普通高等教育"十二五"规划教材 公共基础课系列

微积分

Calculus

郎艳怀 主编

上海财经大学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材·公共基础议

微积分

郎艳怀　主编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/郎艳怀主编．—上海：上海财经大学出版社，2014.4
(普通高等教育“十二五”规划教材·公共基础课系列)
ISBN 978-7-5642-1853-9/F·1853

Ⅰ.①微… Ⅱ.①郎… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 037331 号

□ 责任编辑 王 芳
□ 封面设计 钱宇辰
□ 订购电话 021－65904705

WEIJIFEN
微 积 分
郎艳怀 主编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)
网 址：http://www.sufep.com
电子邮箱：webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海华业装潢印刷厂印刷装订
2014 年 4 月第 1 版 2014 年 4 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 15 印张 384 千字
印数：0 001—4 000 定价：36.00 元

前　言

PREFACE

随着经济的飞速发展，金融和管理等学科的科研和应用对数学知识的要求越来越高，为了给学生打好坚实的数学基础，本科院校都把高等数学作为基础课程，经济管理类的本科生的数学教材一般称为《微积分》。

目前国内外的《微积分》(Calculus)教材种类繁多，数以千计，适应不同专业、不同层次的人才培养需要，但是针对独立院校的教材还比较少。上海财经大学浙江学院是一所独立院校，我们在几年的教学实践中，借用其他本科院校的教材，发现很不适应。为此，学院将《微积分》课程作为精品课程来建设，我们结合教学实践，立足独立学院的特点和学生的实际，编写了这本《微积分》教材，希望为独立学院的教材建设做出我们的贡献。

本书编写的宗旨是以教育部的教学大纲为标准，以经济管理类专业要求为方向，注重高等数学的基础理论、全面的基本知识系统，以数学在经济和管理中的应用为落脚点，培养学生良好的逻辑推理思想、严谨的思维方法及运用数学解决问题的能力。本书内容简洁明快，叙述深入浅出，学生阅读轻松，教学使用便捷，在轻松愉快的氛围中引领学生达到具有数学素质人才的境界。

本教材由上海财经大学浙江学院基础部的数学老师编写，参加编写的老师是邹晓光、沈炳良、武斌，郎艳怀负责统纂。具体分工如下：邹晓光老师负责第一、二、三章的编写，沈炳良老师负责第五、六、七章的编写，武斌老师负责第四、八、九章的编写。

为了做好编写工作，老师们总结教学经验，仔细斟酌。鉴于我们水平有限，书中难免有错误和不当之处，请读者和教师提出宝贵意见，一起来做好这本教材的完善和改进工作。作者的联系邮箱：yhlang@shufe.edu.cn

在书稿的编写过程中，我们得到了上海财经大学浙江学院的支持及上海财经大学出版社的关心和协助，在此一并致谢！

编者

2014 年 3 月

目　录

CONTENTS

第一章

函数、极限与连续

本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步理解函数概念，函数的微、积分及其应用. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是学习微积分的关键，连续是函数的一个重要性态，本章将在理解函数概念的基础上，介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法.

第一节 函数

一、常量与变量

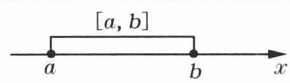
在观察某一现象的过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不发生变化，我们将其称为常量；有的量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，我们将其称为变量.

在过程中还有一种量，它虽然是变化的，但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的，我们则将其称为常量.

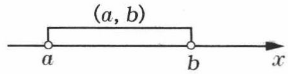
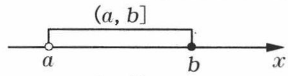
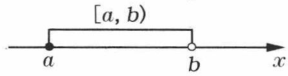
如果变量的变化是连续的，则常用区间来表示其变化范围.

在数轴上来说，区间是指介于某两点之间的线段上点的全体.

