基本巴拿赫空间

Basic Banach Spaces

■ 王文智　康晓红　著

Orlicz空间

Lorentz空间

Hausdorff空间

BMO空间

Orlicz-Sobolev空间

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

● 本书由深圳职业技术学院著作出版基金资助

基本巴拿赫空间

Basic Banach Spaces

王文智　康晓红　著

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

基本巴拿赫空间/王文智,康晓红著. —广州:华南理工大学出版社,2013.12
ISBN 978－7－5623－4104－8

Ⅰ.①基…　Ⅱ.①王…②康…　Ⅲ.①巴拿赫空间　Ⅳ.①O177.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 281401 号

基本巴拿赫空间
王文智　康晓红　著

出 版 人: 韩中伟
出版发行: 华南理工大学出版社
(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)
http://www.scutpress.com.cn　　E－mail: scutc13@scut.edu.cn
营销部电话: 020－87113487　87111048(传真)
责任编辑: 詹志青
印 刷 者: 广州市穗彩彩印厂
开　　本: 787mm×960mm　1/16　**印张:** 20.75　**字数:** 415 千
版　　次: 2013 年 12 月第 1 版　2013 年 12 月第 1 次印刷
印　　数: 1～500 册
定　　价: 39.00 元

前 言

笔者在撰写《变分法与临界非线性》一书时，遇到了许多常见 Banach 空间、以及这些空间上经典的和新近发展的理论．这些内容是从事数学分析领域教学与研究时常常用到但可能不完全熟悉的，因此，写一本实用性较强、内容较为丰富但又不太拘泥于细节、涵盖常见基本 Banach 空间的书，有一定的必要，对于其他读者特别是高年级大学生和研究生会有助益．基于这一认识，将当时涉及到的 Banach 空间罗列出来，并尽可能将它们的各种性质有逻辑性地组织在一起，是写本书的初衷．

本书的写作大多从实用出发，力求从初等出发，但由于涉及许多学科前沿，时有艰深的内容或许难免．

本书共分九章．第一章为预备知识，介绍了点集拓扑、抽象测度与积分、泛函分析三定理等基础知识，简述了 Fourier 变换的有关内容，阐述了广义函数与弱导数，附带给出 Hölder 空间及性质．

第二章介绍 L^p 空间，除了 L^p 空间的基本理论外，还介绍了覆盖引理、微分定理等，以便读者加深对 Lebesgue 函数的局部性态的认识．

第三章介绍 Lorentz 空间与 Orlicz 空间，它们均是 L^p 空间的推广．

第四章与第五章介绍经典的 Sobolev 空间的有关内容．主要阐述 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的性质，及其到其它 Banach 空间的嵌入定理．

第五章首先介绍 $W^{m,p}(\Omega)$ 的嵌入，与 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的嵌入定理不同，嵌入定理的成立大多与区域的几何性质有关．本书采用延拓定理证明 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的嵌入定理，涉及的几何性质包括内部锥性质、一致 Lipschitz 条件．还介绍了分数阶 Sobolev 空间、迹嵌入定理以及 Sobolev 空间的其它事项，如最佳嵌入不等式等理论．

第六章介绍有界变差函数．粗略地说，如果一个函数的分布导数是一个 L^p 函数，则这个函数属于 $W^{1,p}$，如果一个函数的分布导数是有限 Radon 测度，则它属于有界变差函数 BV．还介绍函数的对称重排技术，借此证明 Polya-Szegö 不等式、等周不等式、余面积公式以及 Talenti 比较原理，这些都是几何测度论与变分法中特别关心的话题．

第七章介绍 Lorentz-Sobolev 空间与 Orlicz-Sobolev 空间．一个简单结论是：

对于齐次 Sobolev 空间的函数 $f \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$，有

$$[f]_{\frac{np}{n-mp},p} \le C_{n,p}\|D^m f\|_p.$$

由于 $np/(n-mp) > p$，故 $L^{\frac{np}{n-mp},p}$ 是 $L^{\frac{np}{n-mp}}$ 的真子空间. 以上不等式是通常 Sobolev 不等式的一个改进，这一稍许的改进，为某些涉临界 Sobolev 指数的非线性偏微分方程解的正则化提供了足够的余地.

第八章与第九章是调和分析的内容。第八章为第九章做预备，介绍 Riesz 位势与 Riesz 变换.

