21世纪普通高等院校规划教材——素质教育类
普通高等教育“十二五”规划教材

Gaodeng Shuxue

高等数学

主编　令狐荣涛

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

21世纪普通高等院校规划教材——素质教育类
普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

主编　令狐荣涛

西南交通大学出版社
·成都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 令狐荣涛主编. —成都：西南交通大学出版社，2011.7

21 世纪普通高等院校规划教材. 素质教育类

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5643-0975-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①令… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 238107 号

21 世纪普通高等院校规划教材——素质教育类

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

主编 令狐荣涛

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564 87600533
邮政编码	610031
网址	http: //press.swjtu.edu.cn
印刷	四川经纬印务有限公司
成品尺寸	170 mm×230 mm
印张	14.375
字数	258 千字
版次	2011 年 7 月第 1 版
印次	2011 年 7 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-0975-6
定价	27.50 元

编 著 者

主　编　令狐荣涛

副主编　何　挺　黄宝勤　王艳丽　陈　琳

编　委　（以姓氏拼音首字母为序）

陈　琳　李　俊　令狐荣涛

何　挺　黄宝勤　金文琼

钱淑渠　武慧虹　王艳丽

目　录

第一章　预备知识

【本章内容简介】

高等数学主要研究的对象是函数，本章我们简要地对函数的相关知识进行复习.

第一节　函数概念

一、函数定义

1. 函数定义

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 若对任意属于 D 的 x，按照对应法则 f 总有唯一确定的实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数. D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量，表示为

$$y = f(x) .$$

与 x 对应的 y 称为 x 的函数值，函数值的集合称为函数 f 的值域，表示为 $f(D)$，即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subset \mathbf{R} .$$

由定义可知，函数是由它的定义域和对应法则确定的. 因此，两个函数

$$y = f(x)，\quad x \in D_1 \text{ 与 } y = g(x)，\quad x \in D_2 ,$$

如果（1）定义域相等：$D_1 = D_2$；

（2）对应法则相同：对任意 $x \in D_1 = D_2$，恒有 $f(x) = g(x)$，

那么就说函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同（相等），即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数.

函数的定义域表示的是某一范围内的实数，所以通常用区间表示. 实数的区间表示如下：设 a，b 是两个实数，且 $a<b$，则

$\{x|a<x<b\}=(a,b)$ 称为开区间；

$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$ 称为闭区间；

$\{x|a<x\leqslant b\}=(a,b]$ 称为左开右闭区间；

$\{x|a\leqslant x<b\}=[a,b)$ 称为左闭右开区间.

数 $b-a$ 称为区间的长度.

符号“$+\infty$”读作“正无穷大”，符号“$-\infty$”读作“负无穷大”. 以下区间统称为无穷区间：

$$\{x|x>a\}=(a,+\infty)\ ; \qquad \{x|x\geqslant a\}=[a,+\infty)\ ;$$

$$\{x|x<b\}=(-\infty,b)\ ; \qquad \{x|x\leqslant b\}=(-\infty,b]\ ;$$

$$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty).$$

区间的几何表示如图 1-1 所示.

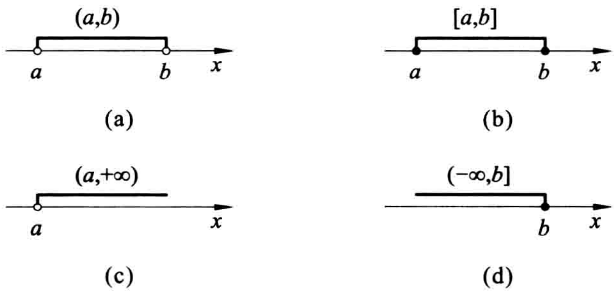


图 1-1

注意：图 1-1 中的空心点表示不取该点，实心点表示取该点.

2. 邻　域

由绝对值的性质可以知道，满足不等式 $|x-5|<\dfrac{1}{2}$ 的全体实数 x 构成的集合是开区间 (4.5, 5.5) . 这个开区间可以理解为它是以 5 为中心、0.5 为半径的开区间. 一般地，对这样的开区间我们定义如下：

定义 1.2　设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称满足不等式

$$|x-a|<\delta \tag{1.1}$$

的一切实数 x 构成的集合为 a 的 δ 邻域. 点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，记作 $U(a,\delta)$，读作“a 的 δ 邻域”，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta). \tag{1.2}$$

图 1-2(a)是 $U(a,\delta)$ 的示意图.

