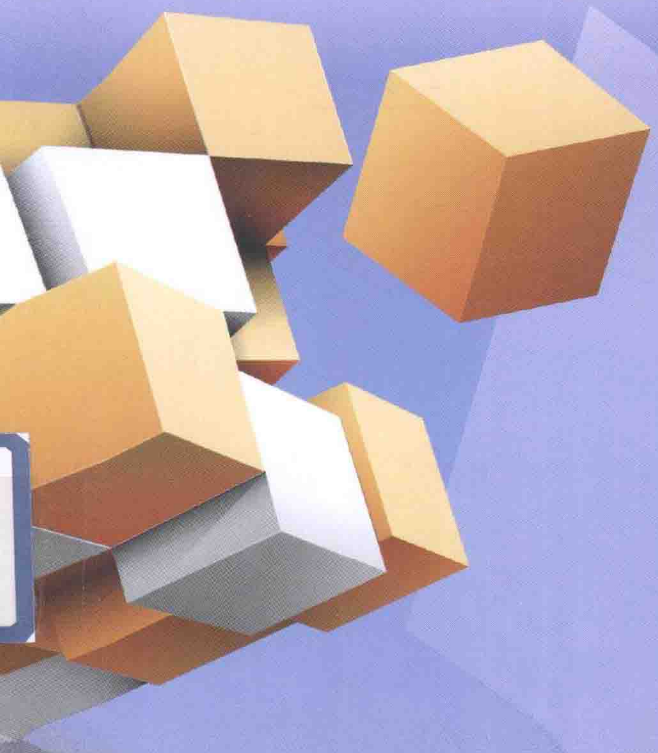
高素质应用型本科系列规划教材

微积分学

CALCULUS

主　编　胡清林
副主编　肖继红　陈相兵

（下册）



四川大学出版社

高素质应用型本科系列规划教材

微积分学

CALCULUS

（下册）

主　编　胡清林
副主编　肖继红　陈相兵
参　编　张志银　程开敏

四川大学出版社

前 言

恩格斯(F. Engels，1820—1895)指出:“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看做人类精神的最高胜利了.”

数学大师、世界三大智力英雄之一、中国科学院外籍院士陈省身(Shiing－Shen Chern)教授说:“为什么要搞数学呢?答案很简单:其他的科学要用数学.”他还告诫青少年:“数学是一切科学的基础，数学的训练能激发人的创造力，提高思维的逻辑性.”为培养应用型人才的需要，本书的编写遵循重视基本训练、培养基本能力、尽量贴近实际应用的原则.凡事从根做起，引入中学常用的数学公式，突出了微积分的基本思想和基本方法，使学生易于掌握各部分内容之间的内在联系.弱证明，重应用，让学生从整体上了解微积分的产生背景和发展方向.本书例题多，强调解题思路，便于让学生熟悉计算过程，精通解题技巧，提高解题能力.

本教材按照精品课程的要求，坚持改革，反复实验，尽力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果和最高水平，体现创新教学理念.应用张景中院士教育数学科学中的研究成果，把微积分大门的高门槛——$\varepsilon-N$，$\varepsilon-\delta$ 等逻辑语言换成容易理解的代数语言，我们称这种代数语言为张语言.

本书尝试与数学实验、数学建模有机结合的教学方式，推动传统教学方式与多媒体现代教育技术的融合，在每章末编写了数学实验与数学建模的有关内容，搭建了数学成为“数学技术”的平台，以加强对学生实践能力的培养.我们以Matlab软件为工具，可以在计算机上完成函数作图、极限、导数、积分等运算.

