数值分析的理论和应用

上　册

大连工学院

数值分析的理论及应用

序　言

虽然数值分析这门课的教师和学生为着选择一本好的教材，已经伤了很多脑筋，我们仍然相信要找到一种适合的教材，还是极端困难的。我们这本书是数值分析的初阶，它是为正在肄业中的数学家，计算机科学家、工程师和其他科学家写的。整个教材大约可分 60 讲，可放在一年级数学分析课程之后，本书的前几章包括有部分分析课程的内容，那是为着重新激起读者的回忆并为着提供可能必备的基础而设的。我们并不假定读者已经有了矩阵代数的知识，因此，简短地包括了介绍矩阵的内容。这些内容对于学过矩阵代数基础课的读者也可能有些帮助，它们也可以在本书的基础上配合着其他课程选用。

我们试图一开始就围绕着我们的主题给出其逻辑的，独立的发展，并在实际方法和数学理论上给以同样的强调。因此，不仅精细地陈述各种算法，并且通常给出定理的证明，以求达到融会贯通。我们相信数值分析在数学教学中是非常重要的。数值分析是许多重要的数学概念的源泉和应用场所。我们尽可能在全书中贯穿逼近这个主题并对之进行统一的处理。因此，介绍了不同形态的逼近论思想，并把它们用在非线性代数方程的求解，数值积分和微分方程各章中。

要成为一个好的数值分析家是不容易的，也正如其他数学分枝一样，必需具有高超的技巧和丰富的经验才可能达到从一般到特殊，从抽象到实践的飞跃。书中包括了大量经过加工的例题就是为着发展读者的这种技能的。每章末尾给出的习题应看做是教材内容的扩充而不仅是检验读者理解程度的。

我们注意到那种不公平地对待没有较多机会去接触计算机的人的情况，因此，几乎全部有关校核例题或解算习题的计算工作，都使可能在数学表和台式计算机的帮助下进行。书中收集了一些框图，用以加深对算法的理解，但却没有收入计算机程序，因为我们认为这样作并不能有效地促进人们之间的支流。当然，我们希望这些内容能鼓厉人们去接近计算机并进行更多的进一步的计算。

本书中省掉了一些明显的但也值得讨论的内容。有限差分只讲了一点点，因为这些内容用得不多，而且也稍嫌枯燥。由于篇幅所限，书中没有收进多项式方程的特殊处理，因为这与我们的主题没有直接的联系。令人遗憾的是没有特征值和偏微分方程的内容。因为有关内容的任何进一步的研究都要具有更多的关于矩阵代数的知识，而这是超乎我们对读者程度的假定的。

我们的几个同事怀着极大的热情读完我们的原稿的全部或其一部分，他们是 *J*，*D*，兰贝尔特博士，*P*·兰沙斯特教授，*J*，*H* 麦凯来博士和 *A*，*R*·米采尔教授，我们谨向他们致謝，至于书中尚存的错误和遗漏，则责任全在我们，我们同样万分感謝那些曾经给们我以极大鼓厉的同学们和同事们。

G，*M* 菲力浦
安德鲁逊大学
应用数学系。

P·*J* 泰罗
斯特林大学
计算机科学系。

一九七二年十二月。

译 者 说 明

本书计划分上、下册印刷，其前七章为上册，后五章及附录等为下册。

各章未尾的习题的答案均在下册。

书中□号表示定义或例题的结束符号。

因时间仓促翻译中不可免的有错误希指正。

计算数学教研室

1 9 7 7 年 12 月

目　　录

上　册

1．绪　论……………………………………………………………………（ 1 ）
　1.1．什么是数值分析…………………………………………………………（ 1 ）
　1.2．数值计算法………………………………………………………………（ 2 ）
　1.3．适定性和稳定性问题……………………………………………………（ 3 ）
　问题………………………………………………………………………（ 5 ）
2．分析基础……………………………………………………………………（ 7 ）
　2.1．函数………………………………………………………………………（ 7 ）
　2.2．极限和导数………………………………………………………………（ 11 ）
　2.3．序列和级数………………………………………………………………（ 16 ）
　2.4．积分………………………………………………………………………（ 19 ）
　2.5．指数和对数函数…………………………………………………………（ 20 ）
　问题………………………………………………………………………（ 22 ）
3．泰罗多项式和级数…………………………………………………………（ 25 ）
　3.1．函数逼近…………………………………………………………………（ 25 ）
　3.2．泰罗定理…………………………………………………………………（ 25 ）
　3.3．泰罗级数的收敛…………………………………………………………（ 28 ）
　3.4．两个变量的泰罗级数……………………………………………………（ 30 ）
　3.5．幂级数……………………………………………………………………（ 31 ）
　问题………………………………………………………………………（ 32 ）
4．插值多项式…………………………………………………………………（ 35 ）
　4.1．线性插值…………………………………………………………………（ 35 ）
　4.2．多项式插值………………………………………………………………（ 36 ）
　4.3．插值的精度………………………………………………………………（ 38 ）
　4.4．列维尔算法………………………………………………………………（ 40 ）
　4.5．反插值法…………………………………………………………………（ 42 ）
　4.6．均差………………………………………………………………………（ 43 ）
　4.7．等距点……………………………………………………………………（ 46 ）
　4.8．差分和导数………………………………………………………………（ 50 ）
　4.9．差分表……………………………………………………………………（ 52 ）
　4.10．插值点的选择……………………………………………………………（ 54 ）
　问题………………………………………………………………………（ 57 ）
5．最佳逼近……………………………………………………………………（ 61 ）

