普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

学习指导与精练 上

主编 张野芳 李长青

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学学习指导与精练

（上）

主　编　张野芳　李长青
副主编　何再乐

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书在总结多年教学经验的基础上精心编写而成，目的是指导学生结合课堂学习，系统地复习高等数学，全面地进行题解训练，为后续课程的学习及硕士研究生入学考试打下良好基础.

全书共十二章，分为上、下两册，上册介绍了函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册介绍了微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数. 每章包括知识要点、常见题型、常规训练和考研指导与训练，使学生在熟悉本章主要内容的基础上掌握各种解题方法与技巧，同时提高学习能力及应试能力. 书末附有训练题的参考答案或简单提示.

本书可作为高等院校高等数学的辅助教材和硕士研究生入学考试的参考复习用书，同时可作为本专业教师的教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导与精练. 上/张野芳　李长青主编. —北京：北京理工大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-5640-9447-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①张… ②李　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 141422 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京高岭印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 13
字　　数 / 305 千字
版　　次 / 2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 29.80 元

责任编辑 / 王俊洁
文案编辑 / 侯瑞娜
责任校对 / 孟祥敬
责任印制 / 马振武

编 委 会

前　言 PREFACE

高等数学是高等院校理工科专业的一门重要的基础课程，也是全国硕士研究生理工类与管理类专业入学考试的统考科目.

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了本书.本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧.有效地指导和分层次地训练是本书的特点，进而提高读者的应试能力.本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性，所配例题与习题都是老师多年累积的经典题型，只要认真练习，一定会有所收获.

考虑到高等数学这门课程的特点，在内容上我们做了以下安排：

1.知识要点

从本课程的知识体系出发，对各个章节的主要内容、知识要点、易错点等进行了概括与总结，使知识全面系统，便于掌握.

2.常见题型

对各章节的常见解题类型进行解题思路的概括与分析，引导学生思考问题，熟悉多种解题方法，进而初步掌握常规的解题思路和方法.

3.常规训练

根据每节新课的要求，设计常规训练题.通过训练，使学生熟练掌握基础知识与基本解题方法.题目类型有判断题、选择题、填空题、计算题和证明题等.

4.考研指导与训练

每一章对考研常规题型进行了分析，并配有一定数量的考研训练题.题目的类型和难度与最近几年研究生入学试题为标准，通过训练使学生初步掌握研究生入学考试的要求.

掌握数学概念与方法的最好途径就是做题，使用本书时，读者应尽量多做一些练习题，通过练习真正掌握每章的内容.对于本书提供的例题，学生应力求吸收解题思路与方法，做到举一反三.考研训练部分对于基础较好的读者，可在每章学完后进行，一般学生可在期末总复习时训练.

在编写本书的过程中，编者除了总结多年的教学经验外，还参考了一些其他教材和参考书，在很多方面得到启发与教益，在此不一一指明，谨对原书作者表示由衷的感谢.由于编者水平有限，书中不妥之处恳请读者批评指正.

编　者

目 录 CONTENTS

第一章 函数与极限

学习导引

函数是高等数学的研究对象,极限方法是研究函数的基本方法.本章主要学习函数及其相关概念,函数的基本性质和常见的初等函数,数列极限与函数极限,无穷小与无穷大,函数的连续性等.本章是初等数学到高等数学的过渡篇,是高等数学的基础.

第一节 映射与函数

知识要点

1. 函数

(1)**定义 1** 设有两个变量 x 和 y,变量 x 的值域为 D,如果对于 D 中的每一个 x 值,按照一定的法则,变量 y 有一个确定的值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,变量 y 的取值集合称为函数的值域,记作 R_f.

注:

①函数概念中包含定义域与对应关系两要素;

②当且仅当两个函数的定义域与对应法则完全相同时,它们才表示同一函数.

(2)高等数学研究的对象是函数,函数概念的实质是变量之间确定的对应关系,变量之间是否有函数关系就看是否存在一种对应法则,使得其中一个变量或几个变量的取值能唯一确定另一个变量的取值.

(3)常量与变量、自变量与因变量是相对的.一个量在某个过程中是常量,在另一过程中可以是变量;一个量在某个过程中是自变量,在另一个过程中可以是因变量,这一点既简单又重要.

(4)确定一个函数的根本要素是定义域 D 和对应关系 f,而不在于自变量与因变量采用什么样的符号来表示.所以,如果两个 D 和两个 f 代表相同的数集和相同的对应法则,那么 $y=f(x)(x\in D)$及 $s=f(t)(t\in D)$是同一个函数.

2. 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$为定义在数集 D 上的函数,其值域为 W.如果对于数集 W 中的每个数 y,在数集 D 中都有唯一确定的数 x 使 $y=f(x)$成立,则得到一个定义在数集 W 上以

y 为自变量,x 为因变量的函数,称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 W,值域为 D.