本书由1992年加拿大第七届国际数学教育大会(ICME－7)、1996年西班牙第八届国际数学教育大会(ICME－8)及第二十四届国际数学家大会(ICM2002)正式代表，国家课题FIB070335－B2－14首席科学家，四川大学锦江学院理工微积分精品课程主持人、统计系胡清林(Ching－Lin Hu)教授主编，该精品课程组主研人肖继红、陈相兵任副主编及成员张志银、程开敏等参编.另外，胡晓、刘丹丹、王李会、李小杰、董洪英为本书的出版做了部分录入、校对工作.课题组应用美国著名教育心理学家布卢姆(B. S. Bloom)的“掌握学习教学策略”认知思想指导编写，“传统观念认为只有少数学生能够学好，习惯用正态曲线来划分等级的做法是不科学的，有害的.提供足够的时间与适当的帮助，95%的学生能够学习一门学科，并达到高水平的掌握.”本教材为便于分层教学，内容分上、下两册出版.书末附有习题的参考答案.

国家课题 FIB070335－B2－14 主持人、原四川大学锦江学院统计系周厚隆主任对本书初稿作了详尽的审阅后，不久因病去世，在本书出版之际，我们深切地缅怀在四川大学数学学院任教三十多年的周厚隆先生.

四川大学数学学院教授、四川大学锦江学院统计系陈鸿建主任在百忙中对本书作了认真的审阅，提出了许多宝贵的意见. 在此我们对陈鸿建教授表示衷心的感谢.

本书在编写过程中，自始至终得到了四川大学锦江学院张桂芳董事长、校长李志强教授、党委书记刘富德教授、副校长王金顺教授、副校长杨家仕教授、副校长林宇及教务处何志伟处长的关心和支持，我们在此表示深深的谢意.

由于水平所限，时间仓促，书中难免存在不足之处，敬请读者不吝赐教.

编　者

2012 年 2 月 16 日

目　　录

第 8 章　空间解析几何简介

空间解析几何是通过空间坐标系，用代数方法来研究空间几何问题的. 本章介绍矢量的一些基本运算，并以矢量为工具，讨论日常生活空间中的平面、直线、曲面和曲线的方程，以及关于它们的一些基本问题.

§8.1　空间直角坐标系

一、建立空间直角坐标系

在空间中取定一点 O 作为原点，通过 O 点作三条相互垂直的数轴，分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴，统称为坐标轴. 三个坐标轴上的单位长度通常都相同.

x 轴也叫横轴，y 轴也叫纵轴，置于水平面上；z 轴也叫立轴，取铅直方向. x 轴、y 轴、z 轴的次序和方向一般按右手法则排列：用右手握住 z 轴，四个手指从 x 轴的正方向旋轴 $90°$到 y 轴的正向时，拇指的指向就是 z 轴的正向. 按右手法则确定的坐标系称为右手系.

两条相交直线确定一个平面，由任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面. 三个坐标轴确定了三个坐标面. x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 坐标面，y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yOz 坐标面，z 轴和 x 轴所确定的平面称为 xOz 坐标面.

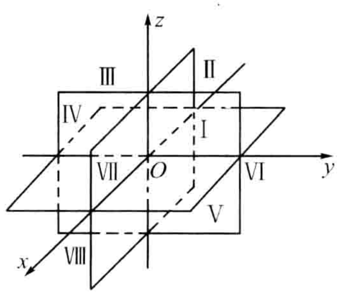


图 8－1

三个坐标面将整个空间分为八个部分，每一个部分称为一个卦限，含有 x 轴、y 轴和 z 轴的正半轴的那个卦限称为第一卦限，第二、第三、第四卦限都在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定；第五卦限在第一卦限的下方，第六、第七、第八卦限都在 xOy 面的下方，按逆时针方向确定. 这八个卦限分别用罗马数字Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ来表示，见图 8－1. 因坐标面是两两垂直的，故称为空间直角坐标系.