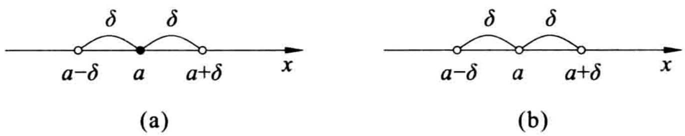


图 1-2

若在 $U(a,\delta)$ 内去掉中心点 a，则称为 a 的 δ 空心邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$．它可用不等式表式为

$$0<|x-a|<\delta, \tag{1.3}$$

即

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta). \tag{1.4}$$

图 1-2(b)是 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ 的示意图.

3. 函数的定义域

用数学表达式表示的函数：如不说明定义域时，定义域则为使表达式有意义的实数全体．若数学表达式是由实际问题所确定的函数，那么其定义域还要由这个问题的实际意义来确定.

4. 分段函数

我们看一个实际例子．某地曾鼓励用电，其优惠的电费计算办法为：用电在 200 度以内（含 200 度），每度价格为 0.37 元；超过 200 度，则超过 200 度的部分按每度 0.27 元优惠价计算．那么，应付电费与用电度数的函数关系为

$$y=\begin{cases}0.37x, & 0\leqslant x\leqslant 200,\\ 74+0.27(x-200), & x>200.\end{cases}$$

类似这样的例子，实际生活当中还有很多.

像这样，函数在它定义域的不同部分用不同的数学式子表示的函数称为分段函数．求分段函数的函数值，是将不同范围内的自变量代入相应的表达式中．下面提到的符号函数、取整函数等都是分段函数.

二、几种特殊函数介绍

1. 符号函数

函数

$$y=\begin{cases}1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，如图 1-3 所示，记作 $\operatorname{sgn} x$.

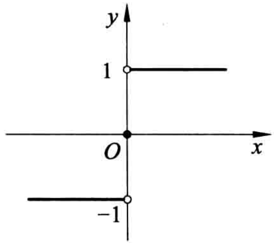


图 1-3

2. 整数部分、小数部分函数

y 是 x 的最大整数部分，即对任何一个实数 x，y 是不大于 x 的最大整数. 换句话说，对任何实数 x，总可把它表示为一个整数和一个小于 1 的非负小数之和，这个整数就是 y，记为 $[x]$，即

$$y=[x],$$

其中“小于 1 的非负小数记为 (x)”称为 x 的小数部分. 也就是说，

$$y=[x]$$

称为 x 的整数部分函数，而

$$y=(x)$$

称为 x 的小数部分函数.

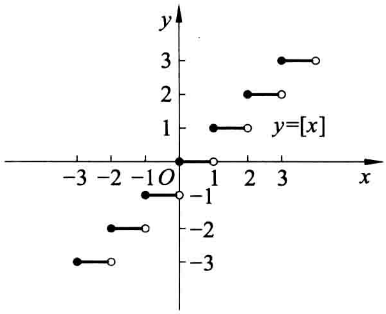
由定义可知，对任何实数 x，有

$$x=[x]+(x),$$

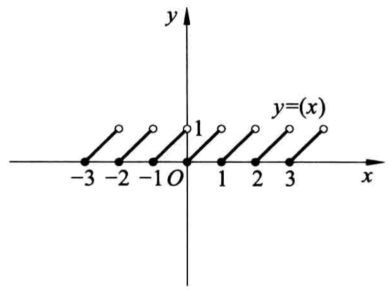
这里 $[x]$ 是一个整数，(x) 是一个小于 1 的非负小数，即 $0\leqslant(x)<1$.

例如，当 $x=\dfrac{7}{2}$ 时，$[x]=3$，$(x)=0.5$；当 $x=-2.41$ 时，$[x]=-3$，$(x)=0.59$.