第九章介绍平均振幅有界函数空间 BMO 与 Hardy 空间 $\mathcal{H}^1$，重点介绍 Fefferman 对偶定理与 Coifman-Weiss 对偶定理：

$$(\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n))^* = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n), \quad (\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n))^* = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n).$$

其后给出 Hardy 空间 $\mathcal{H}^1$ 的原子刻画、极大函数刻画与奇异积分刻画.

本书可作为高等学校数学专业高年级学生及研究生的教学参考书.

限于作者水平，书中错误及不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

作　者

2013 年 9月于深圳

目 录

第一章　预备知识

本章以备忘录的方式，陈列出阅读本书所需的一些基本概念及理论．第一节是点集拓扑学的基本概念，特别关注各种紧性．第二节简述抽象测度与抽象积分．第三节罗列了泛函分析中有关 Banach 空间的一些基本概念与理论．

第一节　点集拓扑学基本概念

本节介绍拓扑空间的基本概念及本书所需的若干定理，这些内容在各种点集拓扑学教科书中多有讨论，如 Kelley [128]、熊金城 [249] 等，比较简明的可参阅 Baum [27].

一、拓扑空间

定义 1.1　设 X 是一个集合，又设 τ 是 X 的子集所成的集族，满足

1) τ 中任意多个集合的并在 τ 中，

2) τ 中任意有限多集合的交在 τ 中，

3） X, $\varnothing \in \tau$,

则称 (X,τ) 是一拓扑空间，τ 中的集合称为开集. (X,τ) 简写为 X.

定义 1.1 中的条件 1), 2) 及 3) 称为开集公理.

拓扑空间 X 称为 Hausdorff 空间，意即它满足 Hausdorff 分离公理（或称 T_2 分离公理）：对于 X 中任意两个不同的点 x_1, x_2，总存在不相交的开集 G_1, G_2，使得 $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$.

包含点 x 的一个开集 O 称为点 x 的一个 开邻域.

设 $A\subset X$，点 $x_0\in X$ 称为 A 的一个极限点或聚点. 意即 x_0 的任意一个邻域都含有不同于 x_0 的点 $y\in A$. X 内所有包含 A 的闭子集的交集称为 A 的闭包，记为 $\overline{A}$.

称集合 $S\subset X$ 为闭集，意即 S 的补集 $S^c\triangleq X\setminus S$ 是开集.

S 是闭集，当且仅当 S 包含自己所有的极限点.

设 X_1 是 X 的子集，而 O 是 X 的开集，把形如 $X_1\cap O$ 的子集都称为 X_1 的开集，则 X_1 成为一个拓扑空间. 这个拓扑称作相对拓扑.

设在基本集 X 上有两个拓扑结构 τ_1 及 τ_2，如果 $\tau_1\subset\tau_2$，则说 τ_2 是比 τ_1 细的拓扑.

二、度量空间

定义 1.2 设 X 是一个集合，如果函数 $\rho:\ X\times X\to\mathbb{R}$ 满足:

1) $\rho(x,y)\geq 0$，$\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$,

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$,

3) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$,

则称 (X,ρ) 为度量空间或距离空间，称 ρ 为度量或距离. (X,ρ) 简写为 X.

设 (X,ρ) 为度量空间，对于 $x_0\in X$ 及实数 $R>0$，定义

$$B_R(x_0)\triangleq\{x\in X:\ \rho(x,x_0)<R\},$$

称为以 x_0 为中心、R 为半径的开球. $B_R(x_0)$ 常简写为 B_R，尤其是在不强调球心或 $B_R(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的球 $B_R(0)$ 时.

度量空间 (X,ρ) 的集合 G 称为开集，当且仅当对于 G 的每一点 x_0，G 都包含一个以 x_0 为球心的开球. 容易验证，这种开集的全体 τ 满足拓扑空间定义中的开集公理. 因此，度量空间是拓扑空间.

称 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 的一个 Cauchy 列，意指 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，使得当 $m,n>N$ 时，$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.

如果度量空间 X 的每个 Cauchy 列都有极限，则称 X 是完备的.

三、连续映射

定义 1.3 设 X, Y 是拓扑空间, 称映射 $f: X \to Y$ 在点 $x_0 \in X$ 处连续. 意即对于 $y_0 = f(x_0)$ 的任意开邻域 $U \subset Y$, 都有 x_0 的某个开邻域 V, 使得 $f(V) \subset U$. 如果 f 在 X 的每一点连续, 则称 f 是连续的.