二、空间中点的坐标

在空间直角坐标系中，可建立空间中的点与有序数组之间的对应关系. 设 M 为空间中的一点，过此点作三个分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，它们与 x 轴、y 轴和 z 轴分别交于 P 点、Q 点和 R 点. 这三个点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x，y 和 z，空间

中的点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x, y, z)；反之，给定一个有序数组 (x, y, z)，则可分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上取坐标 x，y，z 的三个点 P，Q，R，过这三个点各作一个分别与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面，这三个平面有唯一的交点，这个交点就是有序数组 (x, y, z) 所确定的点 M，见图 8－2.

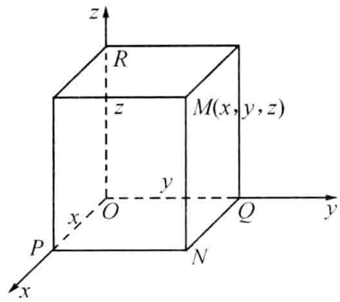


图 8－2

这样，在空间直角坐标系中，就建立了有序数组 (x, y, z) 与空间中的点 M 之间的一一对应关系. (x, y, z) 称为点 M 的坐标. 其中 x，y 和 z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和立坐标. 通常把一个点和表示这个点的坐标不加区别，所说的给定一点，就是给定这个点的坐标；所说的求一个点，就是求这个点的坐标.

特殊点的坐标：xOy 面上的点，立坐标 $z=0$；xOz 面上的点，纵坐标 $y=0$；yOz 面上的点，横坐标 $x=0$；z 轴上的点，横、纵坐标均为零，即 $x=0$，$y=0$. 同样，x 轴上的点有 $y=0$，$z=0$；y 轴上的点有 $x=0$，$z=0$；原点的坐标为 $O(0, 0, 0)$.

从点 $M(x, y, z)$ 引垂直于 xOy 面的直线，直线与 xOy 面的交点 $N(x, y, 0)$ 称为点 M 在 xOy 面上的投影. 在 MN 的延长线上取一点 M'，使点 M' 到 xOy 面的距离等于点 M 到 xOy 面的距离，称点 M' 是点 M 关于 xOy 面的对称点，点 M' 的坐标为 $(x, y, -z)$. 类似地，点 M 关于 x 轴对称的点坐标为 $(x, -y, -z)$，关于原点对称点的坐标为 $(-x, -y, -z)$. 点 M 关于其他坐标面、坐标轴的对称点与此完全类似.

在同一卦限内，点的坐标的符号是一致的，不同卦限内点的坐标的符号不一样. 各卦限内的点的坐标 (x, y, z) 的符号如表 8－1 所示.

表 8－1　各卦限内点坐标的符号

卦限 / 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

三、两点间的距离公式

设空间中两点 $A_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $A_2(x_2, y_2, z_2)$，可用其坐标表示它们之间的距离 d. 过 A_1，A_2 两点各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成以 A_1A_2 为对角线的长方体. 由勾股定理得

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特殊情况下，点 $A(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离公式为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1　在 y 轴上找一点 A，使点 A 到点 $B(3, 2, 8)$ 与点 $C(0, 0, 6)$ 的距离相等.

解　因为所求点在 y 轴上，故点 A 的坐标应为$(0, y, 0)$．根据题意，有

$$\sqrt{(0-3)^2+(y-2)^2+(0-8)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(y-0)^2+(0-6)^2},$$

解得 $y=\frac{41}{4}$，即点 A 的坐标是$\left(0, \frac{41}{4}, 0\right)$.

练习题 8－1

1. 在空间直角坐标系中，标出下列各点的位置.

$P(0, 2, 1)$，$Q(2, 3, 0)$，$N(1, -3, 5)$，$M(1, 0, 4)$，$S(3, -1, 1)$

2. 一边长为 b 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求这个立方体各顶点的坐标.
3. 求出点 $M(2, -1, 3)$关于原点、三个坐标轴、三个坐标面对称点的坐标.
4. 在 yOz 面上，求与三点 $P(3, 1, 2)$，$Q(4, -2, -2)$，$M(0, 5, 1)$等距离的点.
5. 求点 $P(4, -3, 5)$到三个坐标轴的距离.

