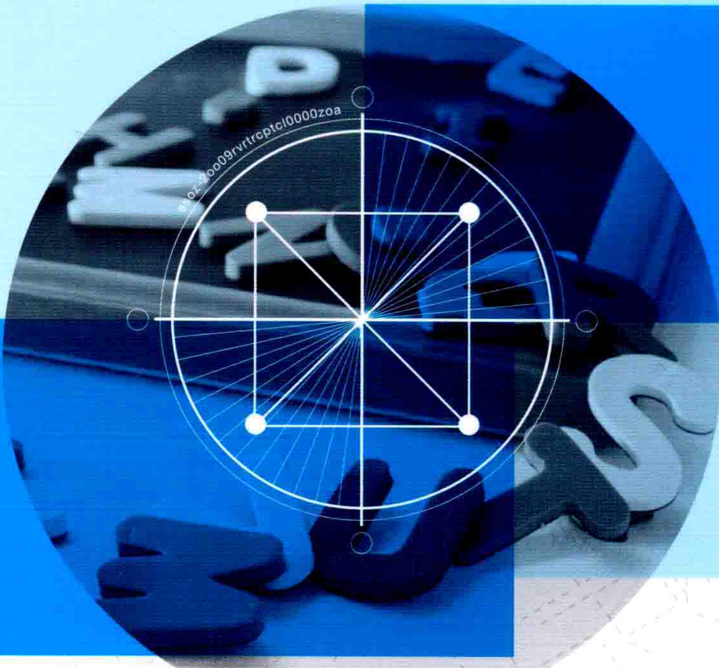
应用技术型高等教育“十二五”规划教材

经济数学——概率论与数理统计

主　编　林少华　孟艳双
副主编　鲁慧芳　毛松军　曲庆国
主　审　史　昱



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

应用技术型高等教育“十二五”规划教材

经济数学——概率论与数理统计

主　编　林少华　孟艳双

副主编　鲁慧芳　毛松军　曲庆国

主　审　史　昱

中国水利水电出版社

内 容 提 要

本书共八章，包括随机事件及概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验。本书知识结构严密，逻辑思维清晰，内容深入浅出，叙述详尽易懂，注重抽象概念的背景与应用背景的介绍，便于使学习者更好地理解与掌握概率论与数理统计理论，提高其利用概率论与数理统计的思维与方法解决实际问题的能力，并在遵照教学基本要求的前提下，拓展了概率论与数理统计学科的知识面和应用性。每章配有适量的习题，书末配有习题参考答案，便于帮助学习者进行自我评价。

本书可作为高等院校经济和管理类等学科的教材，也可作为相关专业教师及学生的学习参考书。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学. 概率论与数理统计 / 林少华，孟艳双主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2014.8
应用技术型高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-2101-8

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①林… ②孟… Ⅲ. ①经济数学一高等学校一教学参考资料②概率论一高等学校一教材③数理统计一高等学校一教材 Ⅳ. ①F224.0②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第118018号

策划编辑：宋俊娥　责任编辑：李　炎　加工编辑：田新颖　封面设计：李　佳

书　　名	应用技术型高等教育“十二五”规划教材 **经济数学——概率论与数理统计**
作　　者	主　编　林少华　孟艳双 副主编　鲁慧芳　毛松军　曲庆国 主　审　史　昱
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京上元柏昌印刷有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　9.75 印张　198 千字
版　　次	2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	18.00 元

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象的客观规律的一门数学学科．随着现代科学技术的发展，它已经被广泛应用于经济、管理等各个领域中．本书侧重于帮助学生掌握处理随机现象的基本思想和方法，培养学生应用概率统计方法分析和解决实际问题的能力，为他们学习专业课程和进一步的深造提供良好的理论基础和发展平台．

本书是根据教育部文科数学课程教学指导委员会最新修订的《文科类本科数学基础课教学基本要求》（修订稿）的精神和原则，结合多年学习、研究和教学工作中的一些感悟与经验，面向文科类本科各专业大学生编写的《概率论与数理统计》教材．本书内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计中的几种常见分布、参数估计、假设检验．

