奥林专家担纲 著名教练主笔

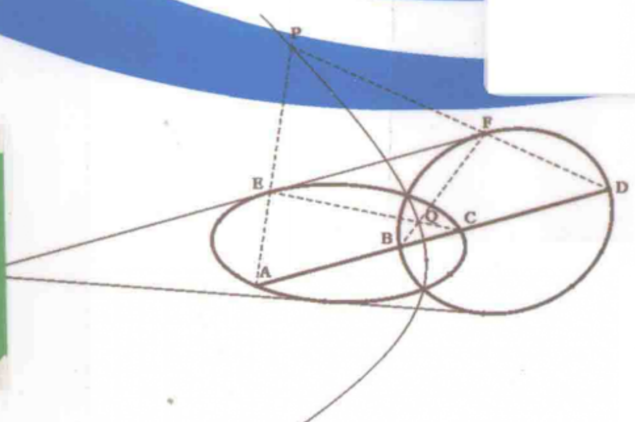
浙大优学

从自主招生到竞赛

CONG
ZIZHU ZHAOSHENG
DAO
JINGSAI

高中数学

下册



主　编　金蒙伟　李胜宏
副主编　陈相友　沈虎跃　马洪炎

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

CONG
ZIZHU ZHAOSHENG
DAO
JINGSAI

从自主招生到竞赛

高中数学 上、下册

ISBN 978-7-308-12520-8

9 787308 125208 >

定价：42.00元

从自主招生到竞赛

高中数学·下册

主　编	金蒙伟	李胜宏		
副主编	陈相友	沈虎跃	马洪炎	
编　委	伏奋强	李亚章	周海军	胡克元
	江厚利	陈相友	胡浩鑫	周顺钿
	王希年	许康华	邵　达	马洪炎
	张春杰	张　玮	卞　勇	斯理炯
	吕峰波	范东晖	赵　洋	李惟峰
	虞金龙	梅红卫	陈寒极	蔡小雄
	沈宝伟	沈虎跃	陈守湖	

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

从自主招生到竞赛. 高中数学·下册 / 金蒙伟,李胜宏主编. —杭州:浙江大学出版社,2014.1(2014.7 重印)
ISBN 978-7-308-12520-8

Ⅰ.①从… Ⅱ.①金…②李 Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 277795 号

从自主招生到竞赛 高中数学·下册

金蒙伟 李胜宏 编著

责任编辑	杨晓鸣 吴 慧(特邀)
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007) (网址:http://www.zjupress.com)
排 版	浙江时代出版服务有限公司
印 刷	德清县第二印刷厂
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	25
字 数	608 千
版 印 次	2014 年 1 月第 1 版 2014 年 7 月第 3 次印刷
书 号	ISBN 978-7-308-12520-8
定 价	42.00 元

浙江大学出版社发行部联系方式 (0571)88925591;http://zjdxcbs.tmall.com

目　　录

第八章　直线与圆

第一节　直线的方程与两条直线的位置关系

项目一　知识概要

1. 平面上两点间的距离公式　设平面直角坐标系上两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

2. 线段的定比分点坐标公式　设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，点 $P(x,y)$ 分 P_1P_2 的比为 λ，则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}(\lambda\neq -1).$$

3. 直线方程的各种形式

(1)点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$；　(2)斜截式：$y=kx+b$；

(3)两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$；

(4)截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(a,b\neq 0)$；(5)一般式：$Ax+By+C=0$($A$，$B$ 不同时为零)；

(6)参数方程：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数，α 为倾斜角，$|t|$ 表示点 (x,y) 与 (x_0,y_0) 之间的距离).

4. 两直线的位置关系

设 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$(或 $l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$)，则

(1)$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $A_1C_2-A_2C_1\neq 0$(或 $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$)；

(2)$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$(或 $k_1k_2=-1$).

5. 两直线的到角公式与夹角公式

(1)到角公式：直线 l_1 到 l_2 的到角为 θ，则 $\tan\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}(0°\leqslant\theta\leqslant 180°)$；

(2)夹角公式：直线 l_1 与 l_2 的夹角为 θ，则 $\tan\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|(0°\leqslant\theta\leqslant 90°)$.

6. 点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

项目二 例题精选

任务一:直线相交问题

【例 1】 已知两直线 $a_1x+b_1y+1=0$ 和 $a_2x+b_2y+1=0$ 的交点为 $P(2,3)$，则过两点 $M(a_1,b_1)$，$N(a_2,b_2)$ 的直线方程为____________________.