§8.2　矢量的线性运算及坐标

一、矢量的概念

既有大小又有方向的量叫矢量，也叫向量.

我们用有向线段来表示矢量，有向线段的长度代表矢量的大小，矢量的大小称为矢量的模，有向线段的方向表示矢量的方向，有向线段的始点与终点分别叫做矢量的始点与终点. 始点为 A、终点为 B 的矢量记为$\overrightarrow{AB}$，有时用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，…来记矢量，为了印刷方便，常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…来记矢量.

常用的符号：

(1)$|\overrightarrow{AB}|$：矢量$\overrightarrow{AB}$的模. 模等于 1 的矢量叫做单位矢量.

(2)$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$：矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等. 方向相同，模相等的两个矢量叫做相等矢量.

(3)$\vec{0}$ 或 $\boldsymbol{0}$：模等于零的矢量叫做零矢量，也就是始点与终点重合的矢量. 零矢量的方向是任意的，不确定的，而不是没有方向.

(4)$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$：方向相同或相反的矢量叫做平行矢量.

通常仅考虑矢量的方向与大小，而不考虑矢量的起点，这种矢量称为自由矢量. 因此，对于任意一个矢量在不改变大小和方向的条件下，可以任意移动. 平行于同一直线的一组矢量叫做共线矢量. 零矢量与任何共线的矢量组共线，平行矢量为共线矢量.

二、矢量的线性运算

1. 矢量的加减法

矢量的加法运算：设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个矢量，任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，那么以 O 为始点，B 为终点的矢量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这就是求两矢量加法的三角形法则. 由图 8－3 我们有矢量的求和公式：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}.$$

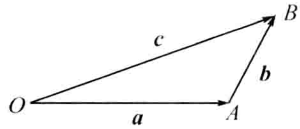


图 8－3

两个不共线的力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 作用在同一点 O 上，合力就是以这两个力的模为邻边的平行四边形的对角线为模的矢量 $\boldsymbol{F}$，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2.$$

从图 8－4 中显然可以看出 $\boldsymbol{F}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$，而

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB},$$

所以

$$\boldsymbol{F}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2.$$

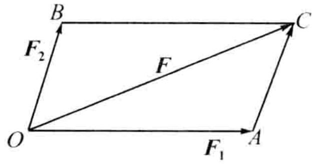


图 8－4

这种求矢量和的作图法叫做平行四边形法则.

求矢量和的两种作图法是不同的，三角形法则是接连作两个矢量，平行四边形法则从同一始点作两个矢量，但结果是一样的.

由矢量加法的三角形法则可知，当三个矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 首尾相接构成三角形时，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

当 n 个矢量相加时，可将这些矢量依次首尾相接，连接第一个矢量的起点与最后一个矢量的终点所得到的矢量即为所求的和.

矢量的减法运算：设矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的和等于矢量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，那么矢量 $\boldsymbol{c}$ 叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

由矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求它们的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的运算叫做矢量减法.

因为 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，

所以可得矢量的求差公式 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

这样，便得到两矢量的差的几何作图法：任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，那么，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为始点、$\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的矢量 $\overrightarrow{BA}$ 即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 8－5 所示.

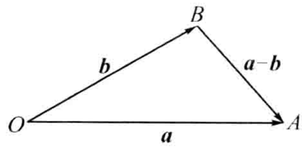


图 8－5

利用反矢量，可以把矢量减法运算转化为矢量加法运算，即减去一个矢量等于加上它的反矢量，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

2. 数量乘矢量

大家知道：力＝质量×加速度. 力与加速度都是矢量，质量是数量，如用 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{a}$ 与 m 分别表示力、加速度与质量，那么上面的公式可以写成

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}.$$

这表明两个矢量与数量有一种结合关系，特别是几个相同的非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 相加的情形，和矢量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的几倍，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. n 个 $\boldsymbol{a}$ 相加的和常记做 $n\boldsymbol{a}$. 一般地，矢量 $\boldsymbol{a}$ 与常数 λ 的乘积是一个矢量，记做 $\lambda\boldsymbol{a}$，并且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|.$$

当 $\lambda>0$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；当 $\lambda\neq0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$

总是平行的.