表 1—1

区间的名称	区间满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a,b]$	

续表

区间的名称	区间满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开区间	$a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$	$(a,b]$或$[a,b)$	 

以上我们所述的都是有限区间，除此之外，还有无限区间：

$[a,+\infty)$：表示不小于 a 的实数的全体，也可记为：$a\leqslant x<+\infty$；

$(-\infty,b)$：表示小于 b 的实数的全体，也可记为：$-\infty<x<b$；

$(-\infty,+\infty)$：表示全体实数，也可记为：$-\infty<x<+\infty$.

其中，$-\infty$和$+\infty$分别读作“负无穷大”和“正无穷大”，它们不是数，仅仅是记号.

二、邻域

定义 1.1 设 $a,\delta\in R,\delta>0$，数集 $\{x\mid |x-a|<\delta,x\in R\}$，即实数轴上和 a 点的距离小于δ 的点的全体，称为点 a 的δ 邻域，记作$U(a,\delta)$，点 a 与数δ 分别称为这个邻域的中心和半径.有时用$U(a)$表示点 a 的一个泛指的邻域.数集$\{x\mid 0<|x-a|<\delta,x\in R\}$，称为点 a 的去心δ 邻域，记作$\overset{0}{U}(a,\delta)$.

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),\overset{0}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

三、函数的概念

定义 1.2 如果变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 通常 x 称为自变量，y 称为因变量，变量 x 的变化范围 D 称为函数的定义域，记为 D_f，即 $D_f=D$.函数值 $f(x)$的全体所构成的集合称为函数的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即：$R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

为了表明 y 是 x 的函数，我们用记号 $y=f(x)$、$y=F(x)$等来表示.这里的字母 f、F 表示 y 与 $y=f(x)$之间的对应法则即函数关系，它们可以任意采用不同的字母来表示.

如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 这里我们只讨论单值函数.

例 1 求下列函数的定义域：

(1)$y=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$ ；　　(2)$y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}$.

解：(1)由题意可得，x 应满足不等式$\begin{cases}2x+1>0\\4-3x\geqslant 0\end{cases}$，解得：$-\dfrac{1}{2}<x\leqslant\dfrac{4}{3}$，所求函数定义域 D_f 为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3}\right]$.

(2)由题意可得，x 应满足不等式$\begin{cases}x+2\geqslant 0\\|x|-x\neq 0\end{cases}$，解得：$-2\leqslant x<0$，所求函数定义域 D_f 为 $[-2,0)$.

四、函数的常用表示法

函数的表示法主要有三种：解析法、表格法和图像法.用图像法表示函数是基于函数图像的概念，坐标平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图像.

在函数的定义中，并不要求当自变量变化时函数的值一定要改变，因此，即使所有的 x 值都对应于一个 y 值也是允许的，即常数函数 $y=c$.

在实际问题中，经常会遇到用几个式子表示一个函数的情形，这种在自变量的不同变化范围，对应法则用不同式子表示的函数，通常称为分段函数，它仍然是一个函数，而非多个函数.

例 2　函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\-x, & x<0\end{cases}$，函数定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=[0,+\infty)$，它的图形如图 1—1 所示，则函数称为绝对值函数.

例 3　函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$，该函数称为符号函数，它的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1—2 所示. 对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

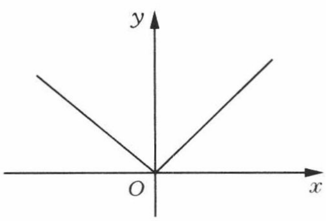


图 1—1

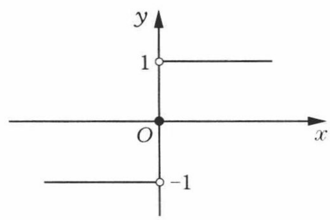


图 1—2

例 4　函数 $y=[x]$表示不超过 x 的最大整数，即 $y=[x]=n,n\leqslant x<n+1,n=0,\pm1,\pm2\cdots$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，函数的图像如图 1—3 所示，称该函数为取整函数.