【解析】 由已知 $2a_1+3b_1+1=0$，$2a_2+3b_2+1=0$，故可知直线 $2x+3y+1=0$ 恒过 M，N 两点，两点确定一条直线，故此直线方程为 $2x+3y+1=0$.

【思考】 主要考查设而不求的方程整体分析思想.

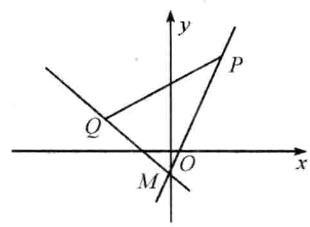
任务二:直线与线段相交

【例 2】 已知直线 $l: y=kx-2$ 和两点 $P(1,2)$，$Q(-4,1)$，若 l 与线段 PQ 相交，求 k 的取值范围.

【解析】 由直线方程 $y=kx-2$ 可知直线过定点 $M(0,-2)$，

$k_{MQ}=\dfrac{1-(-2)}{(-4)-0}=-\dfrac{3}{4}$，$k_{MP}=\dfrac{2-(-2)}{1-0}=4$，

所以，要使直线 l 与线段 PQ 有交点，则 k 的取值范围为 $k\geqslant 4$ 和 $k\leqslant -\dfrac{3}{4}$.



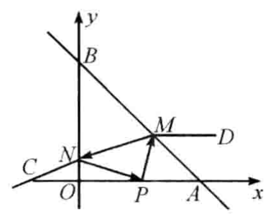
【思考】 主要考查数形结合处理问题.

任务三:光线的轨迹

【例 3】 如图，已知 $A(4,0)$，$B(0,4)$，从点 $P(2,0)$ 射出的光线经直线 AB 反射后再射到直线 OB 上，最后经直线 OB 反射后又回到 P 点，则光线所经过的路程为 (　　)

A. $2\sqrt{10}$　　B. 6　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{5}$

【解析】 设点 P 关于直线 AB 的对称点为 $D(4,2)$，关于 y 轴的对称点为 $C(-2,0)$，则光线所经过的路程 $PMNP$ 的长为：$PM+MN+NP=DM+MN+NC=CD=2\sqrt{10}$.



【思考】 主要考查对称问题.

任务四:直线系问题

【例 4】 设直线系 $M: x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，对于下列四个命题：

A. M 中所有直线均经过一个定点

B. 存在定点 P 不在 M 中的任一条直线上

C. 对于任意整数 $n(n\geqslant 3)$，存在正 n 边形，其所有边均在 M 中的直线上

D. M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等

其中真命题的代号是____________________(写出所有真命题的代号).

【解析】 可以证明点 $(0,2)$ 到直线的距离始终是 1，也即说明 M 是圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 的切线包络，圆内的点不可能在直线系上，两两成 60° 角的直线可以形成两类正三角形，故正确答案是 B、C.

【思考】 关键要明确直线系是圆的切线包络.

【例 5】 在平面直角坐标系上,是否存在一个含有无穷多条直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n,\cdots$ 的直线族,它满足条件:

(1)点 $(1,1)\in l_n$,$(n=1,2,3,\cdots)$;

(2) $k_{n+1}=a_n-b_n$,其中 k_{n+1} 是 l_{n+1} 的斜率,a_n 和 b_n 分别是 l_n 在 x 轴和 y 轴上的截距,$(n=1,2,3,\cdots)$;

(3) $k_nk_{n+1}\geqslant 0$,$(n=1,2,3,\cdots)$,并证明你的结论.

【解析】 设 $a_n=b_n\neq 0$,即 $k_n=-1$,或 $a_n=b_n=0$,即 $k_n=1$,就有 $k_{n+1}=0$,此时 a_{n+1} 不存在,故 $k_n\neq\pm 1$.

现设 $k_n\neq 0,1$,则 $y=k_n(x-1)+1$,得 $b_n=1-k_n$,$a_n=1-\dfrac{1}{k_n}$,所以 $k_{n+1}=k_n-\dfrac{1}{k_n}$.此时 $k_nk_{n+1}=k_n^2-1$.所以 $k_n>1$ 或 $k_n<-1$.从而 $k_1>1$ 或 $k_1<-1$.

(1)当 $k_1>1$ 时,由于 $0<\dfrac{1}{k_1}<1$,故 $k_1>k_2=k_1-\dfrac{1}{k_1}>0$.若 $k_2>1$,则又有 $k_1>k_2>k_3>0$,依此类推,知当 $k_m>1$ 时,有 $k_1>k_2>k_3>\cdots>k_m>k_{m+1}>0$,且 $0<\dfrac{1}{k_1}<\dfrac{1}{k_2}<\cdots<\dfrac{1}{k_m}<1$,

$k_{m+1}=k_m-\dfrac{1}{k_m}<k_m-\dfrac{1}{k_1}=k_{m-1}-\dfrac{1}{k_{m-1}}-\dfrac{1}{k_1}<k_{m-1}-\dfrac{2}{k_1}<\cdots<k_1-\dfrac{m}{k_1}$.