本书由林少华，孟艳双任主编，鲁慧芳，毛松军，曲庆国任副主编，史昱主审．各章的具体分工如下：第 1 章由林少华编写，第 2 章由孟艳双编写，第 3 章由曲庆国编写，第 4 章由毛松军编写，第 5、6 章由鲁慧芳编写，第 7、8 章由上述各位老师合作编写．

在本书编写过程中，参阅了大量国内外同类教材，受到不少启发和教益，谨向有关作者表示诚挚的谢意！同时，山东交通学院教务处、理学院的有关领导及同仁对本书的编写给予了热情的支持和指导，在此一并致谢．

与一些常见的教材相比，本书部分内容做了较大修改，这是改革教学内容与教学方法的一种探索和尝试．虽然作者尽了最大努力，但一些改动和叙述未必臻于完善，甚或多有不妥之处．同时，由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请批评指正，以便不断改进．

编写组

2014 年 4 月

目　　录

第 1 章　随机事件及概率

1.1　随机事件

一、随机试验

人们在实际活动中会遇到两类现象，一类称之为**确定性现象（必然现象）**，例如，向空中抛掷一石子，石子落地；同性电荷相斥，异性电荷相吸等．另一类称之为**随机现象（偶然现象）**，例如，抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面（规定刻有国徽的一面为正面）朝上，也可能是反面朝上；在合格品率为 80%的产品中任取一件产品，有可能取到的是合格品，也有可能取到的是不合格品．

在实际问题中，需要做各种各样的观察与试验，一般的，满足以下三个条件的试验称为**随机试验**．

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是事先明确可知的；

（3）每次试验之前不能确定哪一个结果一定会出现．

随机试验包括对随机现象进行观察、测量、记录或进行科学实验等．我们以后提到的试验都是指随机试验，也简称为**试验**，通常用字母 E 表示．例如：

E_1：将质地均匀的一枚硬币投掷一次，观察正面或反面朝上的情况．

E_2：一箱中装有标号从 1 到 30 的 30 只红、白两种颜色的乒乓球，从箱中任意抽取 1 只球，（1）观察其号数；（2）观察其颜色．

E_3：记录某网站在 1 分钟内的点击次数．

E_4：观察某厂生产的灯泡的使用寿命．

对于随机现象，人们经过长期的观察或进行大量的试验发现：这些发生的结果并非是杂乱无章的，而是有规律可寻的．例如，大量重复地抛掷一枚硬币，得到正面朝上的次数与正面朝下的次数大致都是抛掷总次数的一半；同一门炮发射多发炮弹射击同一目标，弹着点按照一定的规律分布．在大量的重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是我们所说的**统计规律性**．而概率论与数理统计正是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．

二、样本空间

对于随机试验，人们感兴趣的是试验结果，即每次随机试验后所发生的结

果．我们将随机试验 E 的每一个可能的结果，称为随机试验 E 的一个**样本点**，通常记作 ω．随机试验 E 的所有样本点组成的集合叫做试验 E 的**样本空间**，通常用字母 Ω 表示．

例 1　E_1：将质地均匀的一枚硬币投掷一次，观察正面或反面朝上的情况．

"正面朝上"和"反面朝上"是 E_1 的两个样本点，所以样本空间可简记为

$$\Omega=\{正，反\}.$$

例 2　E_2：一箱中装有标号从 1 到 20 的 20 个红、白两种颜色的乒乓球，从箱中任意抽取 1 个球，（1）观察其号数；（2）观察其颜色．

（1）观察其号数

"取得 i 号球"，$i=1,2,\cdots,20$ 是 E_2 的样本点，所以样本空间可简记为

$$\Omega=\{1,2,\cdots,20\};$$

（2）观察其颜色

令 $\omega_1=$"取得红球"，$\omega_2=$"取得白球"，则样本空间

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}.$$

例 3　E_3：记录某网站在 1 分钟内的点击次数．

"点击 k 次"，$k=1,2,\cdots,n,\cdots$ 是 E_3 的样本点，所以样本空间可简记为

$$\Omega=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

例 4　E_4：在一批灯泡中任意抽取一只，测试其燃烧寿命．

"测得灯泡燃烧寿命为 t 小时（$0\leqslant t<+\infty$）"是 E_4 的样本点，所以样本空间可表示为

$$\Omega=\{t|0\leqslant t<+\infty\}.$$

例 5　E_5：将质地均匀的一枚硬币投掷两次，观察正面或反面朝上的情况．

试验 E_5 的全部样本点是：(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)，其中(正，正)表示"掷第一次正面朝上，掷第二次正面朝上"，依此类推．则样本空间为