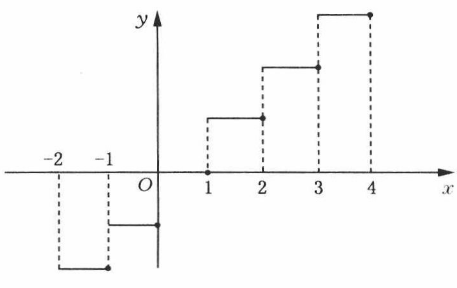


图 1—3

例 5 函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\0, x\in R-Q\end{cases}$,称该函数为狄利克雷(Dirichlet)函数. 该函数图形不能简单地表示成直接或曲线的形式。

五、函数的特性

1. 函数的有界性

定义 1.3 如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,其中 M 是一个与 x 取值无关的常数,那么我们就称 $|f(x)|$ 在区间 I 有界,反之称为无界.

若函数在其整个定义域内有界,则称为有界函数.

例 6 函数 $\sin x$、$\cos x$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内是有界的.

2. 函数的单调性

定义 1.4 如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随着 x 增大而增大,即:对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调增加的.

如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随着 x 增大而减小,即:对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调减小的.

例 7 函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调减小的,在区间$(0,+\infty)$上是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

定义 1.5 如果函数 $f(x)$对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$叫做偶函数;如果函数 $f(x)$对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$叫做奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称。

例 8 判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}$,其中 $a>0$ 且 $a\neq0$;

(2)$f(x)=\begin{cases}-x^3+3, x<0\\x^3+1, x\geqslant0\end{cases}$.

解 (1)由于

$$\begin{aligned}f(-x)&=\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{a^x+1-1}{1+a^x}-\frac{1}{2}\\&=1-\frac{1}{1+a^x}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{1+a^x}+\frac{1}{2}\\&=-f(x)\end{aligned}$$

因此,$f(x)$是奇函数。

(2)由于

$$\begin{aligned}f(-x)&=\begin{cases}-(-x^3)+1, -x<0\\(-x)^3+1, -x\geqslant0\end{cases}\\&=\begin{cases}x^3+1, x>0\\-x^3+1, x\leqslant0\end{cases}\\&=\begin{cases}x^3+1, x\geqslant0\\-x^3+1, x<0\end{cases}\\&=f(x)\end{aligned}$$

因此，$f(x)$是偶函数。

4. 函数的周期性

定义 1.6　对于函数 $f(x)$，若存在一个不为零的数 T，使得关系式 $f(x+T)=f(x)$对于定义域内任何 x 值都成立，则 $f(x)$叫做周期函数，T 是 $f(x)$的周期.

在无特殊说明情况下，本书所指周期函数的周期是指最小正周期.

例 9　函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数。

第二节　初等函数

一、反函数与复合函数

定义 2.1　设有函数 $y=f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域内必有唯一值 x_0 与之对应，即 $y_0=f(x_0)$，那么，变量 x 是变量 y 的函数.

这个函数用 $x=f^{-1}(y)$来表示，称为函数 $y=f(x)$的反函数. 由此定义可知，函数 $y=f(x)$也是函数 $x=f^{-1}(y)$的反函数.

例如，函数 $y=x^3$，对任意一个 $y_0\in R_f$，都存在唯一的 $x_0\in R$ 与之对应，所以，该函数存在反函数 $x=y^{\frac{1}{3}}$，$y\in R$.

由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以，通常我们把反函数改写成：

$$y=f^{-1}(x),x\in f(D)$$

定理 2.1（反函数的存在定理）

若 $y=f(x)$在定义域 D_f 上严格单调递增(减)，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$必定存在，且 $y=f^{-1}(x)$在定义域 $f(D)$上严格单调递增(减).

证明：任取 $y_1,y_2\in f(D)$，且 $y_1<y_2$. 按函数 f 的定义，对 y_1，在 D 内存在唯一的原像 x_1，使得 $f(x_1)=y_1$，于是 $f^{-1}(y_1)=x_1$；对 y_2，在 D 内存在唯一的原像 x_2，使得 $f(x_2)=y_2$，于是 $f^{-1}(y_2)=x_2$.

