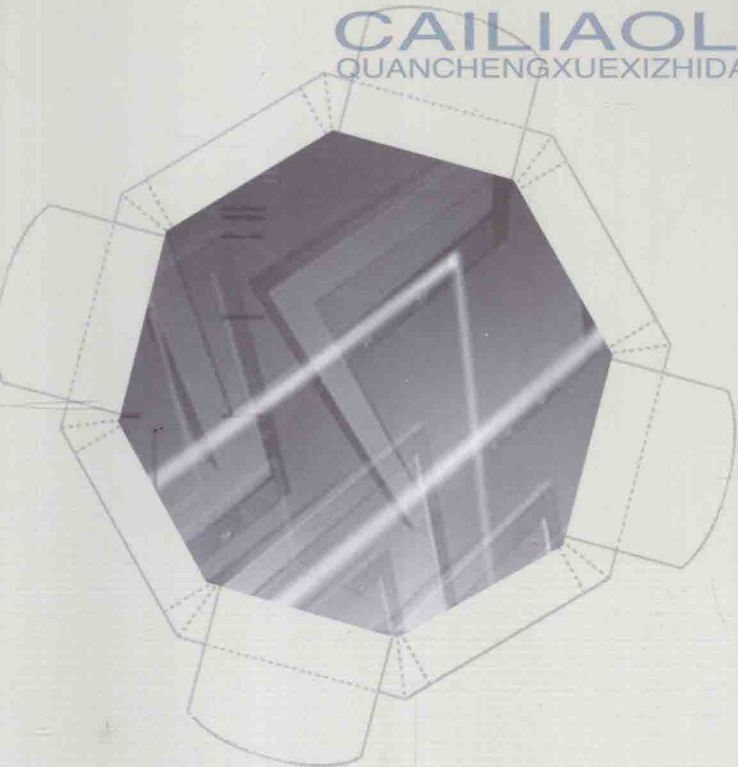


CAILIAOLIXUE |  
QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

智文天  
ZHIWENTIAN



# 材料力学 |

全程学习指导与习题精解

陈平 杨绪普 韦忠瑄 主编

(刘鸿文高教第五版)



东南大学出版社  
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

# 材料力学( I )

## 全程学习指导与习题精解

(刘鸿文高教第 5 版)

主 编 陈 平 杨绪普 韦忠瑄

东南大学出版社  
· 南京 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

材料力学(Ⅰ)全程学习指导与习题精解:刘鸿文高教第5版. /  
陈平,杨绪普,韦忠瑄主编. —南京:东南大学出版社,2014. 6  
ISBN 978-7-5641-5019-8

I. ①材… II. ①陈… ②杨… ③韦… III. ①材料力学—高等学校—教学参考资料 IV. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 116373 号

## 材料力学(Ⅰ)全程学习指导与习题精解(刘鸿文高教第5版)

---

主 编	陈 平 杨绪普 韦忠瑄	责任编辑	戴季东
电 话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu. edu. cn
特约编辑	李 香		

---

出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社 址	南京市四牌楼 2 号	邮 编	210096
销售电话	(025)83793191/83792174/83792214/83794121/83794174/57711295(传真)	电子邮件	press@seupress. com
网 址	www. seupress. com		

---

经 销	全国各地新华书店	印 刷	南京新洲印刷有限公司
开 本	718mm×1005mm 1/16	印 张	19 字 数 510 千
版 次	2014 年 6 月第 1 版第 1 次印刷		
书 号	ISBN 978-7-5641-5019-8		
定 价	25.00 元		

---

\* 未经本社授权,本书内文字不得以任何方式转载、演绎,违者必究。

\* 东大版图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830。

# 前 言

---

材料力学是许多工科专业本科学生的一门重要的技术基础课。它的学习内容,不仅是结构力学等后续课程必备的知识,更可以直接运用于工程实践,为许多工程问题的解决提供理论依据。为了帮助学生更好地理解 and 掌握材料力学知识,根据编者多年的教学实践经验体会,我们编写了校内使用的学习辅导材料,在正常教学与大学生力学竞赛辅导中使用,收到了良好的效果。为了让更多的大学生受益,我们在其基础上加以充实,编写出版了本书。

本书按照刘鸿文教授等主编的《材料力学(I)(第5版)》教材的内容顺序编排,每章都对学习内容进行了整理,并给予学习提示;对学习重点和难点进行了归纳;在学习方法上提出了指导建议;对易出现的问题加以分析,并结合例题进行疑难解析。对每章的习题给出了较详细的参考解答。希望通过阅读本书,读者能够提高分析和解决材料力学问题的能力,较好地掌握相关知识。

本书由陈平、杨绪普、韦忠瑄主编,参加编写的还有孙鹰、陈国良、闫凤国、杜茂林、徐小辉、顾娟、董璐等同志。尽管编者尽力追求完美,但限于编者的水平,书中难免存在错误,欢迎读者批评指正。书中的习题解答,既不是唯一的方法也不一定是最佳的方法,仅供读者参考。