5.1．导言……………………………………………………………………………（61）
5.2．最小平方逼近……………………………………………………………………（62）
5.3．修匀公式…………………………………………………………………………（66）
5.4．正交函数…………………………………………………………………………（68）
5.5．正交多项式………………………………………………………………………（71）
5.6．极小极大逼近……………………………………………………………………（77）
5.7．切比雪夫级数……………………………………………………………………（81）
5.8．幂级数的减缩……………………………………………………………………（84）
5.9．极小极大多项式的收敛…………………………………………………………（85）
5.10．逼近的其他类型…………………………………………………………………（85）
问题……………………………………………………………………………………（86）
6．数值微分和积分…………………………………………………………………（91）
6.1．数值微分…………………………………………………………………………（91）
6.2．误差的影响………………………………………………………………………（94）
6.3．数值积分…………………………………………………………………………（98）
6.4．龙贝尔格积分……………………………………………………………………（104）
6.5．高斯积分…………………………………………………………………………（106）
6.6．不定积分…………………………………………………………………………（110）
6.7．广义积分…………………………………………………………………………（112）
6.8．重积分……………………………………………………………………………（113）
问题……………………………………………………………………………………（115）
7．一元代数方程的解………………………………………………………………（119）
7.1．导引………………………………………………………………………………（119）
7.2．分半方法…………………………………………………………………………（119）
7.3．插值方法…………………………………………………………………………（121）
7.4．单步叠代法………………………………………………………………………（124）
7.5．快速收敛…………………………………………………………………………（126）
7.6．高阶过程…………………………………………………………………………（128）
7.7．压缩映射定理……………………………………………………………………（132）
问题……………………………………………………………………………………（134）

第一章 绪 论

1·1 什么是数值分析？

数值分析是数学的一个分枝，它研究分析解决数学问题的数值解法。我们将要研究数学中的构造性方法，这种方法具体的给出数学问题的解法。例如，一个问题解的存在性的构造性证明不仅指出解的存在性，还给出具体的求解方法。用反证法证明解的存在性就不是构造性的方法（这种方法先假定解不存在，然后推出矛盾）。考虑下述简单的例子。

例 1.1 证明实系数二次方程

$$x^2+2bx+c=0 \tag{1.1}$$

当 $b^2>c$ 时至少有两个实根。

构造性证明：对任意 x、b 和 c

$$x^2+2bx+c=x^2+2bx+b^2+c-b^2=(x+b)^2+c-b^2。$$

从而当且仅当

$$(x+b)^2+c-b^2=0。$$

时 x 是（1.1）的根，亦即

$$(x+b)^2=b^2-c。$$

将两端开方并注意 $b^2-c>0$ 可以推出当且仅当

$$x+b=\pm\sqrt{b^2-c}$$

时 x 是根，从而

$$x=-b\pm\sqrt{b^2-c}\ 。 \tag{1.2}$$

这样就证明了方程（1·1）有两个根，并且可根据（1·2）具体算出这两个根。

非构造性证明：设

$$q(x)=x^2+2bx+c.$$

首先假设（1·1）没有根，从而 q 恒不为 0。由于 q 是连续函数（见 §2·2），我们可知对所有 x 或者 $q(x)$ 是恒正的，或者 $q(x)$ 是恒负的。根据对 b 和 c 所附加的条件

$$q(-b)=b^2-2b^2+c=c-b^2<0$$

$q(x)$ 必需是恒负的。但当 $|x|$ 很大时，

$$x^2>|2bx+c|$$

因此当 $|x|$ 很大时 $q(x)>0$，我们得到矛盾。

其次假设 q 仅有一个根。则由 q 的连续性，当 x 很大时必有 $q(x)>0$，$-x$ 很大

时必有 $q(x)<0$ 或者相反当 x 很大时 $q(x)<0$，当 x 很小时 $q(x)>0$，这和无论 x 取何种符号，只要 $|x|$ 很大，就有 $q(x)>0$ 的事实是矛盾的。

这种证明方法并未指出如何计算根。□

在很长一段时间内，“算法”一词被理解为数学问题的构造性算法。仅在近代才给出算法严格的数学定义。这方面，A、M 图林（1912—54）的工作是重要的，他以抽象计算机的概念为基础给出了定义。从本书的目的出发，我们将算法定义成数学问题的构造性解法的完备而确切的描述。作形式定义的困难之一是要严格规定方法中容许那些运算。在这本书中我们规定为加、减、乘、除等基本算术运算。在一般情况下，在算法中的解答和方法不一定是数值的。例如早期希腊几何学家研究的算法只使用圆规、直尺和铅笔。这类算法的一个典型例子就是过给定点作一条直线的垂线。在本书中我们将仅处理数值算法。

值得注意的是，直至本世纪初，数值分析都是以构造性方法为基础的。早期的著名数学家，例如牛顿（1642—1727）、尤拉（1707—83）与高斯（1777—1855）提出许多重要的算法和构造性证明。很有意思的事是，虽然近年来计算器具的发展使算法的执行更容易了，而非构造性方法却发展了起来。

数字计算机设计的高速发展对数值分析有深远的影响。在写这本书的时候，计算机每秒可执行百万次算术运算，这在三十年前是完全不可想象的。甚至十年前，速度也只有每秒一千次。一些冗长而复杂的计算可以处理了，同时误差也大大增加了。数值方法的使用者希望能适应计算机的进展，而不掌握各种算法的原理，对具体问题选择最好的算法越来越困难了。