$y=[x]$ 和 $y=(x)$ 的图像分别如图 1-4(a)，(b) 所示.



(a)



(b)

图 1-4

3. 狄立克莱（Dirichlet）函数

函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

称为狄立克莱函数. 这是个富有启发意义的函数，其定义域是一切实数.

然而，由于有理数和无理数都是稠密分布的，所以在直角坐标系下，无法作出其图像.

下面我们采用另一种函数图示法来表示，即将 x 轴与 y 轴分开，用 x 轴上一点为起点，y 轴上的相应点为终点的带“箭头”的线段表示函数的对应关系. 该函数的图示如图 1-5 所示.

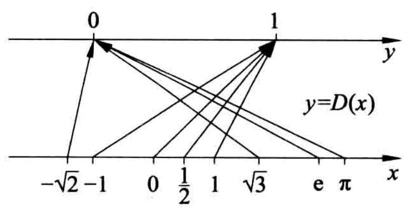


图 1-5

三、函数的几种特性

1. 有界函数

设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，若存在某个常数 $M(M>0)$，使得对于区间 I 上任一点 x，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，$f(x)$ 称为区间 I 上的有界函数；若这样的 M

不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

显然，区间 I 上有界函数 $f(x)$ 的图像位于以两条直线 $y=\pm M$ 为边界的带形区域之内，如图 1-6 所示.

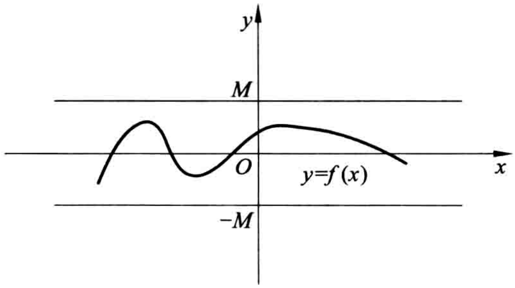


图 1-6

2. 奇函数和偶函数

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，且对 D 内任意 x，都有 $-x\in D$，如果

$$f(-x)=f(x),$$

则 $y=f(x)$ 称为偶函数；如果

$$f(-x)=-f(x),$$

则 $y=f(x)$ 称为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称，如图 1-7(a)，(b) 所示.

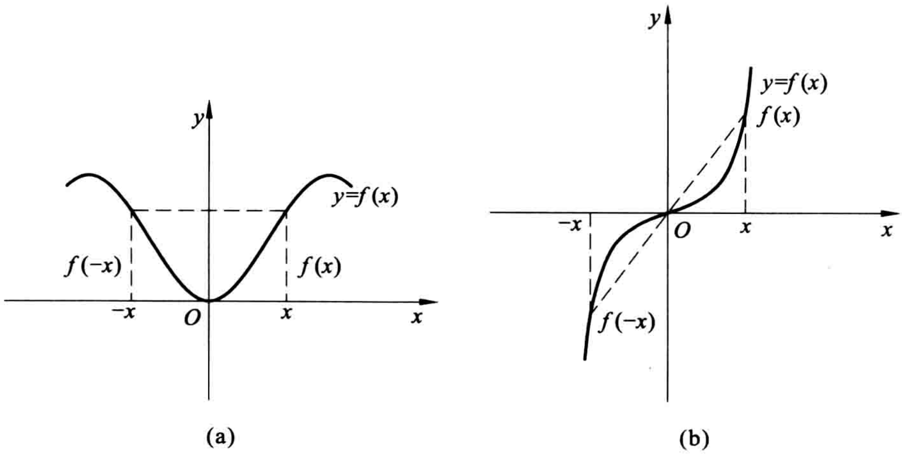


图 1-7

设两函数 $f(x)$, $g(x)$ 有相同的定义域，则

(1) 如果 $f(x)$, $g(x)$ 都是偶（奇）函数，则 $f(x)+g(x)$ 也是偶（奇）函数，而 $f(x)\cdot g(x)$ 是偶函数.

(2) 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中一个是偶函数，另一个是奇函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 是奇函数.

3. 单调函数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上，对于 I 上的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）. 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数. 区间 I 称为单调区间.

如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加（或严格单调减少）. 严格单调增加函数和严格单调减少函数统称为严格单调函数.