由于 $k_1-\dfrac{m}{k_1}$ 随 m 的增大而线性减小,故必存在一个 m 值,$m=m_0$,使 $k_1-\dfrac{m_0}{k_1}\leqslant 1$,从而必存在一个 m 值 $m=m_1\leqslant m_0$,使 $k_{m_1-1}\geqslant 1$,而 $1>k_{m_1}=k_{m_1-1}-\dfrac{1}{k_{m_1-1}}>0$,此时 $k_{m_1}\cdot k_{m_1+1}<0$.

即此时不存在这样的直线族.

(2)当 $k_1<-1$ 时,同样有 $-1<\dfrac{1}{k_1}<0$,得 $k_1<k_2=k_1-\dfrac{1}{k_1}<0$.若 $k_2<-1$,又有 $k_1<k_2<k_3<0$,依此类推,知当 $k_m<-1$ 时,有 $k_1<k_2<k_3<\cdots<k_m<k_{m+1}<0$,且 $0>\dfrac{1}{k_1}>\dfrac{1}{k_2}>\cdots>\dfrac{1}{k_m}>-1$,$k_{m+1}=k_m-\dfrac{1}{k_m}>k_m-\dfrac{1}{k_1}=k_{m-1}-\dfrac{1}{k_{m-1}}-\dfrac{1}{k_1}>k_{m-1}-\dfrac{2}{k_1}>\cdots>k_1-\dfrac{m}{k_1}$.

由于 $k_1-\dfrac{m}{k_1}$ 随 m 的增大而线性增大,故必存在一个 m 值,$m=m_0$,使 $k_1-\dfrac{m_0}{k_1}\geqslant -1$,从而必存在一个 m 值,$m=m_1$ $(m_1\leqslant m_0)$,使 $k_{m_1-1}\leqslant -1$,而 $-1<k_{m_1}=k_{m_1}-\dfrac{1}{k_{m_1-1}}<0$,此时 $k_{m_1}\cdot k_{m_1+1}<0$.即此时不存在这样的直线族.

综上可知,这样的直线族不存在.

【思考】 将研究直线族的存在问题转化为一个代数问题,然后结合数列和极限去研究,这种思想在解析几何中广泛运用.

任务五:直线交点轨迹

【例 6】 已知两点 $P(-2,2)$,$Q(0,2)$ 以及一条直线 l:$y=x$,设长为 $\sqrt{2}$ 的线段 AB 在直线 l 上移动,求直线 PA 和 QB 交点 M 的轨迹方程.

【解析】 PA 和 QB 的交点 $M(x,y)$ 随 A,B 的移动而变化,故可设 $A(t,t)$,$B(t+1,t+1)$,则

$PA: y-2=\frac{t-2}{t+2}(x+2)(t\neq-2)$，

$QB: y-2=\frac{t-1}{t+1}x(t\neq-1)$.

消去 t，得 $x^2-y^2+2x-2y+8=0$.

当 $t=-2$，或 $t=-1$ 时，PA 与 QB 的交点坐标也满足上式，所以点 M 的轨迹方程是 $x^2-y^2+2x-2y+8=0$.

【思考】 合理的引入参数和整体消参，设而不求提高运算的效率.

项目三 课外练习

A 组

1. 在平面直角坐标系中，方程 $\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1$（$a,b$ 为相异正数）所表示的曲线为 （　　）

A. 三角形　　B. 正方形

C. 非正方形的长方形　　D. 非正方形的菱形

2. 平面直角坐标上整点（坐标为整数的点）到直线 $y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}$ 的距离中的最小值为 （　　）

A. $\frac{\sqrt{34}}{170}$　　B. $\frac{\sqrt{34}}{85}$　　C. $\frac{1}{20}$　　D. $\frac{1}{30}$

3. 已知两点 $A(1,2)$，$B(3,1)$ 到直线 l 的距离分别是 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}-\sqrt{2}$，则满足条件的直线 l 共有______条 （　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 若函数 $f(x)=\log_2(x+1)$，且 $a>b>c>0$，则 $\frac{f(a)}{a}$，$\frac{f(b)}{b}$，$\frac{f(c)}{c}$ 的大小关系为（　　）