通常把 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 换为 x,把 x 换为 y,从而得 $y=f^{-1}(x)$,并称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数. 由于这种符号上的改记并没有改变 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和对应法则,所以它们是相同的函数. 从反函数的定义容易得到如下结论:

(1)反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域即是原来函数 $y=f(x)$ 的值域,而其值域即是原来函数的定义域,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(2)单调函数必有反函数,且其反函数的单调性与原来函数的单调性一致.

3. 复合函数

(1)**定义 3** 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 R_φ,当 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$ 时,对任意 $x\in D_{f\circ\varphi}=\{x\mid x\in D_\varphi,\varphi(x)\in D_f\}$,即有函数 $\varphi(x)$ 的值落在 D_f 内,这样通过变量 u 就得到 y 与 x 之间的对应关系,称为复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]=(f\circ\varphi)(x)$,$x\in D_{f\circ\varphi}$,其中 x 是自变量,y 是因变量,u 称为中间变量.

(2)构建复合函数的前提条件是,内层函数的值域与外层函数定义域的交集不为空集. 也就是说,内层函数必须有函数值落在外层函数的定义域内,否则不能构成复合函数.

(3)结合律成立,即 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$. 但交换律一般不成立,即 $f\circ g\neq g\circ f$.

4. 分段函数

(1)**定义 4** 在定义域的不同范围内的表达式不同的函数称为分段函数.

分段函数是用几个不同的式子表示一个函数,不能理解为两个或多个函数.

(2)几个特殊的分段函数.

①符号函数. 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数,其定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,对任何实数 x,$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$ 总成立,所以它起着一个符号的作用.

②取整函数. 函数

$$y=[x]$$

称为取整函数,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,其定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域是整数集 $\mathbf{Z}$.

③狄利克雷(Dirichlet)函数. 函数

$$y=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R},x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$$

称为狄利克雷函数,其定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{0,1\}$.

5. 初等函数

(1)五类基本初等函数:

幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为实数）；

指数函数：$y=a^{x}$（$a>0,a\neq1$）；

对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0,a\neq1$）；

三角函数：$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

(2)**定义 5** 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成并能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

熟悉每一类基本初等函数的基本性质与图像特征，是讨论其他函数性质的基础.

6. 函数的基本性质

(1)单调性. 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意 $x,y\in I$，当 $x<y$ 时，有 $f(x)\leqslant f(y)$（或 $f(x)\geqslant f(y)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上为单调增加函数（或单调减少函数）；若对任意的 $x,y\in I$，当 $x<y$ 时，有 $f(x)<f(y)\big($或 $f(x)>f(y)\big)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上为严格单调增加函数（或严格单调减少函数）.

(2)奇偶性. 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即对任意 $x\in D$，有 $-x\in D$，若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

不是任何函数都有奇偶性，例如，$y=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

注：

①从几何特征来说（如图 1-1 所示），偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.

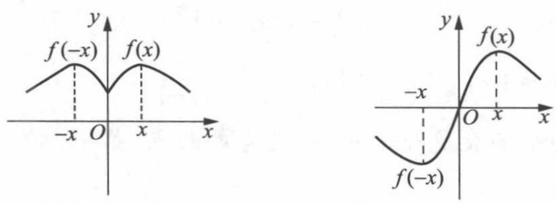

图 1-1

②关于奇偶性的几个结论：

(ⅰ)奇(偶)函数的和仍为奇(偶)函数；

(ⅱ)奇数个奇函数的积为奇函数，偶数个奇函数的积为偶函数；

(ⅲ)一偶一奇两个函数的积为奇函数.

(3)有界性. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称为无界.

如果存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，恒有 $f(x)\leqslant M$（或者 $f(x)\geqslant M$），那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界（或下界），其几何特征如图 1-2 所示. 显然，$f(x)$ 在区间 I 上有界等价于它在区间 I 上既有上界又有下界.

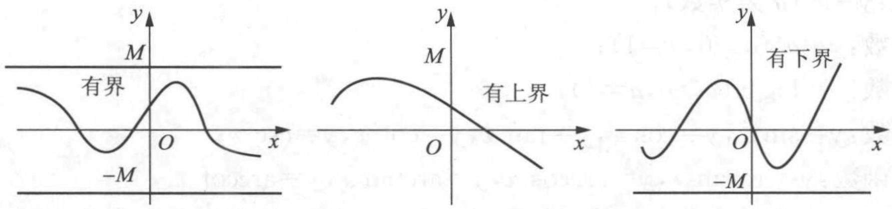

图 1-2

如三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在整个数轴上有界；函数 $y=\tan x$ 在其定义域内无界.