虽然多数数值算法是为使用数字计算机而提出的，但是数值分析的研究对象与计算机程序设计、信息处理（或数据处理）是不同的。当提出和使用数值算法时，需要有有效的用计算机进行计算的知识。计算机程序设计的问题是将算法编码成适合于计算机的形式（不一定是数字的）。信息处理的问题是组织计算机使其可以处理数据，这些数据不一定是数字形式的。计算机的基本知识可以参见菲力浦与泰罗（1969）。

1·2 数 值 计 算 法

许多数学问题无法求出解的精确值，而只好寻求它的近似值。例如当结果不是有理数时，我们用算术运算只能得到有理数，从而只能求出它的近似值。自然我们希望，按算法提供的结果，其误差能小于我们允许的程度，通常精度越高，其计算量也越大，下一个例子可以表明，要求精度越高，所需要的算术运算次数也越多。

例 1.2 用分半法求平方根（求平方根更有效的算法在 §7·6 中叙述，这里只是用它来说明精度和运算次数的关系）。给定 $a>0$，$\varepsilon>0$，我们要求 $\sqrt{a}$ 的近似值，使其误差不超过 ε。我们将假设 $a\geqslant1$。算法的步骤如图 1·1 的框图所示。在计算过程中，每步都有两个实数 x_0 和 x_1，，我们不断改变 x_0 和 x_1，保持 $x_0\leqslant\sqrt{a}\leqslant x_1$，并且重复的将区间 $[x_0, x_1]$ 减半。

开始时我们取 $x_0=1$ 与 $x_1=a$，显然 $1\leqslant\sqrt{a}\leqslant a$，我们计算区间的中点 $x=\dfrac{(x_0+x_1)}{2}$ 并且决定 x 是否大于 $\sqrt{a}$，由于我们不知道 $\sqrt{a}$ 的值，因此我们将 x^2 与 a 相比较。如果 $x^2>a$，我们以 x 代替 x_1，否则以 x 替代 x_0。当 $x_1-x_0\leqslant2\varepsilon$ 时计算停止，这时 $x-\sqrt{a}\leqslant\varepsilon$，其中 ε 是我们要求的精度。框图中的循环叫作叠代。当 ε 减小时叠代的次数

增加。同时 ε 减小时，必需提高算术运算的精度，否则判别 $x^2>a$ 可能会导致不正确的结果，以致 x_0 与 x_1 会由于有效位数不足而重合。如果我们的算术运算能达到任意精度，我们可以将 ε 取成充分小的正数，但不能将 ε 取成 0，因为那将导致无穷多次叠代（除非 $a=1$）。□

在例 1·2 中我们计算出数列的前几个数，它收敛于 $\sqrt{a}$（见 §2·3）。由于我们只能计算数列中的前有限项，我们不能得 $\sqrt{a}$ 的精确值（除非 $a=1$）。求得这类数列有许多算法，如果这个数列收敛于我们所要求的解，我们就把这个算法叫作收敛的。

符号 := 读如赋值，其意思是"变成等于"。

当分析算法时我们将研究近似解的误差。误差是由各种原因产生的，例如算术运算中的舍入误差，象例 1·2 中那样无穷过程只取有限步产生的误差等等。误差常常是不可避免的，必需使它不致得出错误结果，保证使用这个算法，特别是编成计算机程序时不致失败。对每个算法我们将找出误差的界，即计算解产生的误差范围。如果这个界不直接依赖于解本身，可以事前算出，叫作先验误差界。如果这个界直接依赖于解本身，只有当解已基本上算出之后，才能算出这个界，这个界叫作事后误差界。误差的界常常远远的大于实际误差，从而不能对误差作出切合实际的估计。因此对某些问题我们提出各种不同的误差估计方法，误差的界和估计对我们研究误差的渐近特性改进算法的近似程度是有重大意义的。

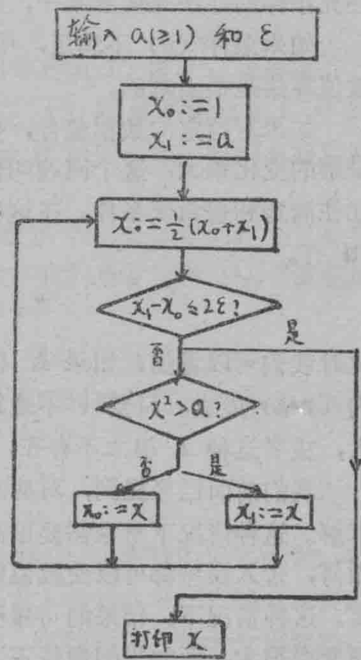

图 1.1 求平方根的简单算法

衡量误差大小有两种不同的方法，如果 a 是某个实数，a^* 是 a 的近似值，我们定义 $|a-a^*|$ 为绝对误差，$|a-a^*|/|a|$ 为相对误差，我们可以看出，如果对 a 的大小毫无了解，绝对误差的意义是不大的。我们常常给出百分比形式的相对误差。