A. $\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}>\frac{f(c)}{c}$　　B. $\frac{f(c)}{c}>\frac{f(b)}{b}>\frac{f(a)}{a}$

C. $\frac{f(b)}{b}>\frac{f(a)}{a}>\frac{f(c)}{c}$　　D. $\frac{f(a)}{a}>\frac{f(c)}{c}>\frac{f(b)}{b}$

5. 两平行直线 l_1,l_2 分别过点 $P(-1,3)$，$Q(2,-1)$，且它们分别绕 P,Q 旋转，但始终保持平行，则 l_1,l_2 之间的距离的取值范围为 （　　）

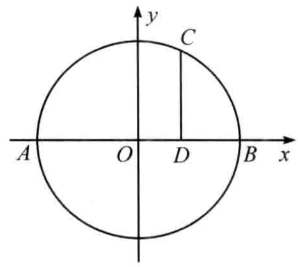
A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,5)$　　C. $(0,5]$　　D. $(0,\sqrt{17})$

6. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=a|x|\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+a\}$，若 $A\cap B$ 仅有两个元素，则实数 a 的取值范围为__________.

7. 给定点 $P(2,-3)$，$Q(3,2)$，已知直线 $ax+y+2=0$ 与线段 PQ（包括 P,Q 在内）有公共点，则 a 的取值范围为________________.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，给定两点 $M(-1,2)$ 和 $N(1,4)$，点 P 在 x 轴上移动，当 $\angle MPN$ 取最大值时，点 P 的横坐标为________________.

9. 三个圆有相同的半径，都是 3，圆心分别为 $(14,92)$、$(17,76)$ 和 $(19,84)$. 一条直线通过点 $(17,76)$，且位于它同一侧的三个圆各部分的面积之和等于另一侧三个圆各部分的面积之和，那么这条直线的斜率的绝对值为______________.



10. 如图，AB 是单位圆的直径，在 AB 上任取一点 D，$DC\perp AB$，交圆周于 C，若点 D 坐标为 $(x,0)$，则当 $x=$____________时，线段 AD,BD,CD 可构成锐角三角形.

11. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2-2x\cos\alpha+2(1+\sin\alpha)(1-y)=0,\alpha\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid y=kx+3,k\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap B$ 为单元素集，则 $k=$____________.

12. 已知 m 为实数，直线 $l:(2m+1)x+(1-m)y-(4m+5)=0$，点 $P(7,0)$，求点 P 到直线 l 的距离 d 的取值范围.

13. 已知直线 l 经过点 $P(1,4)$，分别交 x 轴，y 轴正半轴于点 A,B，其中 O 为原点，求 $\triangle AOB$ 的面积最小时，直线 l 的方程.

14. 已知直线 $l:2x-3y+1=0$，点 $A(-1,-2)$，求：

(1) 点 A 关于直线 l 的对称点 A' 的坐标；

(2) 直线 $m:3x-2y-6=0$ 关于直线 l 的对称直线 m' 的方程；

(3) 直线 l 关于点 $A(-1,-2)$ 对称的直线 l' 的方程.

15. 已知射线 OA 为 $y=\sqrt{3}x(x>0)$，射线 OB 为 $y=-\sqrt{3}x(x>0)$，动点 $P(x,y)$ 在 $\angle AOx$ 的内部，$PM\perp OA$ 于 M，$PN\perp OB$ 于 N，四边形 $ONPM$ 的面积恰为 $\sqrt{3}$. 求动点 P 的坐标间函数 $y=f(x)$ 的解析式.

16. 已知直线 $l:(2a+b)x+(a+b)y+a-b=0$ 及点 $P(3,4)$：

(1) 证明直线 l 过某定点，并求该定点的坐标；

(2) 当点 P 到直线 l 的距离最大时，求直线 l 的方程.

17. 已知三条直线 $l_1:2x-y+a=0(a<0)$，$l_2:-4x+2y+1=0$，$l_3:x+y-1=0$，若 l_1 与 l_2 的距离是 $\frac{7\sqrt{5}}{10}$：

(1) 求 a 的值；

(2) 能否找到一点 P，使得 P 同时满足下列三个条件：①P 是第一象限的点；②P 点到 l_1 的距离是 P 点到 l_2 的距离的 $\frac{1}{2}$；③P 点到 l_1 的距离与 P 点到 l_3 的距离之比是 $\sqrt{2}:\sqrt{5}$. 若能，求 P 点坐标；若不能，说明理由.

18. 已知点 $A(1,4)$，$B(6,2)$，试问在直线 $x-3y+3=0$ 上是否存在点 C，使得三角形 ABC 的面积等于 14？若存在，求出 C 点坐标；若不存在，说明理由.