从图像上来看，一个严格增加（或严格减少）的函数的图像是从左向右严格上升（或严格下降）的曲线；而单调增加（或减少）的函数的图像是从左向右不降（或不升）的曲线. 图 1-8 和图 1-9 分别为严格上升及严格下降的函数图像.

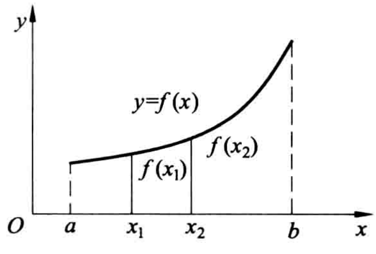


图 1-8

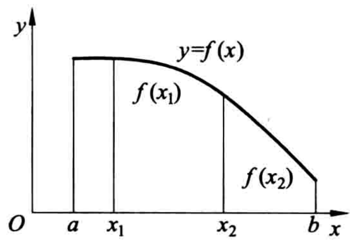


图 1-9

4. 周期函数

我们看到，正弦函数 $y=\sin x$ 及正切函数 $y=\tan x$ 的图像如图 1-10 和图 1-11 所示.

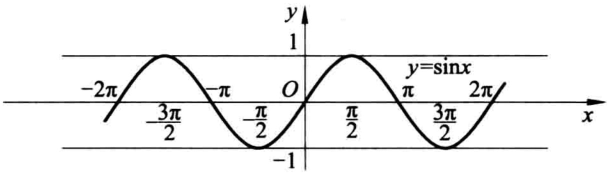


图 1-10

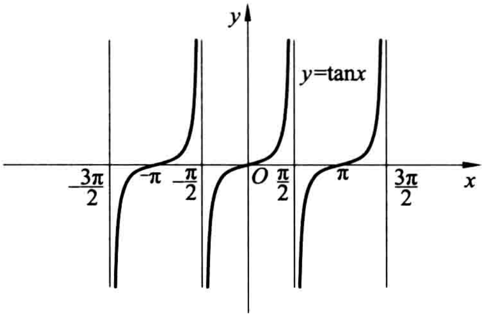


图 1-11

从图像不难看出

$$\sin(x+2\pi)=\sin x\ ,\quad \tan(x+\pi)=\tan x\ .$$

同样有

$$\cos(x+2\pi)=\cos x\ ,\quad \cot(x+\pi)=\cot x\ .$$

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，如果存在某个非零常数 T，使得对于任意的 $x\in D$， $x+T\in D$，且有

$$f(x+T)=f(x)\ ,$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数， T 为 $f(x)$ 的周期.

依定义，不难验证三角函数都是周期函数.

如果 T 为函数 $f(x)$ 的周期，显然 $nT(n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 也为 $f(x)$ 的周期.

对于一个周期函数 $f(x)$，若在它的所有周期中存在一个最小的正数，则这个最小正数称为 $f(x)$ 的最小正周期. 今后本书中所涉及的周期，若无特别说明，都是指函数的最小正周期.

若 $y=f(x)$ 是周期为 T 的函数，则在其定义域内相距 $nT(n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 且长度为 T 的区间上，函数图像有相同的形状（见图 1-12）.

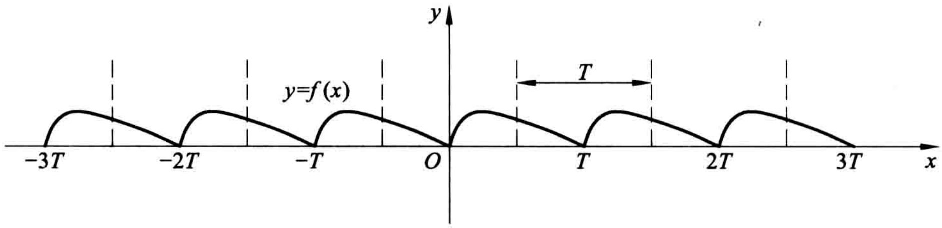


图 1-12

四、复合函数与反函数

1. 复合函数

我们知道，质量为 m、速度为 v 的物体沿直线运动时，它的动能为 $E=E(v)=\frac{1}{2}mv^2$.如果这个物体作自由落体运动（初速度为零），那么它的速度 $v=v(t)=gt$．这时，物体的动能 E 通过速度 v 可表为时间 t 的函数，即