矢量加减法与数乘矢量的运算是线性运算，满足下列运算律：

(1)交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2)结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(3)分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

其中 λ，μ 是数量.

矢量的加法、减法以及数乘矢量的运算规律与代数中多项式的加、减法及数乘多项式的运算规律是相同的，因此对于矢量的加、减法及数乘矢量也可以像多项式那样进行运算.

例 1　化简 $8(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})+4(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解　$8(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})+4(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=8\boldsymbol{a}+24\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=16\boldsymbol{a}+20\boldsymbol{b}$.

例 2　在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，证明：$ABCD$ 是梯形.

证明　如图 8－6 所示.

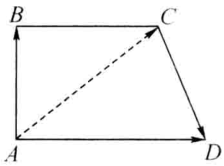


图 8－6

因为
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{AD}=(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})+(-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

所以
$$\overrightarrow{AD}=2\times(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\times\overrightarrow{BC}.$$

因此
$$|\overrightarrow{AD}|\neq|\overrightarrow{BC}|,\quad \overrightarrow{AD}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}.$$

故 $ABCD$ 是梯形.

定理 1　设矢量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则矢量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 k，使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

证明　根据矢量与数的乘积规定，可知充分性是显然的. 下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$，取 $k=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，取 $k>0$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，取 $k<0$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}$ 的方向总是相同的，且
$$|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

此式表明，矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}$ 的模相等，故 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

k 是否唯一？设存在两个数 k 与 h，使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}=h\boldsymbol{a}$ 均成立，两式相减，得
$$(k-h)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$
即
$$|k-h||\boldsymbol{a}|=0.$$

由于 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，故 $|k-h|=0$，即 $k=h$. 这就证明了实数 k 的唯一性.

3. 矢量的坐标表示式

我们把一矢量置于空间直角坐标系中，起点放在原点 $O(0,0,0)$，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，这种起点在原点的矢量叫做径矢. 过点 M 作三个分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，它们与三个坐标面围成一个长方体 $OPNQ-RHMK$，OM 是其对角线，见图 8－7. 根据矢量加法，有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OR},\quad \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ},$$

即
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

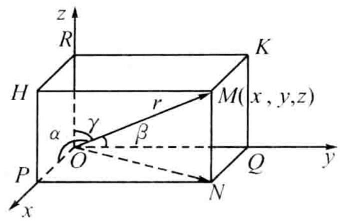


图 8－7

右端的三个矢量就是矢量$\overrightarrow{OM}$沿三个坐标轴方向的分矢量，也就是将矢量$\overrightarrow{OM}$分解成为三个相互垂直的矢量之和. 在 x 轴、y 轴和 z 轴上取与各轴正向相同的单位矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，显然$\overrightarrow{OP}\,/\!/\,\boldsymbol{i}$，存在数 x，使$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$；同理存在数 y，z，分别有$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$. 从而得

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

此式称为矢量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，称 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 为矢量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标轴上的分矢量. 给定了矢量$\overrightarrow{OM}$，就确定了有序数组(x, y, z)；反之，给定了有序数组(x, y, z)，就确定了矢量$\overrightarrow{OM}$. 即矢量$\overrightarrow{OM}$与(x, y, z)之间是一一对应关系，称 x，y，z 是矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标. 称$\overrightarrow{OM}=(x, y, z)$为矢量的坐标表示式. 于是，$(x, y, z)$既可以表示一点 $M(x, y, z)$，又可以表示一个径矢$\overrightarrow{OM}$. 表示点时用 $M(x, y, z)$，表示径矢时用 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x, y, z)$. (x, y, z)是表示点还是表示矢量，需从上下文去辨认. 显然，零矢量的三个坐标均为零.