研究算法的有效性是很重要的。我们常用为达到给定精度所需要的算术运算次数来表示有效性。有时我们还要考虑如所需的计算机存储量等其它因素。

1·3 适定的与良好的问题

在运用数值方法解决具体问题之前，有一个重要的问题即在问题的表述中数据变化时，解的变化是否敏感？例如当我们解代数方程组时，方程的系数是以数据形式提供，如果方程组系数小的变化会对解有很大的影响，问题就复杂了。即使系数没有扰动，误差仅由舍入误差产生时，我们仍不能算出问题的解。

对给定的数据 d 的集合，问题的解设为 $s(d)$，（$s(d)$ 与 d 可以是数、函数、矩阵、向量或它们的组合）。现在设 $d+\delta d$ 是数据的扰动集合并且 $s(d+\delta d)$ 是对应的解。我们用非负数 $\|\delta d\|$ 表示扰动数据的大小，用非负数 $\|S(d+\delta d)-S(d)\|$ 表示相应的解的差异

的大小，对给定的数据 d 的集合，如果它满足下述两个条件：

（i）对数据 d 的集合及接近 d 的数据集合存在唯一解。即有实数 $\varepsilon>0$，对所有满足 $\|\delta \boldsymbol{d}\|<\varepsilon$ 的 δd 存在唯一的解 $s(d+\delta d)$。

（ii）解 $s(d)$ 连续依赖于数据 d，即当 $\|\delta d\|\to 0$ 时

$$\|s(d+\delta d)-s(d)\|\to 0$$

则称对给定的数据集合问题是适定的。

如果问题的解多于一个，我们就会不知道用数值方法求出的解是那一个解。通常我们用补充条件的办法来使解唯一，例如解三次方程时，我们可规定要求最大的根。

如果条件（ii）不满足，尽管数据任意接近 d，而对应的解与 $s(d)$ 完全不同，这样用数值算法是很困难的。

如果对给定的数据集合，数据每一小的扰动解仅有小的不同，这个问题叫作良好的。如果解的变化很大，这个问题叫作病态的，自然这些术语也是相对的。适定问题的解对其数据往往满足利普希茨条件。在这种情况下有常数 $L>0$ 与 $\varepsilon>0$ 使对所有满足 $\|\boldsymbol{\delta d}\|<\varepsilon$ 的 δd 有。

$$\|s(d+\delta d)-s(d)\|\leqslant L\|\delta d\| \tag{1·3}$$

此时我们可以看出，如果 L 不很大，问题必然是良好的。限制 $\|\delta d\|<\delta$ 表示在这个范围内（1·3）成立，只要 ε 不是很小，这个限制不是很重要的。如果（1·3）中的 L 必须很大，或者这种 L 根本不存在，数据小的变化将会引起解大的变化，这时问题是病态的。

我们前面已经提到，对病态问题舍入误差对解可以有严重的影响，因此很难用数值方法求解。这种情况下常常需要用高精度的算术运算。如果问题是不适定的，不管算术运算精度如何，舍入误差都可以使数值解变得没有意义。有时数据本身就有误差，只能达到一定的精度。这种情况下，结果的可靠程度与问题的条件有关。如果问题是病态的，结果中的误差可能变得很大，而如果问题是不适定的，结果就将是毫无意义的。

下面的例子可说明适定与良好这些性质依赖于问题和数据。

例 1.3 计算二次式

$$q(x)\equiv x^2+x-1150。$$

的值。当 x 接近二次式的根时，这个问题是病态的。例如，$x=100/3$ 时，$q(100/3)=-50/9\simeq-5.6$。如果我们取 $x=33$，它与 $100/3$ 仅差 1%，我们将求出 $q(33)=-28$，其值差不多是 $q(100/3)$ 的 5 倍，当 $x=100/3$ 时，为使（1·3）成立，必需取 $L\simeq 70$（见问题 1·5）。□

假设我们要解的问题是 P，为了将 P 换成容易计算的问题，我们用 P_1 近似的代替 P，P_1 是比较容易计算的。这时会有两类误差。首先是 P 和 P_1 之间的差，用 E_P 表示这类误差。这种误差常常是由于截断一个无穷过程引起的，例如对无穷级数求和只取有限项就会产生这种误差（见 §2·3），我们把这种误差叫截断误差。第二类是 P 和 P_1 解之间的误差，我们用 E_S 表示，这类误差有时叫作整体误差。E_P 与 E_S 间是有关系的，但是不能推出 E_P 很小时，E_S 也很小。我们将对各种类型的问题导出 E_P 和 E_S 之间的关系，对于一个好的方法，当 E_P 趋近于 0，E_S 必需趋于 0。如果这个性质成立，我们将说这个

算法是收敛的。不幸的是，有些问题当 E_P 减少时 E_S 不趋于 0。

例 1.4 假定 f 是实变量 x 的实值函数，我们将对区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 中给定的点 x 求 f 的导数 f'。假定 f 是非常复杂的函数，我们只能计算 $f(x)$ 而不能精确的算出 $f'(x)$。

我们的算法是用容易微分的函数 g 去替换函数 f，用 $g'(x)$ 来代替 $f'(x)$。在第五章中我们将指出，对 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有 x，只要 f 满足一定的条件，可以选择 g 使误差 $E_P(x)=f(x)-g(x)$ 任意小。遗憾的是即使 $E_P(x)$ 任意小，$E_S(x)=f'(x)-g'(x)$ 还可能任意大。例如对 g 的不同选择，令 $E_P(x)=\frac{1}{n}\sin n^2x$，$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 则对所有的 x 当 $n\to\infty$ 时，$E_P(x)\to 0$。然而 $E_S(x)=n\cos n^2x$，对 $x=0$，当 $n\to\infty$ 时，$E_S(x)\to\infty$。□