(4)函数的周期性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T>0$，使得对任意 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，并且有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，并称 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

注：

①一个函数如果是周期函数，则它有无穷多个周期. 我们通常所说的周期，一般是指它最小的正周期.

②周期函数不一定存在最小正周期. 例如，$y=2$ 就是一个以任意正实数为一个周期的周期函数，由于不存在最小正实数，所以 $y=2$ 不存在最小正周期.

常见题型

1. 判断函数是否等价

例 1　下列各组函数，哪些是同一函数，哪些不是？

(1) $\log_a x^2$ 与 $2\log_a x$；　　(2) $\sec^2 x-\tan^2 x$ 与 1；

(3) $\cos^2 x-\sin^2 x$ 与 $\cos 2x$；　　(4) $x-1$ 与 $\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

【思路点拨】　判断两个函数是否等同，一般考虑两点：第一，对应关系是否一致；第二，两个函数的定义域是否相同.

解　(1)不等同，两者定义域不同；

(2)不等同，两者定义域不同；

(3)两者等同；

(4)不等同，两者定义域不同.

2. 求函数的定义域

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_a(\sin x)$　$(a>1)$；　　(2) $y=\sqrt{6+x-x^2}+\ln(x+1)$.

【思路点拨】　这类题目所求的是复合函数 $f(x)=u(v(x))$ 的定义域，按照复合函数的定义，只要求出 x 的取值集合 D，使得对任意 $x\in D$，$v(x)$ 的取值均在外层函数 $u(\cdot)$ 的定义域内即可.

解　(1) $y=\log_a(\sin x)$　$(a>1)$ 的定义域为 $\{x\mid 2k\pi<x<(2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) $\begin{cases}6+x-x^2\geqslant 0,\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3,\\ x>-1,\end{cases}$ 所以定义域为 $x\in(-1,3]$.

例 3 设函数 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

【思路点拨】 先确定函数 $\varphi(x)$ 的解析表达式，再求其定义域.

解 由函数 $f(x)$ 的定义知，$f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$，从而有 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，由此解得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},$$

易知，$\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

3. 求函数的表达式

例 4 已知 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$（$a,b,c$ 均为常数，且 $|a|\neq|b|$），求 $f(x)$.

【思路点拨】 由已知条件的形式知，如果作变量代换 $x=\frac{1}{t}$，则在已知条件中会出现关于 $f(t)$ 和 $f\left(\frac{1}{t}\right)$ 的关系式，再将其根据函数表示的“变量无关性”，将其变量改用 x 表示，从而得到关于 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的方程组，解此方程组就可求得 $f(x)$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，由已知条件可得 $af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$，将 t 改记为 x 得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,$$

将上式与已知条件联立，得

$$\begin{cases}af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},\\ af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,\end{cases}$$

解此函数方程组得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right).$$

例 5 汽车在笔直的公路上行驶 10 小时，首先用 1 小时做匀加速运动，使得汽车的速度由零加速到 50 km/h，匀速行驶 8 小时后，再用 1 小时做匀减速运动将速度减至零. 试将汽车行驶的路程用时间的函数来表示.

【思路点拨】 对于此类求解函数表达式的问题，关键要根据目标函数与讨论变量之间的逻辑关系及物理学规律来构造函数表达式，一般分段函数较为多见.

解 设路程函数为 $S(t)$，则

$$S(t)=\begin{cases}25t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 25+50(t-1), & 1<t\leqslant 9,\\ 425+50(t-9)-25(t-9)^2, & 9<t\leqslant 10.\end{cases}$$

显然，$S(t)$ 是定义在闭区间 $[0,10]$ 上的分段函数.

4. 讨论函数的奇偶性、单调性、有界性、周期性

例 6 判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$;　　　　(2)$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

(3)$f(x)=4x+\cos x$.

【思路点拨】 讨论函数的奇偶性一般分两个步骤:第一步,检查函数定义域是否对称,定义域不对称,没有奇偶性;第二步,检验$f(-x)$与$f(x)$以及$-f(x)$的关系,辨别奇偶性.当然,还可以根据函数图形的对称性来识别函数的奇偶性.

解 (1)函数的定义域是$(-\infty,\infty)$,且$f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=f(x)$,所以$f(x)$是偶函数.

(2)函数的定义域是$(-\infty,\infty)$,且$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$,因为

$$f(-x)+f(x)=\ln[(-x+\sqrt{(-x)^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})]=0,$$

即$f(-x)=-f(x)$,所以$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

(3)函数的定义域是$(-\infty,\infty)$,$f(-x)=4(-x)+\cos(-x)=-4x+\cos x$,显然,$f(-x)\neq f(x)$,且$f(-x)\neq -f(x)$,所以函数$f(x)=4x+\cos x$既不是奇函数也不是偶函数.

例7 证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内无界.