编 者

# 目 录

<b>第一章 绪论</b> .....	1
1.1 内容提要 .....	1
1.2 学习重点 .....	2
1.3 习题详解 .....	2
<b>第二章 拉伸、压缩与剪切</b> .....	5
2.1 内容提要 .....	5
2.2 学习重点 .....	8
2.3 典型例题 .....	8
2.4 习题详解 .....	13
<b>第三章 扭转</b> .....	53
3.1 内容提要 .....	53
3.2 学习重点 .....	58
3.3 典型例题 .....	59
3.4 习题详解 .....	66
<b>第四章 弯曲内力</b> .....	85
4.1 内容提要 .....	85
4.2 学习重点 .....	89
4.3 典型例题 .....	89
4.4 习题详解 .....	93
<b>第五章 弯曲应力</b> .....	113
5.1 内容提要 .....	113
5.2 学习重点 .....	117
5.3 典型例题 .....	117
5.4 习题详解 .....	122
<b>第六章 弯曲变形</b> .....	141
6.1 内容提要 .....	141
6.2 学习重点 .....	143

6.3 典型例题 .....	143
6.4 习题详解 .....	147
<b>第七章 应力和应变分析、强度理论 .....</b>	<b>181</b>
7.1 内容提要 .....	181
7.2 学习重点 .....	186
7.3 典型例题 .....	187
7.4 习题详解 .....	199
<b>第八章 组合变形 .....</b>	<b>231</b>
8.1 内容提要 .....	231
8.2 学习重点 .....	232
8.3 典型例题 .....	233
8.4 习题详解 .....	242
<b>第九章 压杆稳定 .....</b>	<b>263</b>
9.1 内容提要 .....	263
9.2 学习重点 .....	265
9.3 典型例题 .....	266
9.4 习题详解 .....	272
<b>附录 I 平面图形的几何性质 .....</b>	<b>284</b>
I.1 内容提要 .....	284
I.2 学习重点 .....	286
I.3 典型例题 .....	287
I.4 习题详解 .....	290

# 第一章 绪 论

## 1.1 内容提要

### 1.1.1 材料力学的任务

1. 构件是组成机械和结构物的零部件统称,它必须有足够的承受载荷的能力(简称承载能力)。材料力学就是研究构件承载能力的一门科学。

2. 构件承载能力分为三方面:

- (1) 构件抵抗破坏的能力称为构件的强度;
- (2) 构件抵抗变形的能力称为构件的刚度;
- (3) 构件保持原有平衡形式的能力称为构件的稳定性。

3. 材料力学的主要任务是在保证构件既安全又尽可能经济合理的前提下,为构件选择适当的材料、合适的截面形状和尺寸;为合理设计构件提供必要的理论基础和计算方法。

### 1.1.2 变形固体及其基本假设

1. 材料力学研究的构件都是变形固体。

2. 变形固体三个基本假设:连续性假设、均匀性假设和各向同性假设。

### 1.1.3 外力及其分类

构件所受的来自构件以外的力就是外力。按外力的作用方式可分为表面力和体积力。

表面力:作用于构件表面的力,又可分为分布力和集中力。如水对坝体的压力、轴承对轴的约束力等。

体积力:连续分布于构件内部各点的力,如构件自重和惯性力等。

### 1.1.4 内力、截面法及应力

1. 材料力学研究的内力是因外力引起的构件各部分之间相互作用力的变化。

2. 截面法是用来显示内力与确定内力的方法。

3. 截面内某点的内力集度称为该点的应力。垂直于截面的分量称为正应力,用 $\sigma$ 表示;切于截面的分量称为切应力,用 $\tau$ 表示。应力单位是 $\text{N}/\text{m}^2$ (或 $\text{MN}/\text{m}^2$ ),记为Pa(或MPa)。

### 1.1.5 位移、变形及应变

1. 材料力学研究由于变形所引起的位移。构件内某点的原来位置到新位置所连的直线段,称为该点的线位移。构件内某一线段(或平面)所旋转的角度,称为该线段(或面)的角位移。

2. 应变用来度量构件内一点处的变形程度。应变分为线应变和切应变,都是无量纲量。

(1) 变形前,构件内某点的某一方向的微线段,在变形后该微线段长度的改变量和原来长度之比,称为线应变,用 $\epsilon$ 表示。(参见2.1.5)

(2) 变形前,过构件内某点取两个相互垂直的微线段,在变形后两个微线段夹角的改变量称为切应变(或角应变),用 $\gamma$ 表示。(参见3.1.4)

3. 弹性变形与塑性变形:

(1) 当外力不超过一定值时,去除外力后能恢复原有形状和尺寸,材料的这种性质称为弹性,去除外力后能消失的变形称为弹性变形。

(2) 当外力超过一定值时,外力去除后,变形只能部分恢复而残留下一部分不能消失的变形,材料的这种性质称为塑性,不能恢复而残留下来的变形称为塑性变形(或称残余变形)。

4. 材料力学主要研究弹性范围内的小变形。

5. 为了研究整个构件的变形,设想把构件分为无数极其微小的六面体,称为单元体。整个构件变形可以看成是所有单元体变形的组合。

### 1.1.6 杆件变形的的基本形式

1. 材料力学主要研究杆件,其几何特征是纵向(长度)尺寸远比横向(垂直于长度方向)尺寸大得多。

2. 在外力作用下,杆件的基本变形有拉伸与压缩、剪切、扭转及弯曲四种形式,杆件其他复杂的变形都可看成以上四种基本变形的组合。

## 1.2 学习重点

### 1. 变形固体

材料力学研究的对象是变形固体,而理论力学研究的对象是刚体,因此在引用理论力学中的一些基本原理(如力的可传性等)时,要特别慎重。

### 2. 小变形

材料力学把实际构件看作均匀、连续和各向同性的变形固体,并主要研究弹性范围内的小变形情况。由于构件的变形和构件的原始尺寸相比非常微小,通常在研究构件的平衡时,仍按构件的原始尺寸进行计算。