如果 $x_1>x_2$，则由 $f(x)$单调递增，必有 $y_1>y_2$；如果 $x_1=x_2$，则显然有 $y_1=y_2$. 这两种情形都与假设 $y_1<y_2$ 不符，故必有 $x_1<x_2$，即 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.

这就证明了 f^{-1}在 $f(D)$上是单调增加的。

例如，$y=x^2$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$. 对于取定的 $y\geqslant 0$，可求得 $x=\pm\sqrt{y}$. 若我们不加条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是在区间$(-\infty,+\infty)$上，函数不是严格单调递增(减)，故其没有反函数. 若我们确定定义域为 $x\in[0,+\infty)$，则对 $y\in[0,+\infty)$，$x=\sqrt{y}$ 就是 $y=x^2$ 在定义域$[0,+\infty)$内的反函数，即函数在$[0,+\infty)$内是严格单调递增(减)的.

在同一坐标平面内，$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

例如，函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1—4 所示.

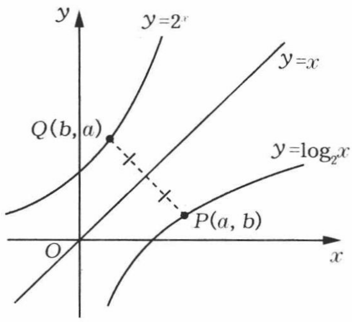


图 1—4

定义 2.2 若 y 是 u 的函数，$y=f(u)$的定义域为 D_f，而 u 又是 x 的函数，$u=g(x)$的定义域为 D_g，且 $u=g(x)$的值域 $R_g \subset D_f$，则 y 通过 u 联系也是 x 的函数，记为 $y=f[g(x)]$，$x \in D_g$. 我们称 $y=f[g(x)]$是由函数 $y=f(u)$及 $u=g(x)$复合而成的函数，简称复合函数，其中 u 叫做中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数，即按"先 g 后 f"的次序复合的函数，通常记为 $f \circ g$，即：

$$(f \circ g)(x)=f[g(x)]$$

并不是任意两个函数就能复合，g 与 f 能够构成复合函数 $f \circ g$ 的条件是：函数 g 的值域 R_g 必须含在函数 f 的定义域 D_f 内，即 $R_g \subset D_f$；此外，复合函数还可以由更多函数构成.

例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的，这是因为对于 $u=2+x^2$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内值域为$[2,+\infty)$，对于 $y=\arcsin u$ 都没有定义。

把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，这个复合过程实际上是把中间变量依次代入的过程；反之，把一个复合函数分解为几个较简单的函数，这些较简单的函数往往是基本初等函数或基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数.

例 1 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$，$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

例 2 设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数.

解 $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2 \dfrac{x}{2}$

例 3 函数 $y=e^{\sin x}$是由哪些简单函数复合而成的？

解 令 $u=\sin x$，则 $y=e^u$，故 $y=e^{\sin x}$是由 $y=e^u$，$u=\sin x$ 复合而成的.

例 4 将 $y=\sqrt{\ln \sin^2 x}$ 分解成基本初等函数的复合.

解 所给函数是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=w^2$，$w=\sin x$ 四个函数复合而成的.

二、函数的基本运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域依次为 D_1，D_2，$D=D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$，则我们可以定义这两个函数的下列运算：

和(差) $f \pm g$：$(f \pm g)(x)=f(x) \pm g(x)$，$x \in D$

积　$f\cdot g:(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),x\in D$

商　$\dfrac{f}{g}:\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},x\in D\setminus\{x\mid g(x)=0,x\in D\}$