$$\Omega=\{(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)\}.$$

从上述例题可以看到：样本空间可以是一维点集或多维点集，可以是离散点集，也可以是某个区域，可以是有限集或无限集（对应的称为有限样本空间或无限样本空间）．

三、随机事件

随机事件　一个随机试验中可能发生也可能不发生的事件称为该试验的随机事件（简称事件），通常用字母 A、B、C 等表示．实际上，随机事件是由若干个样本点组成的集合，是样本空间的子集．

基本事件　试验的每一可能的结果叫做基本事件．一个样本点 ω 组成的单点集 $\{\omega\}$ 就是随机试验的基本事件．

必然事件　每次试验中必然发生的事件称为必然事件．显然，样本空间是必

然事件，也记为Ω.

不可能事件 每次试验中不可能发生的事件称为不可能事件．它不含任何样本点，可理解为空集，记为$\varnothing$.

注意：

（1）样本空间的构成是由试验的条件和观察的目的所决定.

（2）基本事件是事件的一种，一般的事件是由若干个基本事件共同组成的，因而是样本空间的子集，通常又称其为复合事件.

（3）随机事件的另一个定义：样本空间Ω的某个子集．事件A发生当且仅当试验中出现A中包含的某个基本事件.

四、事件之间的关系和运算

在一个样本空间Ω中，可以包含许多的随机事件．研究随机事件的规律，往往是通过对简单事件规律的研究去发现更为复杂事件的规律．为此，我们引入事件之间的一些重要关系和运算．由于任一随机事件是样本空间的子集，所以事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算是完全类似的.

1．事件的包含及相等

如果“事件A的发生必然导致事件B的发生”，则称事件B包含事件A，也称A是B的子事件，记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A.$$

例如，掷一枚骰子，观察出现的点数，其样本空间$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，设$A=\{2,4\}$，$B=\{2,4,6\}$，显然$A\subset B$，即事件A是事件B的子事件.

注意：对任一事件A都有子事件关系

$$\varnothing\subset A\subset\Omega.$$

我们给出事件包含关系的一个直观的几何解释：平面矩形区域表示样本空间Ω，圆形区域A与圆形区域B分别表示事件A与事件B．由于A中的所用样本点全部属于B，所以事件B包含事件A，见图 1-1.

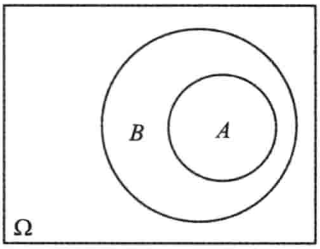


图 1.1 $A\subset B$

如果有$A\subset B$且$B\supset A$，则称事件A与事件B相等，记作$A=B$.

易知，相等的两个事件 A，B 总是同时发生或同时不发生，亦即 $A=B$ 等价于它们是由相同的样本点组成的.

2. 事件的和（并）

“事件 A 与 B 中至少有一个事件发生”这样的事件称为事件 A 与 B 的和事件，记作 $A\cup B$.

可见，$A\cup B$ 是由所有属于 A 或属于 B 的样本点组成. 事件 A 与 B 的和事件 $A\cup B$ 对应集合 A 与 B 的并集. 如图 1.2 阴影部分所示.

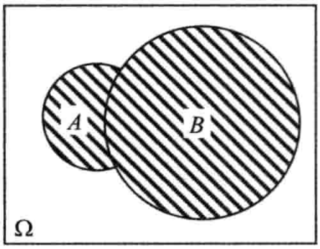


图 1.2　$A\cup B$

例如，在掷一枚骰子的试验中，若设事件 $A=\{2,3\}$，事件 $B=\{1,2\}$，则和事件为 $C=A\cup B=\{1,2,3\}$，表示{掷出的点数小于 4}.