当我们用容易计算的问题 P_1 近似的替换 P 时，我们自然希望 P 和 P_1 是适定的，并且在一定程度上是良好的。如果 P 不是适定的，一般的说，P_1 的解不能收敛于 P 的解。作逼近 P_1 时，P 的数据扰动的影响是必然的。为了保证算法的收敛，我们总要求问题 P 是适定的。若 P 不是良好的，那么收敛将是慢的。

我们用数值计算解 P_1，P_1 的数据也难免有扰动，因此要求 P_1 是适定的，并且是良好的。若 P 是良好的，自然希望 P_1 也是良好的，如果不然，我们重新挑选 P_1，使它尽可能好一些。

在某些数值算法中，特别是对微分方程，我们要象例 1·2 那样，计算序列中每一个元素，这时要考虑每个元素而不仅是它的极限。在这些问题中我们将利用从前面元素推出后面元素的递推关系。例如可以用下述递推关系

$$y_{n+1}=F(y_n, y_{n-1}, \cdots\cdots y_{n-m}) \tag{1·4}$$

对 $n=m, m+1, m+2, \cdots\cdots$ 计算序列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$，其中 F 是 $m+1$ 个变量的已知函数。我们需要给定起始值 $y_0, y_1, \cdots\cdots y_m$。在用（1·4）时将产生舍入误差，每一步的舍入误差都将影响所有的后继值，所以我们要研究舍入误差传播的影响。这些影响将是十分重要的，特别是现代计算机能计算序列的很多项，可能会造成很大的舍入误差。我们常用稳定这个词表示适定与良好。

例 1.5 如果 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足

$$y_{n+1}=100.01y_n-y_{n-1} \qquad n\geqslant 1 \tag{1.5}$$

$y_0=1$，$y_1=0.01$，则 $y_5=10^{-10}$，如果 $y_0=1+10^{-6}$，$y_1=0.01$，则 $y_5\simeq-1.0001$。y_5 值的巨大差异，表明这个过程是非常病态的。事实上这个递推关系是数值不稳定的。详细情节在 §11·11 中给出，特别是例 11·18。□

问　　题

1·1 节

1·1 对下述命题给出构造性与非构造性证明

（i）每一二次方程至多有两个不同的实根。

（ii）x 至少有两个实数使

$$2\cos(2\cos^{-1}x)=1。$$

（iii）给定直线 l 及线外一点 P，存在过 P 点且垂直于 l 的直线。

1·2　节

1·2　证明当 $0<a<1$ 时，用分半法求 $\sqrt{a}$ 的先验误差界为

$$|x-\sqrt{a}|\leqslant(1-a)|2^N。$$

其中 N 是叠代次数。

1·3　图 1.1 所示的求平方根算法中，每步都有

$$|x-\sqrt{a}|\leqslant\frac{x_1-x_0}{2}。$$

如果 $(x_1-x_0)^2<4a\varepsilon^2$，证明用 x 逼近 a 的相对误差满足

$$\frac{|x-\sqrt{a}|}{|\sqrt{a}|}<\varepsilon。$$

由此修正算法使相对误差小于 ε 时停止。

1·3　节

1·4　证明方程

$$\begin{gathered}x+y=2\\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{6}y=\frac{1}{3}\\ x+2y=3\end{gathered}$$

有唯一解，但这个问题在 §1.3 意义下不适定。如果系数舍去小数，可能无解。

1·5　若 $q(x)$ 是例 1·3 中的二次方程，证明

$$q(x+\delta x)-q(x)=(2x+\delta x+1)\delta x$$

并且如果 $33\leqslant x\leqslant 34$ 且 $|\delta x|\leqslant 1$，则

$$|q(x+\delta x)-q(x)|\leqslant 70\,|\delta x|.$$

第二章　分析基础

函　　数

定义 2·1　集合是对象的聚集。对象的数目可以是有限的或无限的。

我们写

$$s=\{a,\ b,\ c,\cdots\cdots\},$$

这里 s 表示集合，而 $a,\ b,\ c,\cdots\cdots$ 表示属于集合的对象。我们称 $a,\ b,\ c,\cdots\cdots$ 为集合 s 的元素，记作 $a\in s$，表示 a 属于 s。假设 s 和 T 是两个集合，如果 T 的元素都是 s 的元素，即满足[1]，$x\in T\Longrightarrow x\in s$，则我们说 T 是 s 的子集，记作 $T\subset S$。

例 2·1　满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的数 x 的全体的集合，用 $[a,\ b]$ 表示，叫做闭区间。满足 $a<x<b$ 的 x 的集合，用 $(a,\ b)$ 表示，叫做开区间。我们用 $(a,\ b]$ 表示满足 $a<x\leqslant b$ 的 x 的集合，$(-\infty,\ \infty)$ 表示全体实数的集合。□

定义 2·2　若已知 X 和 Y 是给定的两个集合，它们两者之间的关系，满足 X 的每个元素恰好对应 Y 的一个元素的则叫这种关系为函数关系或从 X 到 Y 的映射。□

例 2·2 若，在某瞬间，X 表示通行着的所有的伦敦汽车的集合，Y 表示所有的人的集合，这种“y 是 x 的驾驶员，且 $x\in X,\ y\in Y$”的关系，就是从 X 到 Y 的函数关系。□