【思路点拨】 讨论函数$f(x)$的有界性,常常联系函数图形来判断,也可利用有界函数的定义来证明函数是有界的.判别函数无界,除了用无界的定义来讨论外,使用更多的一种方法就是取一个符合函数定义要求的函数子列,若该子列是无界的,则函数在讨论的区间上也是无界的.

解 取数列$\left\{x_k\,\middle|\,x_k=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}},k=0,1,2,\cdots\right\}$,$\{x_k\}\in(0,1)$,且对任意$M>0$,只要$k$充分大,就有$f(x_k)=\dfrac{1}{x_k}\sin\dfrac{1}{x_k}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$,故$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内无界.

例8 设函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上有定义,且$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调减小,证明:对任意两点$x_1>0,x_2>0$,有$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【思想点拨】 $\dfrac{f(x)}{x}$单调减小是唯一的条件,因此,要从$\dfrac{f(x)}{x}$出发,逐步构造与结论相联系的桥梁.

解 不妨设$0<x_1\leqslant x_2$,由已知,$\dfrac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\dfrac{f(x_1)}{x_1}$,即$x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$.又因为$x_2<x_1+x_2$,所以有

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2},$$

由此可得

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\leqslant x_2[f(x_1)+f(x_2)],$$

即

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

5. 反函数以及复合函数的有关问题

例 9 求 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3, & x<-2,\\ 5-x, & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 1-(x-2)^2, & x>2\end{cases}$ 的值域，并求它的反函数.

【思路点拨】 求分段函数 $y=f(x)$ 的反函数，首先要检查 $y=f(x)$ 在定义域内的每个分段区间内是否严格单调，如果不是严格单调的，则 $y=f(x)$ 没有反函数，其次再求出 x 关于 y 的表达式 $x=f^{-1}(y)$，最后综合写出反函数的表达式.

解 当 $x<-2$ 时，$y>3+8=11$，由 $y=3-x^3$ 解得 $x=\sqrt[3]{3-y}$；当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$7\geqslant y\geqslant 3$，由 $y=5-x$ 解得 $x=5-y$；当 $x>2$ 时，$y<1$，由 $y=1-(x-2)^2$ 解得 $x=2+\sqrt{1-y}$，从而有

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}2+\sqrt{1-y}, & y<1,\\ 5-y, & 3\leqslant y\leqslant 7,\\ \sqrt[3]{3-y}, & y>11.\end{cases}$$

将上式中 x 与 y 的位置互换，得 $y=f(x)$ 的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}2+\sqrt{1-x}, & x<1,\\ 5-x, & 3\leqslant x\leqslant 7,\\ \sqrt[3]{3-x}, & x>11.\end{cases}$$

例 10 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的图形关于 $x=a$，$x=b$ 均对称 $(a<b)$，证明函数 $y=f(x)$ 是周期函数并求其周期.

【思路点拨】 从已知条件出发寻求正数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 即可.

解 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，由已知可得 $f(a+x)=f(a-x)$ 及 $f(b+x)=f(b-x)$，所以有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x+a-a)=f[a+(x-a)]\\ &=f[a-(x-a)]=f(2a-x)\\ &=f(2a-x+b-b)=f[b+(2a-b-x)]\\ &=f[b-(2a-b-x)]=f(x+2b-2a)\end{aligned}$$

因为 $b>a$，所以 $2b-2a>0$，由此知函数 $f(x)$ 是周期函数，它的一个周期为 $2b-2a$.

常规训练

1. 填空题.

(1) 设函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $f(2)=$________，$f(x+1)=$________.

(2) 函数 $y=\sqrt{\tan x}+\ln(x+1)$ 的定义域为________.

(3) 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$ 的定义域为________.

(4) 判断下列函数的奇偶性：

$f(x)=5x^4-x^2+1$ ________；

$f(x)=2x^2+x\cos x$ ________;

$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})$ ________.

(5)指出下列函数的复合过程:

$y=\sqrt[3]{\tan(x^2)}$ ________;

$y=\ln\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$ ________.

(6)已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-3,1]$,则 $f(2x+1)$ 的定义域为________.

2. 选择题.

(1)设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则(　　).

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0,\\ -(x^2+x), & x<0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0\end{cases}$

(2)设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=($　　$)$.

(A)0　　(B)1　　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

3. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,5]$,求 $f(\tan x)$ 的定义域.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 求 $f(-2),f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f(2)$,并做出图形.

5. 电力部门规定,居民每月用电不超过30千瓦时时,每千瓦时按0.5元收费;当用电超过30千瓦时但不超过60千瓦时时,超过的部分每千瓦时按0.6元收费;当用电超过60千瓦时时,超过部分按每千瓦时0.8元收费,试建立居民月用电费 G 与月用电量 W 之间的函数关系.

6. 设下列所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的,证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.