在 z_0 点的邻域内可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解

析. 若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.

例 3　研究函数 $f(z)=z^2$，$f(z)=x+2yi$ 和 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解：由例 1 知 $f(z)=z^2$ 处处解析；由例 2 知 $f(z)=x+2yi$ 处处不解析；下面研究 $f(z)=|z|^2$ 的解析性. 由于

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)$$

$$=\overline{z_0}+\lim_{\Delta z\to 0}z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

当 $z_0=0$ 时，上式极限为零.

当 $z_0\neq 0$ 时，记 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，其中 $\Delta y=k\Delta x$，则由

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1-i\Delta y/\Delta x}{1+i\Delta y/\Delta x}=\frac{1-ik}{1+ik}$$

以及 k 的任意性知上述极限趋于不确定的值，故

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

不存在. 因此，$f(z)=|z|^2$ 在 $z_0=0$ 点可导，而在其它点不可导. 据解析性定义知，该函数在复平面上的每一点均不解析.

根据求导法则，不难证明：

定理 1.6　两个解析函数的和、差、积、商(分母不为零) 都是解析函数；解析函数的复合函数仍为解析函数.

下面给出判断复变函数解析的条件.

定理 1.7　函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在其定义域 D 内解析的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内任一点可微，且满足柯西－黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

最后，我们给出关于解析函数的一个重要结论，它在第四章 §2 中非常有用，由于其证明需用到复变函数的积分，在此从略.

定理 1.8 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为 D 内的一点，R 为一正实数且使 $U(z_0,R)=\{z \mid |z-z_0|<R\}\subset D$，则当 $z\in U(z_0,R)$ 时，有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n$$

成立，其中 $c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$，$n=0,1,2,\cdots$.

例如有

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,$$

$$\sin z=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots+(-1)^{n-1}\,\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

习题 1

1. 描出下列不等式所确定的区域，并指出是有界的还是无界的，是否为闭区域，是单连通域还是多连通域.

(1)$\mathrm{Im}(z)>0$　　(2)$|z-1|>4$

(3)$0<\mathrm{Re}(z)<1$　　(4)$2\leqslant|z|\leqslant 3$

(5)$|z-1|<|z+3|$　　(6)$1<\mathrm{Arg}z<\pi$

(7)$|z-2|+|z+2|\leqslant 6$

2. 证明复平面上的任何直线方程都可写成

$$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=c,$$

其中 $\alpha\neq 0$ 为复常数，c 为实常数.

3. 证明若 $f(z)$ 在 z_0 处连续，则 $|f(z)|$ 在 z_0 点也连续.

4. 讨论函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 内的连续性.

5. 试按导数定义，讨论下列函数的可导性.

(1)$f(z)=\bar{z}$

(2)$f(z)=\mathrm{Re}(z)$

(3)$f(z)=z\mathrm{Re}(z)$