19. 将一块直角三角板 ABO（45° 角）置于直角坐标系中，已知 $AB=OB=1$，$AB\perp OB$，点 $P(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 是三角板内一点，现因三角板中部分受损坏（$\triangle POB$），要把损坏的部分锯掉，可用经过 P 的任意一直线 MN 将其锯成 $\triangle AMN$. 问如何确定直线 MN 的斜率，才能使锯成的

$\triangle AMN$ 的面积最大?

20. 已知点 $A(-3,5)$, $B(2,15)$,在直线 $l:3x-4y+4=0$ 上求一点 P,使 $|PA|+|PB|$ 最小.

B 组

21. 已知射线 $l:y=4x(x>1)$ 和点 $M(6,4)$,在射线 l 上求一点 N,使直线 MN 与 l 及 x 轴围成的三角形面积 S 最小.

22. 直线 $l_1:ax-2y=2a-4$, $l_2:2x+a^2y=2a^2+4$,当 $0<a<2$ 时,两直线与坐标轴围成一个四边形,当四边形的面积最小时,求 l_1, l_2 的方程.

23. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=a,a>0\}$, $B=\{(x,y)\,|\,|xy|+1=|x|+|y|\}$,若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合,求 a 的值.

24. 已知半径为 1 的定圆 $\odot P$ 的圆心 P 到定直线 l 的距离为 2, Q 是 l 上一动点, $\odot Q$ 与 $\odot P$ 相外切, $\odot Q$ 交 l 于 M 和 N 两点,对于任意直径 MN,平面上恒有一定点 A,使得 $\angle MAN$ 为定值.求 $\angle MAN$ 的度数.

25. 一张纸上画有半径为 R 的圆 O 和圆内一定点 A,且 $OA=a$. 折叠纸片,使圆周上某一点 A' 刚好与 A 点重合,这样的每一种折法,都留下一条直线折痕,当 A' 取遍圆周上所有点时,求所有折痕所在直线上点的集合.

26. 过抛物线 $y^2=2px$(p 为不等于 2 的素数)的焦点 F,作与 x 轴不垂直的直线 l 交抛物线于 M, N 两点,线段 MN 的垂直平分线交 MN 于 P 点,交 x 轴于 Q 点:

(1)求 PQ 中点 R 的轨迹 l 的方程;

(2)证明: l 上有无穷多个整点,但 l 上任意整点到原点的距离均不是整数.

第二节 圆的方程

项目一 知识概要

1. 圆的标准方程与一般方程

①圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,其中圆心坐标为 (a,b),半径为 r;

②圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,圆心坐标为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$,半径为 $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.方程表示圆的充要条件是 $D^2+E^2-4F>0$.

2. 以 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 为直径端点的圆方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

3. 若圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 与 x 轴相切,则 $|b|=r$;若圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 与 y 轴相切,则 $|a|=r$.

4. 若圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 关于 x 轴对称,则 $E=0$;

若圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 关于 y 轴对称,则 $D=0$;

若圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 关于 $y=x$ 轴对称,则 $D=E$.

5. 点 $M(x_0, y_0)$ 与圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的位置关系

M 在圆内 $\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0$；

M 在圆上 $\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$；

M 在圆外 $\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0$.

项目二 例题精选

任务一:圆的定义

【例 1】 设方程 $x^2+y^2-2(m+3)x+2(1-4m^2)y+16m^4+9=0$：

(1)当且仅当 m 在什么范围内,该方程表示一个圆；

(2)当 m 在以上范围内变化时,求半径最大的圆的方程；

(3)求圆心的轨迹方程.

【解析】 (1)由 $D^2+E^2-4F>0$ 得:$4(m+3)^2+4(1-4m^2)^2-4(16m^4+9)>0$,

化简:$7m^2-6m-1<0$,解得:$-\frac{1}{7}<m<1$. 所以当 $-\frac{1}{7}<m<1$ 时,该方程表示一个圆.

(2)$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{-7m^2+6m+1}$,当 $m=\frac{3}{7}$ 时,$r_{\max}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

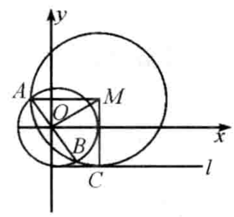
(3)设圆心 $C(x,y)$,则 $\begin{cases}x=m+3\\y=4m^2-1\end{cases}$,消去 m 得 $y=4(x-3)^2-1$.