### 3. 外力

外力包括作用在构件上的载荷和支反力。

### 4. 内力与应力

(1) 材料力学研究的是外力引起的内力,内力与构件的强度、刚度密切相关。

(2) 截面法是材料力学的最基本的方法。

(3) 应力反映内力的分布集度。在研究平衡时,不能把应力直接代入平衡方程中,而应先求出其合力(即把应力乘以其作用面的面积),再代入平衡方程。

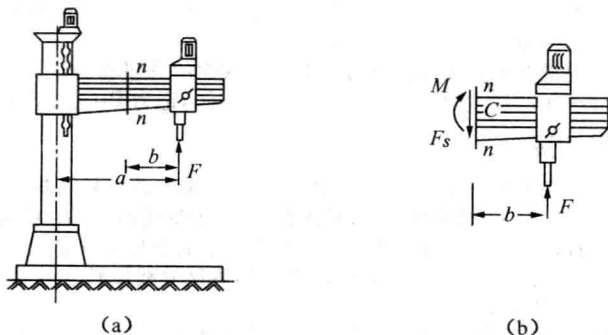
### 5. 位移与应变

(1) 材料力学研究的位移,既有变形引起的位移,也有刚体位移。

(2) 应变反映一点附近的变形情况。线应变和切应变是度量一点处变形程度的两个基本量。

## 1.3 习题详解

1.1 对题 1.1 图(a)所示钻床,试求  $n-n$  截面上的内力。



题 1.1 图

解 取截面  $n-n$  以右部分为研究对象,受力图如题 1.2 图(b)所示。由静力平衡条件:

$$\sum F_y = 0, F - F_s = 0 \quad (1)$$

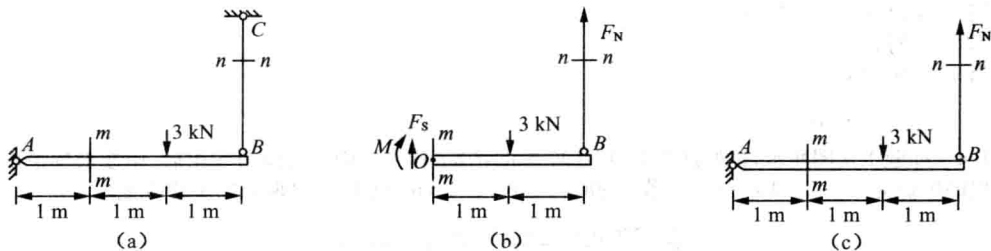
$$\sum M_c = 0, Fb - M = 0 \quad (2)$$

解之得

$$F_s = F, M = Fb$$

1.2 试求题 1.2 图(a)所示结构  $m-m$  和  $n-n$  两截面上的内力,并指出 AB 和 BC 两杆的变形属于何类基本变形。





题 1.2 图

解 取题 1.2 图(a)所示截面  $m-m$  以右部分为研究对象, 受力图如题 1.2 图(b)所示。由静力平衡条件:

$$\sum M_O = 0, F_N \times 2 - 3 \times 1 - M = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0, F_s + F_N - 3 = 0 \quad (2)$$

AB 杆属于弯曲变形。

取截面  $n-n$  以下部分为研究对象, 受力图如题 1.2 图(c)所示。由静力平衡条件:

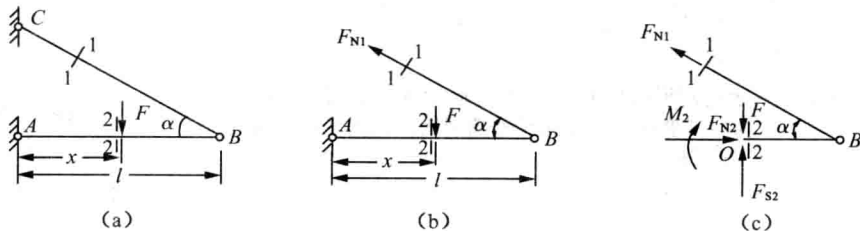
$$\sum M_A = 0, F_N \times 3 - 3 \times 2 = 0 \quad (3)$$

BC 杆属于拉伸变形。

由①、②、③式解之得

$$F_s = 1 \text{ kN}, \quad M = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad F_N = 2 \text{ kN}$$

1.3 在题 1.3 图(a)所示简易吊车的横梁上,  $F$  力可以左右移动。试求截面 1-1 和 2-2 上的内力及其最大值。



题 1.3 图

解 取截面 1-1 以右部分为研究对象, 受力图如题 1.3 图(b)所示。由静力平衡条件

$$\sum M_A = 0, F_{N1} \sin \alpha \cdot l - Fx = 0$$

解之得

$$F_{N1} = Fx / (l \sin \alpha)$$

取截面 1-1 和 2-2 以右部分为研究对象, 受力图如题 1.3 图(c)所示。由静力平衡条件

$$\sum F_x = 0, F_{N2} - F_{N1} \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, F_{s2} - F + F_{N1} \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_O = 0, F_{N1} \sin \alpha (l - x) - M_2 = 0 \quad (3)$$