定理 1.1 设 X, Y 是拓扑空间, 则映射 $f: X \to Y$ 连续的充分必要条件是 Y 中每个开集 $U \subset Y$ 在映射 f 下的逆象 $f^{-1}(U)$ 都是 X 中的开集.

定义 1.4 设 X, Y 是拓扑空间, 映射 $f: X \to Y$ 是从 X 到 Y 的一一满映射, 如果 f 及其逆映射 f^{-1} 都是连续的, 则称 f 为从 X 到 Y 的同胚.

如果两个拓扑空间 X, Y 之间有一个同胚映射, 则称它们为同胚的.

四、各种紧性

1. 紧集

关于紧性，一个重要概念就是覆盖．设 X 是拓扑空间，$A \subseteq X$ 是子集．一族开集 $\{G_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$ 称为是 A 的开覆盖，意即 $A \subset \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} G_\alpha$；如果部分集族 $\{G_\beta : \beta \in \mathscr{B} \subset \mathscr{A}\}$ 仍然构成 A 的开覆盖，则称 $\{G_\beta : \beta \in \mathscr{B}\}$ 为原覆盖的子覆盖；进一步，如果指标集 $\mathscr{B}$ 有限，则称为有限子覆盖．

定义 1.5 设 K 是拓扑空间 X 的子集. 如果 K 的每个开覆盖都含有一个有限子覆盖, 则称 K 为紧集. 如果集合 $S \in X$ 的闭包 $\overline{S}$ 是紧的, 则称 S 是相对紧的 (relatively compact) 或准紧的 (pre-compact).

2. 列紧性 (sequentially compactness)

定义 1.6 设 K 是拓扑空间 X 的子集, 如果 K 的每个无限子集都有属于 K 的极限点, 则称 K 为列紧的.

定理 1.2 设 K 是拓扑空间 X 的紧子集, 则 K 是列紧集.

一般说来，定理 1.2 的逆不成立．但对于度量空间来说，紧性和列紧性是等价概念．

定理 1.3 设 K 是度量空间 X 的子集, 则 K 为紧集的充分必要条件是 K 为列紧集.

定义 1.7 (ε-网) 设 M 是度量空间 (X,ρ) 的子集，$\varepsilon>0$，$N\subset M$. 如果 $\forall\, x\in M, \exists\, y\in N$，使得 $\rho(x,y)<\varepsilon$，则称 N 是 M 的一个 ε- 网. 如果 N 是有穷集，就称 N 是 M 的一个有限 ε-网.

注记 1.1 由定义 1.7，如果 N 是 M 的有限 ε- 网，则显然有

$$M\subset \bigcup_{y\in N} B_\varepsilon(y).$$

定义 1.8 (完全有界集) 集合 M 称为完全有界的，意即对于 $\forall\,\varepsilon>0$，都存在着 M 的一个有限 ε-网.

定理 1.4 度量空间 X 中的集合 M 为准紧集的充分必要条件是，M 为完全有界集.

3. **局部紧性**（locally compactness）

一个拓扑空间 X 称为局部紧的，意即每一点 $x\in X$ 均有一个包含该点的紧邻域 $\overline{U}$，即 $x\in U$，且闭包 $\overline{U}$ 紧.

定理 1.5 任何一个局部紧拓扑空间 X 都可以嵌入到一个比 X 多一点的紧空间 Y 内，使得作为 Y 的一个子集的 X 的相对拓扑刚好就是 X 原来的拓扑. 空间 Y 称为 X 的一点紧化空间.

接下来介绍仿紧的概念.

4. **仿紧性**（paracompactness）

拓扑空间 X 的子集族 F_α 称为局部有限的，意即对于每个 $x\in X$，存在 x 的开邻域 O_x，使得 $O_x\cap F_\alpha\neq\varnothing$ 仅对有限个指标 α 成立.

设 $\{U_\alpha\}$ 及 $\{V_\beta\}$ 都是拓扑空间 X 的覆盖，意即对于每个 β，存在 α，使得 $V_\beta\subset U_\alpha$，则称覆盖 $\{V_\beta\}$ 是覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的加细.

定义 1.9 拓扑空间 X 称为仿紧的，意即它是 Hausdorff 空间且每个开覆盖都有局部有限的加细.