因为 $-\frac{1}{7}<m<1$,所以 $\frac{20}{7}<x<4$,所求的轨迹方程为 $(x-3)^2=\frac{1}{4}(y+1)\left(\frac{20}{7}<x<4\right)$.

【思考】 圆的一般方程和标准方程之间的互化,对解决圆的问题比较重要.

任务二:直线与圆的关系

【例 2】 已知⊙O 的半径为 3,直线 l 与⊙O 相切,一动圆与 l 相切,并与⊙O 相交的公共弦恰为⊙O 的直径,求动圆圆心的轨迹方程.



【解析】 取过 O 点且与 l 平行的直线为 x 轴,过 O 点且垂直于 l 的直线为 y 轴,建立平面直角坐标系. 设动圆圆心为 $M(x,y)$. ⊙O 与⊙M 的公共弦为 AB,⊙M 与 l 切于点 C,则 $|MA|=|MC|$.

因为 AB 为⊙O 的直径,所以 MO 垂直平分 AB 于 O.

由勾股定理得

$|MA|^2=|MO|^2+|AO|^2=x^2+y^2+9$,而 $|MC|=|y+3|$,

所以 $\sqrt{x^2+y^2+9}=|y+3|$.

化简得 $x^2=6y$,这就是动圆圆心的轨迹方程.

【思考】 合理地选择坐标系,充分挖掘圆的几何性质是解决问题的关键.

任务三:确立圆的要素

【例 3】 过点 $A(0,1)$,$B(4,m)$ 且与 x 轴相切的圆有且只有一个,求实数 m 的值和这个圆的方程.

【解析】 由题意,设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$,因为点 $A(0,1)$,$B(4,m)$

在圆上，所以$\begin{cases}2b=1+a^2\\(4-a)^2+m^2-2bm=0\end{cases}$，整理得：$(1-m)a^2-8a+16+m^2-m=0$，①

因为满足条件的圆有且只有 1 个，所以方程①有且只有 1 个根，

所以 $m=1$ 或 $\Delta=64-4(1-m)(16+m^2-m)=0$，即 $m=1$ 或 $m(m^2-2m+17)=0$，

所以 $m=1$ 或 $m=0$.

当 $m=1$ 时，所求圆的方程为$(x-2)^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}$.

当 $m=0$ 时，所求圆的方程为$(x-4)^2+(y-\frac{17}{2})^2=\frac{289}{4}$.

【思考】 把几何问题合理的转化为代数问题，通过适当的计算解决问题.

任务四：圆系问题

【例 4】 设有一组圆 C_k：$(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4(k\in\mathbf{N}^*)$，下列四个命题：

A. 存在一条定直线与所有的圆均相切　　B. 存在一条定直线与所有的圆均相交

C. 存在一条定直线与所有的圆均不相交　　D. 所有的圆均不经过原点

其中真命题的代号是________________.（写出所有真命题的代号）

【解析】 根据圆的方程可知圆心为$(k-1,3k)$，半径为$\sqrt{2}k^2$，圆心在直线 $y=3(x+1)$ 上，所以直线 $y=3(x+1)$ 必与所有的圆相交，选项 B 正确. 由 C_1,C_2,C_3 的图象可知选项 A，C均不正确. 若存在圆过原点(0,0)，则有$(1-k)^2+9k^2=2k^4\Rightarrow10k^2-2k+1=2k^4(k\in\mathbf{N}^*)$. 因为此式左边为奇数，右边为偶数，故不存在 k 使上式成立，即所有圆均不过原点，选项 D 正确.

所以，真命题的代号是 B、D.

【思考】 关键是对圆系的基本特征考虑清楚，这是解决曲线系问题的关键！

任务五：圆的性质应用

【例 5】 设椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，是否存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A,B，且 $OA\perp OB$？若存在，写出该圆的方程，并求$|AB|$的取值范围；若不存在说明理由.

【解析】 假设存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A,B，且$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$. 设该圆的切线方程为 $y=kx+m$，解方程组$\begin{cases}y=kx+m\\\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$得 $x^2+2(kx+m)^2=8$，即$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-8=0$，则 $\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-8)=8(8k^2-m^2+4)>0$，即 $8k^2-m^2+4>0$.