例 2·3　若 X 是集合 $[0,\ 1]$ 和 Y 是全体实数 y 的集合，则关系式

$$y=x+2,\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

定义为从 X 到 Y 的函数。□

我们有时记作 $y=f(x)$，其中 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 表示由 x 变成 y 的函数。我们称为函数 f。注意不是对每一个 $y\in Y$，都存在某一个 $x\in X$，使得 $y=f(x)$。X 叫做函数的定义域。对某些 $x\in X$，使 $y=f(x)$ 的所有 $y\in Y$ 的集合，叫做 f 的值域或 $ran(f)$。于是有

$$ran(f)\subset Y$$

在例 2·3 里，定义域是闭区间 $[0.1]$，值域是 $[2,\ 3]$。

例 2·4　假设 X 表示具有 n 个实分量的所有向量 x 的集合，A 表示具有全体实元

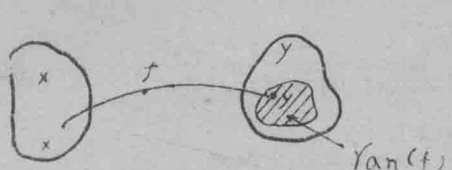

图 2·1　一个实函数的图解

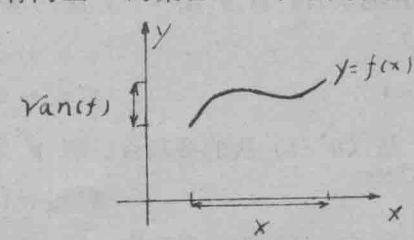

图 2·2　从实数到实数的一个函数的图解

[1] 符号 $\Longrightarrow$ 意思是“蕴函”。

素的一个 $n\times n$ 矩阵。（参看第 8 章）则 $Ax\in X$，关系式 $y=Ax$ 是从 X 到 X 的函数。□

我们可用图 2·1，示意地描述一个函数的概念。图上给出集合 X、Y 和 $ran(f)$，说明了一个具有代表性的元素 $x\in X$ 通过 f 变换成一个元素 $y\in Y$。

若 X 和 Y 是实数的子集，$y=f(x)$ 表示从 X 到 Y 的一个函数，读者将可用如图 2·2 那样的图形来表示该函数。该函数叫做一元（实）函数。

例 2·5 假设 X 表示有序对（x、y）的集合，其中 x 和 y 是实数，而 Y 表示全体实数的集合，则从 X 到 Y 的一个映射叫做两个实变量的函数。同样地，我们可以定义 n 个变量的函数。全体有序对（x、y）的集合，叫做 xy 平面。在几何上来说，函数 $z=f(x\cdot y)$ 表示是在 xyz 空间的一个曲面。例如函数 $z=1+x+y$ 表示通过（-1，0，1），（0，-1，0），（0，0，1）三点的平面。□

定义 2·3 若对每个 $y\in ran(f)$ 恰有一个 $x\in X$ 与之对应，且使 $y=f(x)$，则称从 X 到 $ran(f)\subset Y$ 的函数 f 是一一对应的。□

例 2·3 的函数是一一对应的。由 $y=x^2$，$-1\leqslant x\leqslant 1$ 定义的函数因每个 $0\leqslant y\leqslant 1$ 的 y 对应着 x 的两个值，故不是一一对应的。

定义 2·4 若 f 是从 X 到 $ran(f)\subset Y$ 的一一对应的函数，则可定义 f 的反函数为

$$x=f^{-1}(y)。\square$$

反函数 f^{-1} 变换 $y\in ran(f)$ 成唯一的 $x\in X$，且满足 $y=f(x)$。注意 $ran(f^{-1})=X$。

例 2·6 若 $y=f(x)$，$x\in X$，是例 2·3 中的函数 $y=x+2$，$0\leqslant x\leqslant 1$，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在和由 $x=y-2$，$2\leqslant y\leqslant 3$ 给定。□

对这章余下部分，我们主要关心实函数，即使很多函数也可以定义在复变量上。我们先简短地研究多项式和三角函数。然后，再看对数和指数函数。

多　项　式

函　数

$$y=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n, \tag{2·1}$$

其中 x 是实变数，系数 a_0，a_1，……a_n 是固定实数，且 $a_n\neq 0$，则函数叫做 x 的 n 次多项式。

例 2·3 里的函数是一个一次多项式。本书中，我们用 P_n 表示 n 次或少于 n 次的全体多项式的集合。若 p 是 $n\geqslant 1$ 次的多项式，α 是 p 的零点，即 $p(\alpha)=0$，则有（看问题 2·2）

$$p(x)=(x-\alpha)q(x) \tag{2·2}$$

其中 q 是（$n-1$）次的多项式。若 p 是次数 $n\geqslant r>1$ 的多项式，且

$$p(x)=(x-\alpha)^r q(x),$$

其中 q 是（$n-r$）次的多项式，且 $p(\alpha)\neq 0$，则称 α 是 P 的 r 重零点。若 $r=2$，则 α 是二重零点。例如 $p(x)\equiv(x-1)^2(x-2)$ 有三个实零点，在 $x=2$ 时，是一个一重零点，在 $x=1$ 时，为二重零点。

我们用式（2·2）可以证明，n 次的多项式不能有多于 n 个的实零点，除非多项式恒等于零。（即，它的全部系数是零。）这个结论对于一次多项式是正确的。（它的图形是一直线）用（2·2）式和数学归纳法原理（看§ 2·3）能推广到一般情形。