三、基本初等函数

微积分的研究对象主要为初等函数，而初等函数是由基本初等函数组成的。

在初等数学中，我们已经学习了以下几种基本初等函数：

常数函数：$y=c$；

幂函数：$y=x^{\alpha},\alpha\in R$；

指数函数：$y=a^{x},a>0$ 且 $a\neq1$；

对数函数：$y=\log_a x,a>0$ 且 $a\neq1$，特别当 $a=e$ 时，记为 $y=\ln x$；

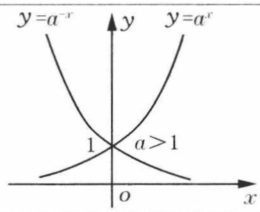
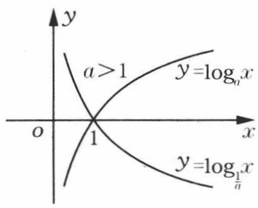
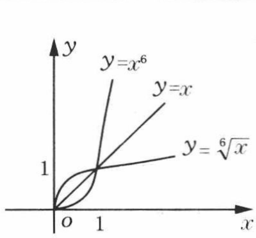
三角函数：如 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$，此外，还有 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x},y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$. 我们称 $y=\sec x$ 为“正割”，$y=\csc x$ 为“余割”；

反三角函数：$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\arccos x$.

以上函数统称为基本初等函数.

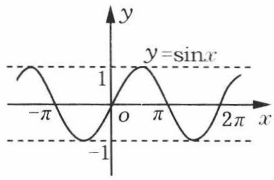
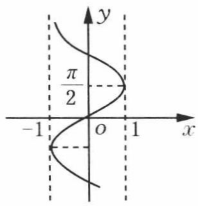
表 1—2 为基本初等函数的常用知识点：

表 1—2

<table>
<tr><th>函数名称</th><th>函数表示</th><th>函数的图像</th><th>函数的性质</th></tr>
<tr><td>指数函数</td><td>$y=a^{x},a>0$
且 $a\neq1$</td><td>
</td><td>(1)$x\in R,y\in(0,+\infty)$；
(2)当 $x=0$ 时，$y=1$.</td></tr>
<tr><td>对数函数</td><td>$y=\log_a x,a>0$
且 $a\neq1$</td><td>
</td><td>(1)$x\in(0,+\infty),y\in R$；
(2)图像过(1,0)点；
(3)当 $a>1$ 时，函数在定义域内单调递增；
(4)当 $a<1$ 时，函数在定义域内单调递减.</td></tr>
<tr><td>幂函数</td><td>$y=x^{\alpha},\alpha\in R$</td><td>

这里只画出函数图形的一部分。</td><td>令 $\alpha=\dfrac{m}{n}$：
(1)当 m 为偶数，n 为奇数时，y 是偶函数；
(2)当 m、n 为奇数时，y 是奇函数；
(3)当 m 奇 n 偶时，y 在$(-\infty,0)$无意义.</td></tr>
</table>

续表

函数名称	函数表示	函数的图像	函数的性质
三角函数	$y=\sin x$（正弦函数） 这里只写出了正弦函数		(1)正弦函数是以 2π 为周期的周期函数； (2)正弦函数是奇函数且 $\|\sin x\|\leqslant 1$.
反三角函数	$y=\arcsin x$（反正弦函数） 这里只写出了反正弦函数		由于此函数为多值函数，因此我们将此函数值限制在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上，并称其为反正弦函数的主值.

四、初等函数

由基本初等函数，经过有限次四则运算及有限次复合而成的，并且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

在工程技术上常用的初等函数有双曲函数，分别为：

双曲正弦函数：$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，如图 1—5 所示。

双曲余弦函数：$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，如图 1—6 所示。

双曲正切函数：$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$，如图 1—7 所示。

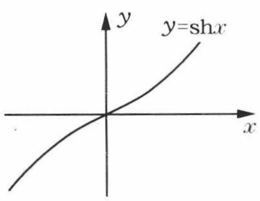


图 1—5

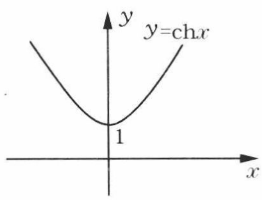


图 1—6

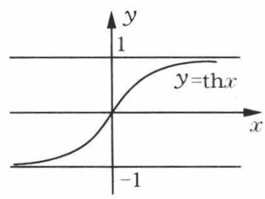


图 1—7

分段函数一般不是初等函数。今后我们讨论的函数，绝大多数是初等函数。

例 5 分解 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$.