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2},\\x_1x_2=\frac{2m^2-8}{1+2k^2},\end{cases}$$

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{k^2(2m^2-8)}{1+2k^2}-\frac{4k^2m^2}{1+2k^2}+m^2=\frac{m^2-8k^2}{1+2k^2}$. 要使$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，需使 $x_1x_2+y_1y_2=0$，即$\frac{2m^2-8}{1+2k^2}+\frac{m^2-8k^2}{1+2k^2}=0$，所以 $3m^2-8k^2-8$

$=0$，所以 $k^2=\frac{3m^2-8}{8}\geqslant 0$. 又 $8k^2-m^2+4>0$，所以 $\begin{cases}m^2>2\\3m^2\geqslant 8\end{cases}$. 所以 $m^2\geqslant\frac{8}{3}$，即 $m\geqslant\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 或 $m\leqslant-\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 因为直线 $y=kx+m$ 为圆心在原点的圆的一条切线，所以圆的半径为 $r=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，$r^2=\frac{m^2}{1+k^2}=\frac{m^2}{1+\frac{3m^2-8}{8}}=\frac{8}{3}$，$r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，所求的圆为 $x^2+y^2=\frac{8}{3}$，此时圆的切线 $y=kx+m$ 都满足 $m\geqslant\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 或 $m\leqslant-\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 而当切线的斜率不存在时切线为 $x=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$，与椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个交点为 $(\frac{2\sqrt{6}}{3},\pm\frac{2\sqrt{6}}{3})$ 或 $(-\frac{2\sqrt{6}}{3},\pm\frac{2\sqrt{6}}{3})$ 满足 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

综上所述，存在圆心在原点的圆 $x^2+y^2=\frac{8}{3}$，使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A，B，且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

因为 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2},\\x_1x_2=\frac{2m^2-8}{1+2k^2},\end{cases}$

所以 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(-\frac{4km}{1+2k^2})^2-4\times\frac{2m^2-8}{1+2k^2}=\frac{8(8k^2-m^2+4)}{(1+2k^2)^2}$.

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)\frac{8(8k^2-m^2+4)}{(1+2k^2)^2}}$

$=\sqrt{\frac{32}{3}\cdot\frac{4k^4+5k^2+1}{4k^4+4k^2+1}}=\sqrt{\frac{32}{3}\left[1+\frac{k^2}{4k^4+4k^2+1}\right]}$，

①当 $k\neq 0$ 时 $|AB|=\sqrt{\frac{32}{3}[1+\frac{1}{4k^2+\frac{1}{k^2}+4}]}$.

因为 $4k^2+\frac{1}{k^2}+4\geqslant 8$，所以 $0<\frac{1}{4k^2+\frac{1}{k^2}+4}\leqslant\frac{1}{8}$，所以 $\frac{32}{3}<\frac{32}{3}\left[1+\frac{1}{4k^2+\frac{1}{k^2}+4}\right]\leqslant 12$，

所以 $\frac{4}{3}\sqrt{6}<|AB|\leqslant 2\sqrt{3}$，当且仅当 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取“=”.

②当 $k=0$ 时，$|AB|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

③当 AB 的斜率不存在时，两个交点为 $(\frac{2\sqrt{6}}{3},\pm\frac{2\sqrt{6}}{3})$ 或 $(\frac{-2\sqrt{6}}{3},\pm\frac{2\sqrt{6}}{3})$，

所以此时 $|AB|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

综上所述，$|AB|$ 的取值范围为 $\frac{4}{3}\sqrt{6}\leqslant|AB|\leqslant 2\sqrt{3}$，即 $|AB|\in[\frac{4}{3}\sqrt{6},2\sqrt{3}]$.

思考 这是一个典型的直线、圆、椭圆的综合问题，突破点在直线方程上.

任务六:综合应用

【例6】 已知圆 $M:x^2+(y-2)^2=1$,设点 B,C 是直线 $l:x-2y=0$ 上的两点,它们的横坐标分别是 $t,t+4(t\in\mathbf{R})$,点 P 在线段 BC 上,过 P 点作圆 M 的切线 PA,切点为 A:

(1)若 $t=0$,$MP=\sqrt{5}$,求直线 PA 的方程;

(2)若经过 A,P,M 三点的圆的圆心是 D,求线段 DO 长的最小值 $L(t)$.

【解析】 (1)设 $P(2a,a)(0\leqslant a\leqslant 2)$. 因为 $M(0,2)$,$MP=\sqrt{5}$,所以 $\sqrt{(2a)^2+(a-2)^2}=\sqrt{5}$. 解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{5}$(舍去).

所以点 P 坐标为 $P(2,1)$.

由题意知切线 PA 的斜率存在,设斜率为 k.

所以直线 PA 的方程为 $y-1=k(x-2)$,即 $kx-y-2k+1=0$.

因为直线 PA 与圆 M 相切,所以 $\frac{|-2-2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,解得 $k=0$ 或 $k=-\frac{4}{3}$.