坐标轴上单位矢量的坐标表示式为

$$\boldsymbol{i}=(1, 0, 0),\quad \boldsymbol{j}=(0, 1, 0),\quad \boldsymbol{k}=(0, 0, 1).$$

有了矢量的坐标表示式，就可以将原来由几何方法规定的矢量运算转化为矢量坐标之间的代数运算. 例如矢量$\overrightarrow{OM}$的模就是其起点 $O(0, 0, 0)$与终点 $M(x, y, z)$的距离，所以，将这两点的坐标代入距离公式，得模

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 3 已知 P 点在空间直角坐标系下的坐标为(x, y, z)，求作点 P.

解 因为 P 点的坐标为(x, y, z)，所以有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

以原点 O 为始点作$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}$，显然点 M 在 x 轴上，再以 M 为始点作$\overrightarrow{MN}=y\boldsymbol{i}$（$N$ 一定在 xOy 面上），再以 N 为始点作矢量$\overrightarrow{NP}=z\boldsymbol{k}$，连结 O，P（如图 8－8 所示）. 于是

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

所以点 P 的坐标为(x, y, z)，因此这点 P 就是所求的点.

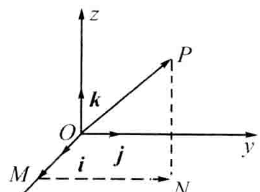


图 8－8

折线 $OMNP$ 叫做点 P 的坐标折线，根据点的坐标，可以利用坐标折线来确定点在空间的位置. 反之，用坐标折线法也可以确定空间一点的坐标.

例 4 已知有向线段的始点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，终点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$. 证明：分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$成定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$的分点 P 的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

证明 因为

$$\overrightarrow{O_1P}=\lambda\,\overrightarrow{PP_2},\quad \lambda\neq-1,$$

$$\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1},\quad \overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP},$$

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}=\lambda(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP}).$$

所以
$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}=(x, y, z).$$

将$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$的分量代入，得 P 点坐标为
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

4. 方向余弦

矢量的夹角：设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零矢量，把它们的起点置于同一点，并规定二者在 0 与 π 之间的那个夹角为两矢量的夹角，记为$\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. 规定：若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则$\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，则 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\pi$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $0<\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})<\pi$. 特别是当$\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$时，称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记做 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

矢量与坐标轴所成的角叫做矢量的方向角，方向角的余弦叫做矢量的方向余弦，一个矢量的方向完全可由它的方向角来决定.

设非零矢量 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$与 x 轴、y 轴和 z 轴正向的夹角分别是 α，β 和 γ，如图8－7所示，则
$$|\boldsymbol{r}|\cos\alpha=x,\quad |\boldsymbol{r}|\cos\beta=y,\quad |\boldsymbol{r}|\cos\gamma=z.$$
$$\cos=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|},\quad |\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

所以，
$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

以矢量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的矢量，就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位矢量. 记 $\boldsymbol{r}^0$ 是与 $\boldsymbol{r}$ 同向的单位矢量，即有
$$\boldsymbol{r}^0=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

例 5　已知 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，证明：矢量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标等于其终点的坐标减去其始点的坐标.

证明　因
$$\overrightarrow{OP_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\quad \overrightarrow{OP_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).\end{aligned}$$

例 6　已知两点 $M(1, 3, 0)$，$N(2, 2, \sqrt{2})$，求矢量$\overrightarrow{MN}$的方向余弦、方向角及与$\overrightarrow{MN}$同方向的单位矢量.

解　因为
$$\overrightarrow{MN}=(1-2, 3-2, 0-\sqrt{2})=(-1, 1, -\sqrt{2}),$$
$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2,$$

所以
$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$
$$\overrightarrow{MN}^0=\frac{1}{|\overrightarrow{MN}|}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$