解之得

$$F_{N2} = xF \cot \alpha / l, \quad F_{s2} = (1 - x/l)F, \quad M_2 = (l - x)Fx / l$$

因为  $F$  力可以左右移动, 所以

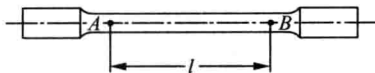
$$\text{当 } x=l \text{ 时, } F_{N1\max} = F/\sin\alpha$$

$$\text{当 } x=l \text{ 时, } F_{N2\max} = F \cdot \cot\alpha$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } F_{S2\max} = F$$

$$\text{当 } x = \frac{l}{2} \text{ 时, } M_{2\max} = \frac{Fl}{4}$$

1.4 如题 1.4 图所示, 拉伸试样上  $A$ 、 $B$  两点的距离  $l$  称为标距。受拉力作用后, 用变形量量出两点距离的增量为  $\Delta l = 5 \times 10^{-2}$  mm。若  $l$  的原长为  $l = 100$  mm, 试求  $A$ 、 $B$  两点的平均应变  $\epsilon_m$ 。



题 1.4 图

解 杆  $AB$  的平均应变为

$$\epsilon_m = \frac{\Delta l}{l} = \frac{5 \times 10^{-2}}{100} = 5 \times 10^{-4}$$

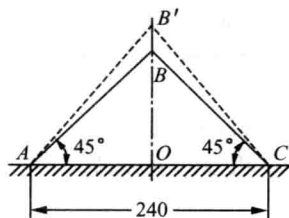
1.5 题 1.5 图所示的三角形薄板因受外力作用而变形, 角点  $B$  垂直向上的位移为  $0.03$  mm, 但  $AB$  和  $BC$  仍保持为直线。试求沿  $OB$  的平均应变, 并求  $AB$ 、 $BC$  两边在  $B$  点的角度改变。

解 由线应变和角应变的定义可知, 沿  $OB$  的平均应变为

$$\epsilon_m = (OB' - OB) / OB = \frac{0.03}{120} = 2.5 \times 10^{-4}$$

在  $B$  点的角应变为

$$\begin{aligned} r &= \frac{\pi}{2} - \angle AB'C \\ &= \frac{\pi}{2} - 2\angle AB'O = \frac{\pi}{2} - 2\left(\arctan \frac{120}{120.03}\right) \\ &= 2.5 \times 10^{-4} \text{ (rad)} \end{aligned}$$



题 1.5 图

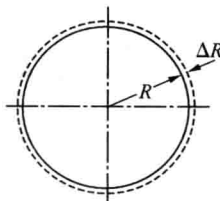
1.6 题 1.6 图所示的圆形薄板半径为  $R$ , 变形后  $R$  的增量为  $\Delta R$ 。若  $R = 80$  mm,  $\Delta R = 3 \times 10^{-3}$  mm, 试求沿半径方向和外圆圆周方向的平均应变。

解 沿半径方向的平均应变为

$$\epsilon_{\text{径}} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{3 \times 10^{-3}}{80} = 3.75 \times 10^{-5}$$

沿圆周方向的平均应变为

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{周}} &= \frac{2\pi(R + \Delta R) - 2\pi R}{2\pi R} \\ &= \frac{2\pi\Delta R}{2\pi R} = \frac{3 \times 10^{-3}}{80} \\ &= 3.75 \times 10^{-5} \end{aligned}$$



题 1.6 图

## 第二章 拉伸、压缩与剪切

### 2.1 内容提要

#### 2.1.1 轴向拉伸与压缩

杆件承受的外力(或外力的合力)作用线与杆轴线重合,并且杆件沿杆轴线方向伸长或缩短,这种变形形式称为轴向拉伸或轴向压缩。

#### 2.1.2 直杆横截面上的应力

1. 横截面上的内力:横截面上的内力的合力作用线与杆轴线重合,轴向内力  $F_N$  称为轴力。轴力的符号规则:拉力为正,压力为负。工程上常以轴力图表示轴力沿杆长的变化。

2. 横截面上的应力:根据圣维南(Saint-Venant)原理,在离杆端一定距离之外,横截面上各点的变形是均匀的,各点的应力也应是均匀的,并垂直于横截面,即为正应力。设杆的横截面面积为  $A$ ,则有

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad (2.1)$$

正应力的符号规则:拉应力为正,压应力为负。

#### 2.1.3 强度条件

1. 工程中为各种材料制成的构件规定了工作应力的最高限度,称为许用应力,用  $[\sigma]$  表示。
2. 轴向拉伸(压缩)强度条件。

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \leq [\sigma] \quad (2.2)$$

3. 用强度条件可解决工程中校核强度、截面设计和许可荷载确定三个方面的强度计算问题。
4. 在实际工程中,如果工作应力大于许用应力,但只要不超过 5%,通常允许使用。