定义 1.10 拓扑空间 X 称作是正规的 (normal)，意即它满足 T_2 分离公理，即对于 X 中任意两个不相交的闭集 F_1 和 F_2，总存在不相交的开集 G_1 和 G_2，使得 $F_1\subset G_1$，$F_2\subset G_2$.

可以证明：

每个紧的 Hausdorff 空间是仿紧的，但其逆不成立.

每一个度量空间是仿紧的（见 Stone [196]）.

每个仿紧空间是正规空间.

定理 1.6 (Urysohn 定理) 拓扑空间 X 是正规空间，当且仅当对于 X 中任意两个不相交的闭集 A 与 B，存在 X 上的实值连续函数 f，满足

$$f(A)=0,\quad f(B)=1,\quad 且\quad f(X)\subset[0,1].$$

接下来介绍单位分割（partition of unity）定理．它在现代分析中经常用到，主要用途是借以实现局部向整体过渡.

定义 1.11 设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的一族开覆盖，称函数族 $\{\phi_j\}_{j\in J}$ 为从属于 $\{U_i\}$ 的连续单位分割，意即它满足

1) $\phi_j: X\to[0,1]$ 连续；

2) $V_j=\{x\in X:\ \phi_j(x)\neq 0\}$ 是 X 的局部有限覆盖；

3) 对每个 V_j，存在 U_i 使得 $\overline{V}_j\subset U_i$；

4) 对所有 $x\in X$，$\displaystyle\sum_{j\in J}\phi_j(x)=1$.

定理 1.7 (单位分割定理) 空间 X 是仿紧的充分必要条件是 X 的任何开覆盖 $\{U_i\}$ 都有从属于它的连续单位分割.

定理 1.8 (Stone [196] 单位分割定理) 设 X 是度量空间，则 X 的任何开覆盖 $\{U_i\}$ 都有从属于它的连续单位分割.

5. 乘积空间与 Tyhonov 定理

设 A 是任意指标集，且对于任意一个 $\alpha\in A$ 均有一个拓扑空间 X_α，定义它们的乘积空间为

$$X=\prod_{\alpha\in A}X_\alpha,$$

在 X 上引进拓扑如下：$O\in X$ 是开集，意指它具有形式 $O=\displaystyle\prod_{\alpha\in A}O_\alpha$，其中除有穷多个 O_α 是 X_α 的真开子集外，其余的 O_α 均为 X_α.

定理 1.9 (Tyhonov 定理) 设每个 X_α 是紧拓扑空间，则其乘积空间 $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ 也是紧空间.

证明见关肇直等 [229]，其中用到了 Zorn 选择公理.

第二节 抽象测度与积分

测度论是研究一般集合上的测度和积分的理论，它是 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分理论的进一步抽象和发展，是现代分析数学中的重要工具，被广泛应用于泛函分析、偏微分方程、微分几何、调和分析、概率论等数学领域.

抽象测度论大多与 Lebesgue 测度论平行，因此，这里主要罗列基本概念及基本性质，叙述时，将主要指出不同之处. 详细论述可见 Halmos [109]、严加安 [251]、朱成熹 [258]、苏维宜 [240] 等. 本节主要依据王文智 [243] 中的附录 B 修改而成. 如同文献 [243]，我们将主要关注具有一定正则性的测度——Radon 测度.

一、抽象测度与积分

1. 测度的基本概念

简单地说，抽象测度就是满足一定性质的集合函数，它的定义域是所谓“可测集”.

定义 1.12 设 $\mathscr{R}_\sigma$ 是点集 X 的子集所成的集族，我们说 $\mathscr{R}_\sigma$ 是基本集 X 上的 σ 环，意即 $\mathscr{R}_\sigma$ 满足以下两条:

1) $A_1, A_2, \cdots, A_j, \cdots \in \mathscr{R}_\sigma \implies \bigcup_1^\infty A_j \in \mathscr{R}_\sigma$;

2) $A, B \in \mathscr{R}_\sigma \implies A - B \in \mathscr{R}_\sigma$.

若 $\mathscr{R}_\sigma$ 还满足 $X \in \mathscr{R}_\sigma$，则称 $\mathscr{R}_\sigma$ 为集合 X 上的一个 σ 代数.

对于环来说，有限交运算未必封闭. 但对 σ 代数来说，有限交运算必定是封闭的.

设 $\mathscr{E}$ 是由基本集 X 的子集构成的集族，记 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的最小 σ 环，称作由 $\mathscr{E}$ 生成的 σ 环.

下面给出可测集的定义.