三 角 函 数

在图 2·3 里，AB 是一个半径为 1 圆心在 O 的弧。在弧度制中，这个角 θ 定义为圆弧 AB 的长度。于是，旋转一周的周角为 2π，直角为 $\frac{1}{2}\pi$。显然，BC 和 OC 是 θ 的函数，表示为

$$BC=\sin\theta,\quad OC=\cos\theta,\quad 0<\theta<\frac{1}{2}\pi。$$

因为三角形 OBC 内角和是 π，则有

$$\cos\theta=\sin\left(\frac{1}{2}\pi-\theta\right), \tag{2·3}$$

这里 $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$。

正弦函数的定义域可由$\left(0,\ \frac{1}{2}\pi\right)$扩大到如下全体 θ 实角：

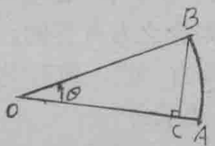

图 2·3 $OA=OB=1$, $\sin\theta=BC$, $\cos\theta=OC$。

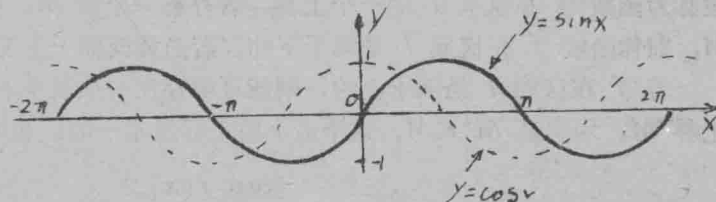

图 2·4 正弦和余弦函数

$$\sin\theta=0, \qquad \sin\frac{1}{2}\pi=1, \tag{2·4}$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi,$$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta, \qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots \tag{2·5}$$

在承认（2·3）对所有的 θ 均成立的前提下，$\cos\theta$ 的定义域就可扩大到所有的实角 θ。注意在（2·4）式里的值均已选得使 $\sin\theta$ 连续。（见 §2·2）方程（2·5）表明 $\sin\theta$ 的周期性。$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都称为以 2π 为周期的周期函数。（看图 2·4）

我们注意有关正弦余弦的一些恒等式：

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1, \quad \text{对全体 } \theta \tag{2·6}$$

$$\sin\theta+\sin\Phi=2\sin\left(\frac{\theta+\Phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\Phi}{2}\right), \tag{2·7}$$

$$\cos\theta+\cos\Phi=2\cos\left(\frac{\theta+\Phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\Phi}{2}\right)。 \tag{2·8}$$

恒等式（2·7）和（2·8）对全体 θ 角和 Φ 角都成立。其它三角函数（例如 $\tan\theta$）可用 sine 和 cosine 表示。

函数的进一步分类

定义 2·5 一个实变数函数 f，对全体 x，若 $f(-x)=f(x)$，则称为偶函数，若 $f(-x)=-f(x)$，则称为奇函数。□

所以，$\sin x$ 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数而 $1+x$ 既不是偶函数也不是奇函数。

定义 2·6 函数 f 在〔a, b〕上有定义，且若

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

对全体 x_1，$x_2\in$〔a, b〕和任何 $\lambda\in$〔0.1〕都成立，则称 f 为凸函数。□

几何上来说，意思是连续曲线 $y=f(x)$，例如函数 x^2 在（$-\infty$, ∞）上的任意两点的弦，位于该曲线之上。我们同样可以颠倒这个不等式，使得该弦上的点位于该曲线之下，来定义凹函数。

定义 2·7 若存在一个数 M，使对所有的 $x\in l$，满足

$$f(x)\leqslant M,$$

则称函数 f 在区间 l 是囿于上的。（函数可以是有限的或无限的。）每个这样的数 M 被称为函数 f 在区间 l 的一个上界。若存在一个数 m，使对所有的 $x\in l$，满足 $f(x)\geqslant M$，则称函数 f 在区间 l 是囿于下的。若函数既囿于上又囿于下，则称之为有界的。□

若 f 在区间 l 是囿于上的，则能证明存在一个最小的上界，设为 M^*，使对于每个上界 M，均满足 $M^*\leqslant M$，这个最小的上界是唯一的，也叫上确界。表示为

$$\sup_{x\in l} f(x)。$$

这个下确界在 $x\in l$ 时，是不小于任何一个 $f(x)$ 的最小数。同样的，若 f 在区间 l 是囿于下的，则有最大的下界或下确界，表示为

$$\inf_{x\in l} f(x)$$

此最大的数在 $x\in l$ 时，不大于任何一个 $f(x)$。

例 2·7 在〔$0,2\pi$〕上的 $\sin x$，有

$$\inf_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \sin x=-1, \qquad \sup_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \sin x=1,$$

其下确界和上确界在 $x=\frac{3}{2}\pi$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 时可分别被取到。□

例 2·8 对在（$-\infty$, ∞）上的 $\frac{1}{x^2}$，它没有上确界，因为 $\frac{1}{x^2}$ 没有上界的，然而，有

$$\inf_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{x^2}=0$$

但这下确界不能被取到，因为没有 x 的值，能使 $1/x^2=0$。□

若上确界能被取到，我们写“max”（即最大）以代替“sup”。若下确界能被取到，我们写“min”（即最小）以代替“inf”。

2·2 极限和导数

定义

$$g(x)=\frac{\sin x}{x}, \qquad 0<x\leqslant\frac{1}{2}\pi。$$

注意我们没有定义 $g(0)$。在靠近 $x=0$ 的地方，关于 $g(x)$ 是怎样的呢？列出 $\sin x$ 值的表来观察（看表 2·1）可见当 x 趋于 0 时，$g(x)$ 趋近于 1。