解 令 $u=\sin(1+3x^2)$，得 $y=e^u$；再令 $v=1+3x^2$，得 $u=\sin v$.

故 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=1+3x^2$ 三个基本函数复合而成的。

五、经济学常用的函数

经济学是研究如何利用有限的资源合理安排生产，并把生产出来的产品在消费者中合理分配，以达到人类现在和将来最大满足的科学. 为了实现经济学的目标，需要对经济变量进行

定量分析。下面介绍经济学中几个常用概念和常用经济学函数．

1. 需求函数

需求被理解为购买者在一定时期内愿意并且有能力以一个可能的价格购买某种商品的数量。需求与购买的愿望和能力有关，如果不考虑购买者的收入、偏好等因素，则在一定时期内商品的需求量 q 主要依赖于商品的价格 p. 因此，商品的需求是价格的函数，称为需求函数，记为 $q=f(p)$. 有时把需求量作为自变量，价格作为因变量，取 $q=f(p)$ 的反函数，$p=f^{-1}(q)$，也称为需求函数．需求函数 $q=f(p)$ 通常是单调减函数，其图像如图 1－8 所示

2. 成本函数

生产某产品时为消耗的生产要素所支付的费用，称为成本。总成本是生产特定产量所需要的成本总额，总成本 C 由固定成本 C_0 和可变成本 $C_1(q)$ 构成，即 $C=C_0+C_1(q)$。固定成本是在一定时期内不随产量变动的成本，如厂房、机器折旧费、一般管理费等；可变成本是随着产量而变动的费用，如原料、动力费用、劳动力支出等。平均成本为 $\overline{C}=\dfrac{C}{q}=\dfrac{C_0+C_1(q)}{q}$.

3. 收益函数

设某种商品的价格为 p，需求量（等于销售量）为 $q=f(p)$，则出售这些商品可获得的总收益为 $R=pq=pf(p)$。总收益也可写为：

$$R=p\cdot q=q\cdot f^{-1}(q)$$

其中，$p=f^{-1}(q)$ 是需求函数 $q=f(p)$ 的反函数．

4. 供给函数

卖方在一定时期内以任一可能价格愿意且能出售的某种商品的数量，称为供给。在不考虑投入成本、劳务价格等因素的情况下，供给量 q 主要与市场价格 p 有关，记为 $q=g(p)$，$g(p)$ 通常是单调增加函数，如图 1－9 所示．

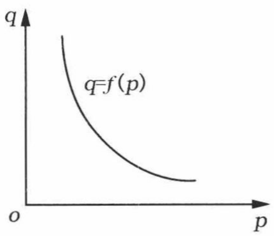


图 1－8　需求函数

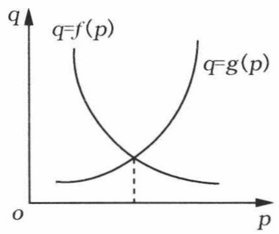


图 1－9　供给函数

使需求 $f(p)$ 与供给 $g(p)$ 相等的价格 p，即满足 $f(p)=g(p)$ 的 p_0，称为市场均衡价格，如图 1－9 所示。使利润等于零的生产量 q 称为保本产量，即满足 $R(q)=C(q)$ 的 q.

5. 利润函数

收益 R 与成本 C 的差，称为利润 L，即 $L(q)=R(q)-C(q)$.