#### 2.1.4 斜截面上的应力

与横截面成  $\alpha$  角的斜截面上的正应力和切应力为:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\alpha) \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \end{cases} \quad (2.3)$$

$\alpha$  角的符号规则:杆轴线  $x$  轴逆时针转到  $\alpha$  截面的外法线时,  $\alpha$  为正值;反之为负。

切应力的符号规则:切应力对单元体内任意一点的矩为顺时针转向时,规定为正,反之为负。

当  $\alpha=0^\circ$  时,正应力最大,即轴向拉伸(压缩)时,横截面上的正应力绝对值是所有截面上正应力绝对值中的最大值。当  $\alpha=45^\circ$ ,切应力达到极值。

#### 2.1.5 轴向拉伸(压缩)时的变形和胡克(Hooke)定律

1. 等直杆受轴向拉力  $F$  作用,杆的原长为  $l$ ,横截面积为  $A$ ,则杆的轴向伸长为

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \quad (2.4)$$

用内力表示为

试读结束: 需要全本请在线购买: [www.ertongbook.com](http://www.ertongbook.com)

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \quad (2.5)$$

上式为杆件拉伸(压缩)时的胡克定律。式中的  $E$  称为材料的拉伸(压缩)弹性模量,  $EA$  称为抗拉(压)刚度。

由于轴向应变  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , 且轴向拉伸(压缩)正应力  $\sigma = \frac{F_N}{A}$ , 则用应力与应变表示的胡克定律为

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.6)$$

2. 在弹性范围内, 杆件的横向应变  $\epsilon'$  和轴向应变  $\epsilon$  有如下的关系:

$$\epsilon' = -\mu\epsilon \quad (2.7)$$

式中的  $\mu$  称为泊松(Poisson)比(横向变形系数)。

### 2.1.6 轴向拉伸和压缩时的变形能

固体在外力作用下, 因变形而储存的能量称为变形能或应变能。

线弹性范围内的变形能:

$$V_\epsilon = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{F^2 l}{2EA} \quad (2.8)$$

应变能密度:

$$v_\epsilon = \frac{dV_\epsilon}{dV} = \frac{1}{2} \sigma\epsilon \quad (2.9)$$

### 2.1.7 简单拉压超静定问题

1. 结构的约束反力或构件的内力等未知力只用静力学平衡方程就能确定的问题称为静定问题。当结构的未知力的个数多于静力平衡方程的个数时, 只用静力平衡条件将不能求解全部未知力, 这类问题称为超静定问题, 未知力个数和静力平衡方程个数之差称为超静定次数(或阶数)。

2. 解决超静定问题, 除列出静力平衡方程外, 还需找出足够数目的补充方程, 这些补充方程可由结构各部分弹性变形之间的几何关系以及变形和力之间的物理关系求得, 将补充方程与静力平衡方程联立求解, 即可得出全部未知力。

3. 在超静定结构中, 内力的分配不仅与结构的各构件几何尺寸有关, 还与各杆间的刚度比相关。一般地说, 刚度愈大的杆, 内力相对就愈大, 这是超静定结构的一个特性。

超静定结构还有一个特性, 即由于杆件在制造中的误差, 将引起装配应力; 由于温度变化会引起温度应力(或变温应力); 支座的位移也会在结构中产生应力。

温度变化产生的位移由下式计算

$$\Delta l_T = \alpha l \Delta T$$

式中  $\alpha$  为材料的线膨胀系数。

### 2.1.8 材料在拉伸(压缩)时的力学性质

1. 低碳钢在拉伸时的力学性质:

(1) 低碳钢应力应变曲线分为四个阶段: 弹性阶段、屈服阶段、强化阶段和局部变形阶段。

(2) 低碳钢在拉伸时的三个现象: 屈服(或流动)现象、颈缩现象和冷作硬化现象。

(3) 低碳钢在拉伸时的特性(图 2.1):

a. 比例极限  $\sigma_p$ : 应力应变成比例的最大应力。

b. 弹性极限  $\sigma_e$ : 材料只产生弹性变形的最大应力。

c. 屈服极限  $\sigma_s$ : 屈服阶段相应的应力。

d. 强度极限  $\sigma_b$ : 材料能承受的最大应力。

(4) 低碳钢在拉伸时的两个塑性指标:

## (a) 延伸率

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \quad (2.10)$$

工程上通常将  $\delta > 5\%$  的材料称为塑性材料,  $\delta < 5\%$  的材料称为脆性材料。

## (b) 断面收缩率

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \quad (2.11)$$

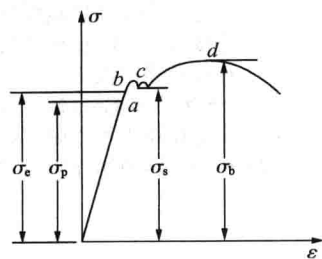


图 2.1

2. 工程中对于没有明显屈服阶段的塑性材料,通常以产生 2% 塑性应变时所对应的应力值作为屈服极限,以  $\sigma_{0.2}$  表示,称为名义屈服极限。

3. 灰铸铁是典型的脆性材料,其拉伸强度极限较低。

4. 材料在压缩时的力学性质:

(1) 低碳钢压缩时弹性模量  $E$  和屈服极限  $\sigma_s$  与拉伸时相同,不存在抗压强度极限。

(2) 灰铸铁压缩强度极限比拉伸强度极限高得多,是良好的耐压、减震材料。

5. 破坏应力:塑性材料以屈服极限  $\sigma_s$  (或  $\sigma_{0.2}$ ) 为其破坏应力;脆性材料以强度极限  $\sigma_b$  为其破坏应力。

## 2.1.9 应力集中

由于某种原因造成构件局部应力急剧增大的现象,称为应力集中。应力集中通常产生在几何形状突变处或受力突变区域。

发生应力集中截面的最大应力  $\sigma_{\max}$  与截面平均应力  $\sigma$  之比为  $K$ ,即:

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \quad (2.12)$$

称为理论应力集中因数。它是一个大于 1 的数,反映了应力集中的程度。

实验表明当截面变化急剧,如出现尖角、小孔时,应力集中将很严重。工程中应尽量避免。

在静载作用下,塑性材料对应力集中不敏感,而脆性材料存在应力集中则有严重后果。在动载作用下,对任何材料,应力集中都会大大降低构件的承载能力,而且往往就是构件破坏的根源,必须高度重视。

## 2.1.10 剪切与挤压的实用计算

## 1. 剪切的实用计算

构件受剪切力作用时,横截面上的应力分布非常复杂,工程上用平均切应力来建立强度条件:

$$\tau = \frac{F_s}{A} \leq [\tau] \quad (2.13)$$

式中  $F_s$  为横截面上的剪力,  $A$  为剪切面的面积。  $[\tau]$  为用实验方法确定的许用剪切平均切应力。

## 2. 挤压的实用计算

连接件中两构件在接触面上作用有相互压紧的压力  $F$ ,这种受力称为挤压。它在构件接触面附近的局部产生较大的而且分布复杂的接触正应力,称为挤压应力  $\sigma_{bs}$ ,挤压的强度条件仍然采用实用计算方法来建立:

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}] \quad (2.14)$$

式中  $A_{bs}$  为有效挤压面积。当为平面接触时,为实际承压面积;当为柱面接触时,为实际承压面积在其直径平面上的投影面积。  $[\sigma_{bs}]$  为材料的许用挤压应力。

## 2.1.11 连接件的计算

1. 连接件(非焊接)的破坏有如下几种可能:

(1) 被连接物(如钢板)因打孔后局部截面削弱造成拉伸(或压缩)正应力过大;

- (2) 被连接物在连接接触处挤压破坏;
  - (3) 连接体(如铆钉)剪切破坏;
  - (4) 连接体挤压破坏。
2. 当连接处为铆钉(螺栓)群时:
- (1) 在受拉压力作用时,认为各铆钉受力相同;
  - (2) 在受扭转力矩作用时,铆钉所受力与其到铆钉群中心的距离成正比。

## 2.2 学习重点

### 1. 轴向拉伸与压缩的应力

(1) 直杆所有截面中,横截面上的正应力最大;在与杆轴线成  $45^\circ$  的斜截面上切应力最大,是横截面上正应力的一半。

(2) 直杆纵向截面上应力等于零。

### 2. 轴向拉伸(压缩)的变形

计算轴向拉伸(压缩)变形的胡克定律只能用于等截面、等轴力的情况。对于变截面、变轴力杆件,应分为若干段分别计算,然后求和得全杆的变形。

### 3. 简单拉压超静定问题

(1) 解超静定问题的关键是列出正确的变形几何条件。

(2) 在列出变形几何条件时,注意所假设的杆件变形应是杆件可能发生的变形。同时,假设的内力符号应和变形一致。

### 4. 材料在拉伸(压缩)时的力学性质

(1) 低碳钢拉伸到强化阶段后,卸载时发生冷作硬化现象,材料的比例极限提高,塑性降低。卸载曲线平行于弹性阶段的直线。低碳钢在压缩时的屈服极限和拉伸时相同,拉伸和压缩的许用应力相同。

(2) 铸铁在压缩时的强度远大于拉伸时的强度,其拉伸和压缩许用应力不同。

### 5. 方法与技巧

#### (1) 胡克定律的应用

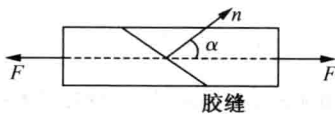
- a. 应用胡克定律计算杆件的变形时,内力应以代数值代入。
- b. 求解结构上节点的位移时,设想交于该节点的各杆,沿各自的杆轴线自由伸长或缩短,从变形后各杆的终点作各杆轴线的垂线,这些垂线的交点即为节点新的位置。

#### (2) 解超静定问题的步骤

- a. 列出静力平衡条件;
- b. 观察结构可能的变形,根据变形协调关系列出变形几何条件;
- c. 列出物理条件;
- d. 解联立方程组。

## 2.3 典型例题

**例 2.1** 例 2.1 图所示为胶合而成的等截面轴向拉杆,由于实用的原因,图中的  $\alpha$  角限于  $0 \sim 60^\circ$  范围内。作为假定计算,胶缝的强度可分别按其正应力强度和切应力强度进行核算。假设杆的强度由胶缝控制,已知胶的许用切应力  $[\tau]$  为许用正应力  $[\sigma]$  的  $3/4$ 。问  $\alpha$  为何值时,拉杆承受的荷载  $F$  为最大。