和事件可以推广到有限多个事件与可列多个事件之和的情形：

对于“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”这一事件，我们称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示，简记为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i .$$

对于“可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生”这一事件，我们称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件，用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 表示，简记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i .$$

3. 事件的积（交）

“事件 A 与 B 同时发生”这样的事件称作事件 A 与 B 的积（或交）事件，记作

$$A\cap B \text{ 或 } AB .$$

AB 是由既属于 A 又属于 B 的样本点组成. 如果将事件用集合表示，则事件 A 与 B 的积事件 AB 对应集合 A 与 B 的交集. 其几何意义如图 1-3 中的阴影部分所示.

例如，在掷骰子试验中，若设事件 $A=\{1,3,5\}$，事件 $B=\{1,2\}$，则积事件为

$C=A\cap B=\{1\}$，表示{掷出的点数是 1 点}.

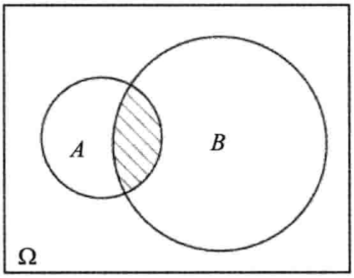


图 1.3　$A \cap B$

类似地，也可以将积事件推广到有限多个与可列多个事件之积的情形：

用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的事件；

用 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生的事件.

4. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这样的事件称为事件 A 与 B 的差事件，记作

$$A - B.$$

$A - B$ 是由所有属于 A 而不属于 B 的样本点组成，其几何意义如图 1.4 中的阴影部分所示.

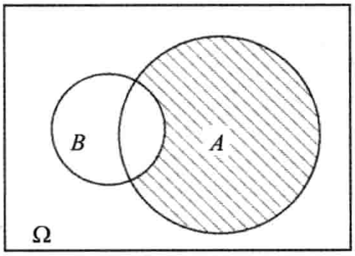


图 1.4　$A - B$

例如，在掷骰子试验中，若设事件 $A = \{2,3,4\}$，事件 $B = \{1,2\}$，则差事件

$$A - B = \{3,4\}.$$

5. 事件互不相容

“事件 A 与事件 B 不能同时发生”，也就是说，AB 是一个不可能事件，即

$$AB = \varnothing,$$

此时称事件 A 与 B 是互不相容的（或互斥的）.

通常把两个互不相容的事件 A 与 B 的并记作

$$A + B.$$

A 与 B 互不相容等价于它们没有相同的样本点，即没有公共的样本点．若用集合表示事件，则 A 与 B 互不相容即为 A 与 B 是不相交的，如图 1.5 所示．

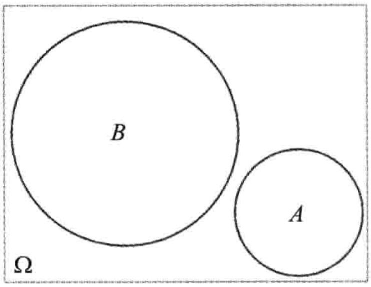


图 1.5　$AB=\varnothing$

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中，任意两个事件都不可能同时发生，即

$$A_i \cap A_j = \varnothing，\ i \neq j，\ i, j = 1, 2, \cdots, n .$$

则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的（或两两互斥的）．

通常把 n 个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并记作

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad （简记为 \sum_{i=1}^{n} A_i ）.$$

容易看出，在随机试验中，任何两个不同的基本事件都是互不相容的：任一事件 A 与 $B-A$ 是互不相容的，即

$$A \cap (B-A) = \varnothing .$$

6. 对立事件（逆事件）

若 A 是一个事件，令 $\overline{A} = \Omega - A$，称 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，或称为事件 A 的逆事件．

也就是说，$\overline{A}$ 是由样本空间 Ω 中所有不属于 A 中的样本点构成的．如果把事件 A 看作集合，那么 $\overline{A}$ 就是 A 的补集．图 1.6 中的阴影部分表示 $\overline{A}$.