例 6　某工厂生产某种产品，固定成本为 200 元，每多生产 1 件产品，成本增加 10 元，该产品的需求函数为 $q=50-2p$，试计算该产品的成本、平均成本、收益和利润．

解　成本函数为：

$C=200+10q$

平均成本函数为：

$$\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{200}{q}+10$$

收益函数为：

$$R=qp=50p-2p^2$$

或者：

$$R=q\cdot\frac{50-q}{2}=25q-\frac{q^2}{2}$$

利润函数为：

$$L=R-C=(50p-2p^2)-(700-20p)=70p-2p^2-700$$

或者：

$$L=R-C=\left(25q-\frac{q^2}{2}\right)-(200+10q)=15q-\frac{q^2}{2}-200$$

第三节　数列极限

一、数列极限的定义

我们先来回忆一下初等数学中学习的数列的概念：

若按照一定的法则，有第一个数 a_1，第二个数 a_2，…，依次排列下去，使得任何一个正整数 n 对应着一个确定的数 a_n，那么，我们称这列有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为数列，数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 a_n 叫做数列的一般项或通项.

我们也可以把数列 $\{a_n\}$ 看作自变量为正整数 n 的函数，即：$a_n=f(n)$，它的定义域是全体正整数.

极限的概念是求实际问题的精确解答而产生的。我国古代很早就对极限有了认识，例如，“一尺之棰，日截其半，万世不竭”(庄子・天下).

下面，我们通过一个具体的实际例子来了解极限的概念．例如，我们可以通过作圆的内接正多边形，近似求出圆的面积．

设有一圆，首先作圆的内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作圆的内接正十二边形，其面积记为 A_2；再作圆的内接正二十四边形，其面积记为 A_3；依次循环下去(一般把内接正 $6\times2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n，$n\in N^+$)，可得一系列内接正多边形的面积：$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\cdots$，它们就构成一列有序数列．我们可以发现，当内接正多边形的边数无限增加时，A_n 也无限接近某一确定的数值(圆的面积)，这个确定的数值在数学上被称为数列 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\cdots$ 当 $n\to\infty$(读作 n 趋近于无穷大)的极限．

上面这个例子就是我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)的割圆术．

定义 3.1　一般地，对于数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 来说，若存在任意给定的正数 ε(不论其多么小)，总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，那么，就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

记作：$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty)$$

如果不存在这样的常数 a，我们就称数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 发散，习惯上也说 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

此定义中的正数 ε 只有任意给定，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思。且定义中的正整数 N 与任意给定的正数 ε 是有关的，它是随着 ε 的给定而选定的。

在此我们可能不易理解这个概念，下面我们再给出“数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a”一个几何解释，以使我们能理解它：将常数 a 及数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 在数轴上用它们的对应点表示出来，再在数轴上做点 a 的 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$，如图 1－10 所示 .

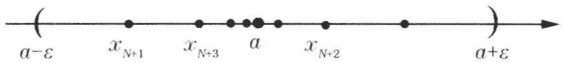


图 1－10

因不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 与不等式 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ 等价，故当 $n>N$ 时，所有的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内，而只有有限个（至多只有 N 个）在此区间以外。

至于如何求数列的极限，我们在以后会学习到，这里我们不做讨论，现只举例说明极限的概念。

例 1　用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n-1}{10^n}=1$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{10^n-1}{10^n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，即 $10^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，得 $n>\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，可见 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. 当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{10^n-1}{10^n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\dfrac{10^n-1}{10^n}=1$.

例 2　用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，可要求 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$ 成立，即只要 $2n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 成立即可 .

取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$，可见 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$.

二、收敛数列的性质

定理 3.1（极限的唯一性）　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

例 3　证明数列 $x_n=(-1)^n(n=1,2,\cdots)$ 是发散的.

证　如果这个数列是收敛的，根据定理 3.1，它有唯一极限. 设极限为 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 按照数列极限的定义，对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\dfrac{1}{2}$ 成立；即当 $n>N$ 时，$x_n=(-1)^n$ 都在开区间 $\left(a-\dfrac{1}{2},a+\dfrac{1}{2}\right)$ 内. 但这是不可能的，因为 $n\to\infty$ 时，x_n 无休止地重复