当 $x\to o$ 时 $(\sin x)/x$ 的极限 **表 2·1**

x	0.5	0.20	0.10	0.05	0.02
$(\sin x)/x$	0.959	0.993	0.998	1.000	1.000

为弄清这一点，看图（2·5），$\triangle OAB$的面积<扇形 OAB 的面积<$\triangle OAC$ 的面积或者（看问题 2·11）

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x, \qquad 0<x<\frac{1}{2}\pi。$$

得
$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

或
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1。 \tag{2·9}$$

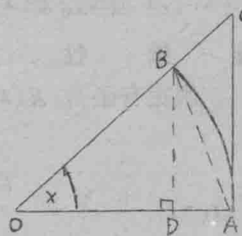

图 2·5 $OA=OB=1$；AB 是圆弧；$\angle OAC$ 是直角。

由于 $\cos x$ 是随 x 趋于 0 而趋近于 1，即（2·9）表明 $\sin x/x$ 随着 x 趋于 0 而趋近于 1，，更确切地说，从（2·9）式推出（看问题 2·12）

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{2}x^2。 \tag{2·10}$$

这就说明了对所有 x 的充分接近于 0 的值，能使$\frac{\sin x}{x}$对 1 要有多么接近就能多么接近，这是极限的一个例子。

定义 2·8 假定 $x_0\in[a, b]$ 函数 g 定义在 $[a, b]$ 上，可能除 x_0 外的每一点。若对于每一个 $\varepsilon>0$，相应地有一个数 $\delta>0$，使当 $x\in[a, b]$，

$$|x-x_0|<\delta \text{ 和 } x\neq x_0 \text{ 时 } \Longrightarrow |g(x)-c|<\varepsilon。$$

则称 $g(x)$ 在 x_0 有极限 c。利用经典的 $\varepsilon-\delta$ 说法，我们写

$$\sin_{x\to 0} g(x)=c。\square$$

例 2·9 函数$\frac{\sin x}{x}$在 $x=0$ 时有极限 1。给定 $\varepsilon>0$ 取 $\delta=(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$，对一切 x 使 $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$且 $|x|<(2\varepsilon)^{1/2}$ 时有$\frac{1}{2}x^2<\varepsilon$，由（2·10）式，则

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon,$$

合于定义 2·8 的要求。□

若对任一 $\varepsilon>0$，相应地有一个数 M，使得一切 $X>M$ 时，有 $|g(x)-c|<\varepsilon$ 成立。则称

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=c。$$

极 限 的 性 质

若函数 g 和 h 两者在某一包括 x_0 的区间上都有定义，且在此点两者都有极限，则

$$(a)\ \lim_{x\to x_0}(\alpha g(x)+\beta h(x))=\alpha\lim_{x\to x_0} g(x)+\beta\lim_{x\to x_0} h(x),$$

其中 α 和 β 是任意常数；

$$(b)\ \lim_{x\to x_0} g(x)h(x)=[\lim_{x\to x_0} g(x)]\cdot[\lim_{x\to x_0} h(x)];$$

$$(c)\ \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=1/\lim_{x\to x_0} g(x)。\quad 但\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0。$$

连　　续　　性

假定有函数 $g(x)$ 由

$$g(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant 1。\end{cases}$$

所定义，我们说 g 在 $x=0$ 有一不连续点，在该点 $g(x)$ 的值从左边上的 -1 跳跃到右边的 $+1$。

定义 2·9 函数 g 在 $[a, b]$ 上有定义，在 $x_0\in[a, b]$ 时，若 g 在 x_0 有极限，且这个极限就是 $g(x_0)$，，则称 g 在 $x_0\in[a, b]$ 是连续的。这样 g 在点 $x_0\in[a, b]$ 连续的意义，就是对每一个 $\varepsilon>0$，相应地有一个数 $\delta>0$，，使

当 $x\in[a, b]$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时 $\Longrightarrow$ $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$ 成立。

若 g 在每一个 $x_0\in[a, b]$ 上连续，则 g 在 $[a, b]$ 上是连续的。

连续的概念对函数定义在开区间和无限区间上都是适用的。

定义 2·10 函数 g 在 $[a, b]$ 上有定义，如果对于每一个 $\varepsilon>0$，对应有一个 $\delta>0$，使

当 $x\in[a, b]$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时 $\Longrightarrow$ $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$　　(2·11)

对每一个 $x_0\in[a, b]$，则称 g 在 $[a, b]$ 上是均匀连续的。□

这个定义的要点是，给定一个 $\varepsilon>0$，相应有一个出现在 (2·11) 式里的 δ，它与 x_0 无关，因而同样的 δ 将适用于 $[a, b]$ 的每一点。这里，不加证明地指出，若函数 g 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则它在 $[a, b]$ 上也是均匀连续的。

我们引证下列有关连续函数的定理。其中的第一个是极限性质简单结果。

定理 2·1 若 f 和 g 在一个区间上连续，则 fg 和 $\alpha f+\beta g$ 也在区间 I 上连续，其中 α 和 β 是常数。若 f 在 I 上连续，对于全体 $x\in I$ 使 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f}$ 在 I 上连续。□