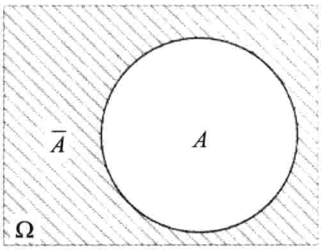


图 1.6　$\overline{A}$

显然，在一次试验中，若 A 发生，则 $\overline{A}$ 必不发生，反之亦然；A 与 $\overline{A}$ 中必然有一个发生，且仅有一个发生，即事件 A 与 $\overline{A}$ 满足关系

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A + \overline{A} = \Omega.$$

对任意的事件 A，B，有

$$A - B = A\overline{B}.$$

必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 是对立事件，同时又是互不相容事件.

注意：若事件 A，B 互为对立事件，则事件 A，B 必互不相容；但是，若事件 A，B 互不相容，则事件 A，B 未必是互为对立事件.

例如，在掷骰子试验中，若 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,5\}$，则 A 与 B 互不相容. 但是，事件 B 不是 A 的对立事件，A 的对立事件 $\overline{A}=\{3,4,5,6\}$.

7. 完备事件组

将事件 A 与 $\overline{A}$ 的关系推广到 n 个事件的情形：

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生，且任意两个事件不可能同时发生，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega,$$
$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组，又称为样本空间 Ω 的一个划分. 见图 1.7.

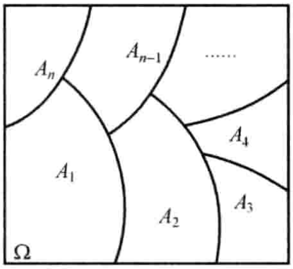


图 1.7　样本空间 Ω 的一个划分

例如，在掷骰子试验中，事件 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,5\}$，$C=\{4,6\}$ 构成一个完备事件组.

五、事件运算法则

由事件关系与运算的定义可以看出，它们与集合的关系与运算是一致的. 因此，集合的运算性质对事件的运算也都适用.

事件的运算法则有：

1. 交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA. \tag{1.1.1}$$

2. 结合律

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \tag{1.1.2}$$

$$ABC=(AB)C=A(BC).\tag{1.1.3}$$

3. 分配律

$$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C),\tag{1.1.4}$$

$$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC).\tag{1.1.5}$$

4. 德摩根公式

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\ \overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B},\tag{1.1.6}$$

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.\tag{1.1.7}$$

例 6 设 A，B，C 是三个事件，试用 A，B，C 的运算关系表示下列各事件.

（1）B，C 都发生，而 A 不发生；（2）A，B，C 中至少有一个发生；

（3）A，B，C 中恰有一个发生；（4）A，B，C 中恰有两个发生；

（5）A，B，C 中不多于一个发生；（6）A，B，C 中不多于两个发生.

解 （1）“B，C 都发生，而 A 不发生”表示为：$\overline{A}BC$；

（2）“A，B，C 中至少有一个发生”表示为：$A\cup B\cup C$；

（3）“A，B，C 中恰有一个发生”表示为：$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

（4）“A，B，C 中恰有两个发生”表示为：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

（5）“A，B，C 中不多于一个发生”表示为：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

（6）“A，B，C 中不多于两个发生”表示为：$\overline{ABC}$，或者 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

1.2 随机事件的概率

我们观察一项随机试验所发生的各个结果，就其一次具体的试验而言，每一事件出现与否都带有很大的偶然性，似乎没有规律可言. 但是在大量的重复试验后，就会发现：某些事件发生的可能性大些，另外一些事件发生的可能性小些，而有些事件发生的可能性大致相同. 例如，一个箱子中装有 100 件产品，其中 95 件是合格品，5 件是次品. 从其中任意取出一件，则取到合格品的可能性就比取到次品的可能性大. 假如这 100 件产品中的合格品与次品都是 50 件，则取到合格品与取到次品的可能性就应该相同. 所以，一个事件发生的可能性大小是它本身所固有的一种客观的度量. 很自然，人们希望用一个数来描述事件发生的可能性大小，而且事件发生的可能性大，这个数就大；事件发生的可能性小，这个数就小.

为此，我们首先引入“频率”的概念，它描述了事件在相同条件下重复多次试验所发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数量指标——概率.

一、频率

定义 1 在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的