例 2.1 图

解 杆件横截面上的正应力为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A}$$

$\alpha$  斜截面上的应力为

$$\sigma_\alpha = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{F}{A} \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

(1) 按正应力核算

由强度条件:  $\sigma_\alpha = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha \leq [\sigma]$ , 得:  $F = \frac{[\sigma]A}{\cos^2 \alpha}$

由于  $\alpha$  角限于  $0 \sim 60^\circ$  范围, 因此正应力最大时,  $F = \frac{[\sigma]A}{\cos^2 60^\circ} = 4[\sigma]A$

考虑此时切应力安全,  $\tau_{60^\circ} = \frac{F}{A} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \leq [\tau] = \frac{3}{4}[\sigma]$

$$F = \sqrt{3}[\sigma]A = 1.732[\sigma]A$$

此时选  $\alpha = 60^\circ$ ,  $F_{\max} = 1.732[\sigma]A$

(2) 按切应力核算

由强度条件:  $\tau_\alpha = \frac{F}{2A} \sin 2\alpha \leq [\tau]$

在  $\alpha = 0^\circ$  时, 承受最大荷载。考虑此时正应力安全, 有

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$$

此时选  $\alpha = 0^\circ$ ,  $F_{\max} = [\sigma]A$

(3) 按正应力与切应力同时达到许用极限值核算

$$\tau_\alpha = \frac{F}{A} \cos \alpha \sin \alpha \leq [\tau] = \frac{3}{4}[\sigma] = \frac{3}{4} \frac{F}{A} \cos^2 \alpha$$

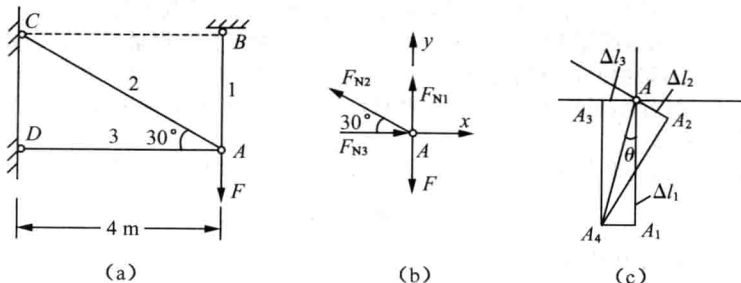
即  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\alpha = 36^\circ 53'$ 。此时,  $F = \frac{[\sigma]A}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1.56[\sigma]A$

综合以上分析可知, 在  $\alpha = 60^\circ$  时, 拉杆承受的荷载  $F$  为最大,  $F_{\max} = 1.732[\sigma]A$ 。

### □ 解题指导

要熟悉杆件受轴向拉伸(压缩)时, 横截面上应力与斜截面上应力的关系。特别要注意对各种可能出现的情况进行分析, 不要想当然地认为正应力与切应力同时达到最大时, 拉杆承受的荷载  $F$  一定为最大。

**例 2.2** 支架如例 2.2 图(a)所示。载荷  $F = 40 \text{ kN}$ , 三杆的材料相同,  $E = 200 \text{ GPa}$ , 各杆横截面积分别为  $A_1 = 200 \text{ mm}^2$ ,  $A_2 = 300 \text{ mm}^2$ ,  $A_3 = 400 \text{ mm}^2$ 。试求: (1) 各杆的内力; (2) 节点 A 的位移。



例 2.2 图

解 (1) 一次超静定问题, 研究节点 A, 如图(b)所示, 设杆 1, 2 受拉; 杆 3 受压  
静力平衡方程

$$F_{N3} - F_{N2} \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$F_{N1} + F_{N2} \sin 30^\circ - F = 0 \quad (2)$$

假设变形后  $A_i$  点为 A 点的新位置, 如图(c)所示, 由变形协调关系

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{\sin 30^\circ} + \frac{\Delta l_3}{\tan 30^\circ} \quad (3)$$

由胡克定律

$$\Delta l_i = \frac{F_{Ni} l_i}{EA_i}, i=1, 2, 3 \quad (4)$$

联立方程式①、②、③、④解之得

$$F_{N1} = 35.5 \text{ kN}, F_{N2} = 8.96 \text{ kN}, F_{N3} = 7.76 \text{ kN}$$

(2) 由图(c)可见

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \Delta l_3 = \frac{F_{N3} l_3}{EA_3} \\ &= \frac{7.76 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times 400} \times 4 \times 10^3 = 0.39 \text{ mm} (\leftarrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} \\ &= \frac{35.5 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times 200} \times 4 \times 10^3 \tan 30^\circ = 2.05 \text{ mm} (\downarrow) \end{aligned}$$

节点 A 的总位移

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} = \sqrt{0.39^2 + 2.05^2} = 2.09 \text{ mm}$$

位移的方位

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta_x}{\Delta_y}\right) = 10.77^\circ$$

### □ 解题指导

求解杆件超静定系统时, 应注意“力与位移的一致性”, 即拉力相应于拉伸变形。同时也要注意“变形的可能性”。对于汇交在一点的杆系建立变形几何条件时, 通常是设想解除汇交节点的约束, 各杆沿杆轴线自由伸长或压缩, 然后在各杆变形后的终点作杆轴线的垂线, 这些垂线必交于一点, 该点即为汇交节点的新位置。在变形图中找出各杆变形之间的关系, 即变形几何条件。