所以直线 PA 的方程是 $y=1$ 或 $4x+3y-11=0$.

(2)设 $P(2a,a)(t\leqslant 2a\leqslant t+4)$.

因为 PA 与圆 M 相切于点 A,所以 $PA\perp MA$.

所以经过 A,P,M 三点的圆的圆心 D 是线段 MP 的中点.

因为 $M(0,2)$,所以 D 的坐标是 $\left(a,\frac{a}{2}+1\right)$.

设 $DO^2=f(a)$. 所以 $f(a)=a^2+\left(\frac{a}{2}+1\right)^2=\frac{5}{4}a^2+a+1=\frac{5}{4}\left(a+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$.

当 $\frac{t}{2}>-\frac{2}{5}$,即 $t>-\frac{4}{5}$ 时,$f(a)_{\min}=f\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{5}{16}t^2+\frac{t}{2}+1$;

当 $\frac{t}{2}\leqslant-\frac{2}{5}\leqslant\frac{t}{2}+2$,即 $-\frac{24}{5}\leqslant t\leqslant-\frac{4}{5}$ 时,$f(a)_{\min}=f\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}$;

当 $\frac{t}{2}+2<-\frac{2}{5}$,即 $t<-\frac{24}{5}$ 时,

$f(a)_{\min}=f\left(\frac{t}{2}+2\right)=\frac{5}{4}\left(\frac{t}{2}+2\right)^2+\left(\frac{t}{2}+2\right)+1=\frac{5}{16}t^2+3t+8$.

则 $L(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}\sqrt{5t^2+8t+16},t>-\frac{4}{5},\\ \frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{24}{5}\leqslant t\leqslant-\frac{4}{5},\\ \frac{1}{4}\sqrt{5t^2+48t+128},t<-\frac{24}{5}.\end{cases}$

【思考】 先设直线,再利用圆和直线的处理策略处理,后面需要分类讨论.

项目三 课外练习

A组

1. 点$(2a,a-1)$在圆$x^2+(y-1)^2=5$的内部，则a的取值范围为 ( )

A. $-1<a<1$　　B. $0<a<1$　　C. $-1<a<\frac{1}{5}$　　D. $-\frac{1}{5}<a<1$

2. 直线$y=x+b$平分圆$x^2+y^2-8x+2y+8=0$的周长，则$b=$ ( )

A. 3　　B. 5　　C. -3　　D. -5

3. 方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$表示的圆与x轴相切于原点，则 ( )

A. $D=0,E=0,F\neq0$　　B. $D=0,F=0,E\neq0$

C. $E=0,F=0,D\neq0$　　D. $D=0,E\neq0,F\neq0$

4. 已知圆O的半径为1，PA和PB为该圆的两条切线，A和B为两切点，那么$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值为 ( )

A. $-4+\sqrt{2}$　　B. $-3+\sqrt{2}$　　C. $-4+2\sqrt{2}$　　D. $-3+2\sqrt{2}$

5. 若直线$2ax-by+2=0(a>0,b>0)$经过圆$x^2+y^2+2x-4y+1=0$的圆心，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 4　　D. 2

6. 已知圆的方程为$x^2+y^2-6x-8y=0$. $a_1,a_2,\cdots,a_{11}$是该圆过点$(3,5)$的11条弦的长，若数列$a_1,a_2,\cdots,a_{11}$是等差数列，则数列$a_1,a_2,\cdots,a_{11}$的公差的最大值为________.

7. 直线l截圆$x^2+y^2-2y=0$所得弦AB的中点是$C(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，则$|AB|=$________.

8. 关于方程$x^2+y^2+2ax-2ay=0$表示的圆，下列叙述中：①关于直线$x+y=0$对称；②其圆心在x轴上；③过原点；④半径为$\sqrt{2}|a|$. 其中叙述正确的是________.（要求写出所有正确命题的序号）

9. 已知圆$(x-2)^2+y^2=1$，求(1)x^2+y^2的最大值；(2)$\frac{y}{x}$的最大值与最小值；(3)$x-2y$的最小值.

10. 已知$\triangle ABC$的三个顶点的坐标分别为$A(-2,3)$，$B(-2,-1)$，$C(6,-1)$，以原点为圆心的圆与三角形有唯一的公共点，求圆的方程.

11. 已知$m\in\mathbf{R}$，直线$l:mx-(m^2+1)y=4m$和圆$C:x^2+y^2-8x+4y+16=0$.

(1)求直线l斜率的取值范围；

(2)直线l与圆C相交于A,B两点，若$\triangle ABC$的面积为$\frac{8}{5}$，求直线l的方程：