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mg^2t^2\ .$$

如果把函数 $E=E(v)$ 与 $v=v(t)$ “串联”起来，就构成所谓的复合函数:

$$E=E[v(t)]=\frac{1}{2}mv^2(t)=\frac{1}{2}m(gt)^2=\frac{1}{2}mg^2t^2\ .$$

一般地，设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D，若 $g(D)\subseteq D_1$，则对于 D 中每一个 x，通过中间变量 u，有唯一的 y 与之对应，这个对应关系称为 f 与 g 的复合函数，记为

$$y=f[g(x)],\quad x\in D\ .$$

可用图 1-13 表示函数的复合关系.

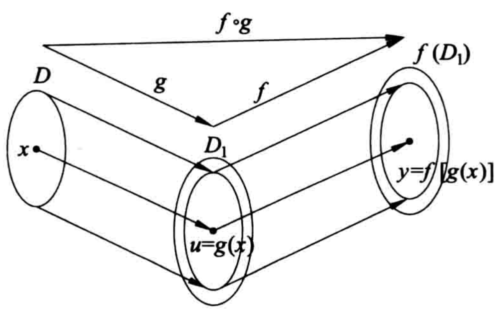


图 1-13

例 1 写出函数 $y=\sqrt{u}$, $u=1-t^2$, $t=\sin x$ 的复合函数.

解 依次将 $u=1-t^2$ 及 $t=\sin x$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中，得

$$y=\sqrt{1-\sin^2 x}, \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 2 $y=\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 是由哪些函数复合而成的?

解 令 $u=\sin^2\dfrac{1}{x}$，则

$$y=\mathrm{e}^u .$$

令 $v=\sin\dfrac{1}{x}$，则 $$u=v^2 .$$

令 $w=\dfrac{1}{x}$，则 $$v=\sin w .$$

所以 $y=\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=v^2$，$v=\sin w$ 和 $w=\dfrac{1}{x}$ 复合而成的.

说明：（1）要构成复合函数 $y=f[g(x)]$，必须要求 $u=g(x)$ 的值域包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，所以不是任意两个函数都能组合在一起构成一个复合函数.

（2）复合函数可以由两个以上的函数构成，所以它的中间变量有时不止一个.

几个简单的函数可以构成一个复合函数，而一个较复杂的函数也可以分解为几个简单的函数. 掌握复合函数的构成和分解，对后面的微积分运算很有用处.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域为 B，如果对任意的 $y\in B$，都对应唯一的 $x\in A$，使 $f(x)=y$，即在 B 上定义了一个函数，则称此函数是函数 $y=f(x)$ 的反函数，表为

$$x=f^{-1}(y) .$$

函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域分别是函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域、定义域.

显然，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

按照习惯，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，常把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中

的字母 x, y 对调，改写成

$$y=f^{-1}(x).$$

互为反函数的图像间的关系：函数 $y=f(x)$ 的图像和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-14 所示.

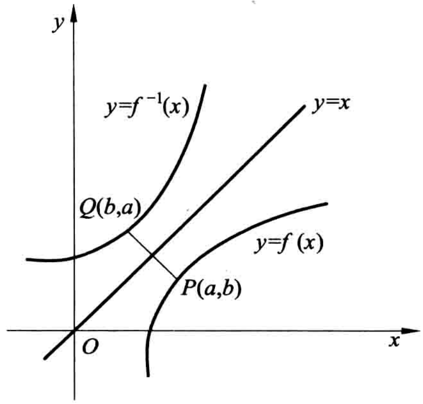


图 1-14

由反函数的定义可以看出，严格单调函数必有反函数.

有的函数在定义域上可能不是严格单调的，但在属于定义域的某个区间上则严格单调，因此函数在该区间上存在反函数. 例如，函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的，在 $[0,+\infty)$ 上存在反函数 $y=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

习　题　1.1

1. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

求 $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$, $f(2)$.

2. $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$, $f(x-1)$.