**例 2.3** 两端固定的组合杆由三部分组成, 如例 2.3 图所示, 1, 3 段为钢材, 2 段为铜材。已知钢材的弹性模量  $E_s = 200 \text{ GPa}$ , 线膨胀系数  $\alpha_s = 12.5 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ ; 铜材的弹性模量  $E_c = 100 \text{ GPa}$ , 线膨胀系数  $\alpha_c = 16.5 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ 。各段的面积分别为  $A_1 = 600 \text{ mm}^2$ ,  $A_2 = 1200 \text{ mm}^2$ ,  $A_3 = 900 \text{ mm}^2$ 。试求: (1) 在一对轴向载荷  $F = 40 \text{ kN}$  作用下各段的内力; (2) 在载荷  $F$  作用下, 杆的温度再升高  $20^\circ\text{C}$  时各段的内力。

解 一次超静定问题

(1) 假设固定端 A 的约束力为  $F_A$ , 如图(b)所示, 则 1, 2, 3 各段的内力分别为

$$F_{N1} = F_A, F_{N2} = F_A - F, F_{N3} = F_A \quad (1)$$

由于杆两端固定, 总的伸长为零, 即

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0 \quad (2)$$

由胡克定律



$$\Delta l_i = \frac{F_{N_i} l_i}{E_i A_i}, i=1, 2, 3 \quad (3)$$

联立方程①, ②, ③并求解

$$F_{N1} = 18.94 \text{ kN}, F_{N2} = -21.06 \text{ kN}, F_{N3} = 18.94 \text{ kN}$$

(2) 温度的改变将会引起各段的变形, 但因杆两端固定, 总的伸长仍为零。所以

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0 \quad (4)$$

$$\Delta l_i = \frac{F_{N_i} l_i}{E_i A_i} + \alpha_i \Delta T l_i, i=1, 2, 3 \quad (5)$$

联立方程①、④、⑤并求解

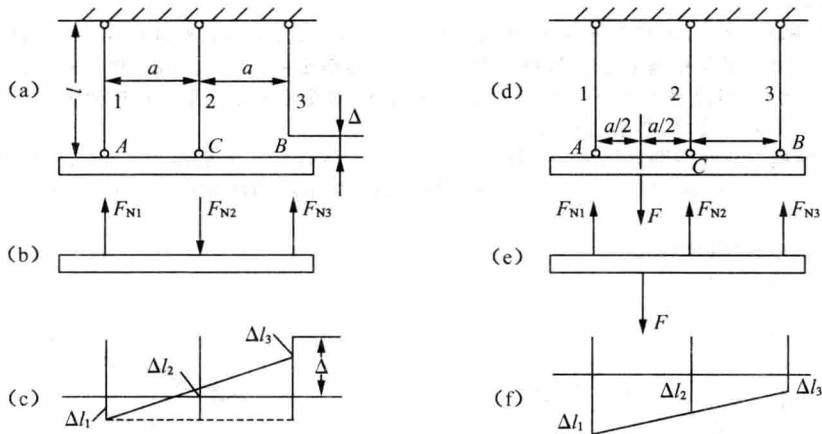
$$F_{N1} = -18.76 \text{ kN}, F_{N2} = -58.76 \text{ kN}, F_{N3} = -18.76 \text{ kN}$$

### □ 解题指导

(1) 本题中, 杆内各段的变形在一条线上, 可假设各段均受拉力, 产生拉变形, 在物理条件中的内力均为代数值。如计算结果为正, 内力为拉力; 计算结果为负, 内力为压力。

(2) 在小变形下, 载荷产生的内力和温度变化引起的内力可以分别计算, 然后叠加得到总的内力。请读者试一试。

**例 2.4** 一结构如例 2.4 图(a)所示。钢杆 1、2、3 的面积均为  $A=200 \text{ mm}^2$ , 弹性模量  $E=200 \text{ GPa}$ , 长度  $l=1 \text{ m}$ 。制造时杆 3 短了  $\Delta=0.8 \text{ mm}$ 。试求(1) 杆 3 和刚性杆 AB 连接后, 各杆的内力; (2) 如例 2.4 图(d)所示, 在装配好的结构上再加载荷  $F=36 \text{ kN}$  时, 各杆的内力。



例 2.4 图

**解** (1) 设杆 3 和 AB 连接后, 杆 1、2、3 的内力分别为  $F_{N1}$ 、 $F_{N2}$ 、 $F_{N3}$ , 杆 1、3 受拉, 杆 2 受压, 如图(b)所示。由静力平衡条件:

$$F_{N1} + F_{N3} - F_{N2} = 0 \quad (1)$$

$$F_{N3} a - F_{N1} a = 0 \quad (2)$$

几何变形关系, 如图(c)所示

$$\Delta = \Delta l + 2(\Delta l_1 + \Delta l_2) - \Delta l_1 \quad (3)$$

胡克定律

$$\Delta l_i = \frac{F_{N_i} l_i}{E_i A_i}, i=1, 2, 3 \quad (4)$$